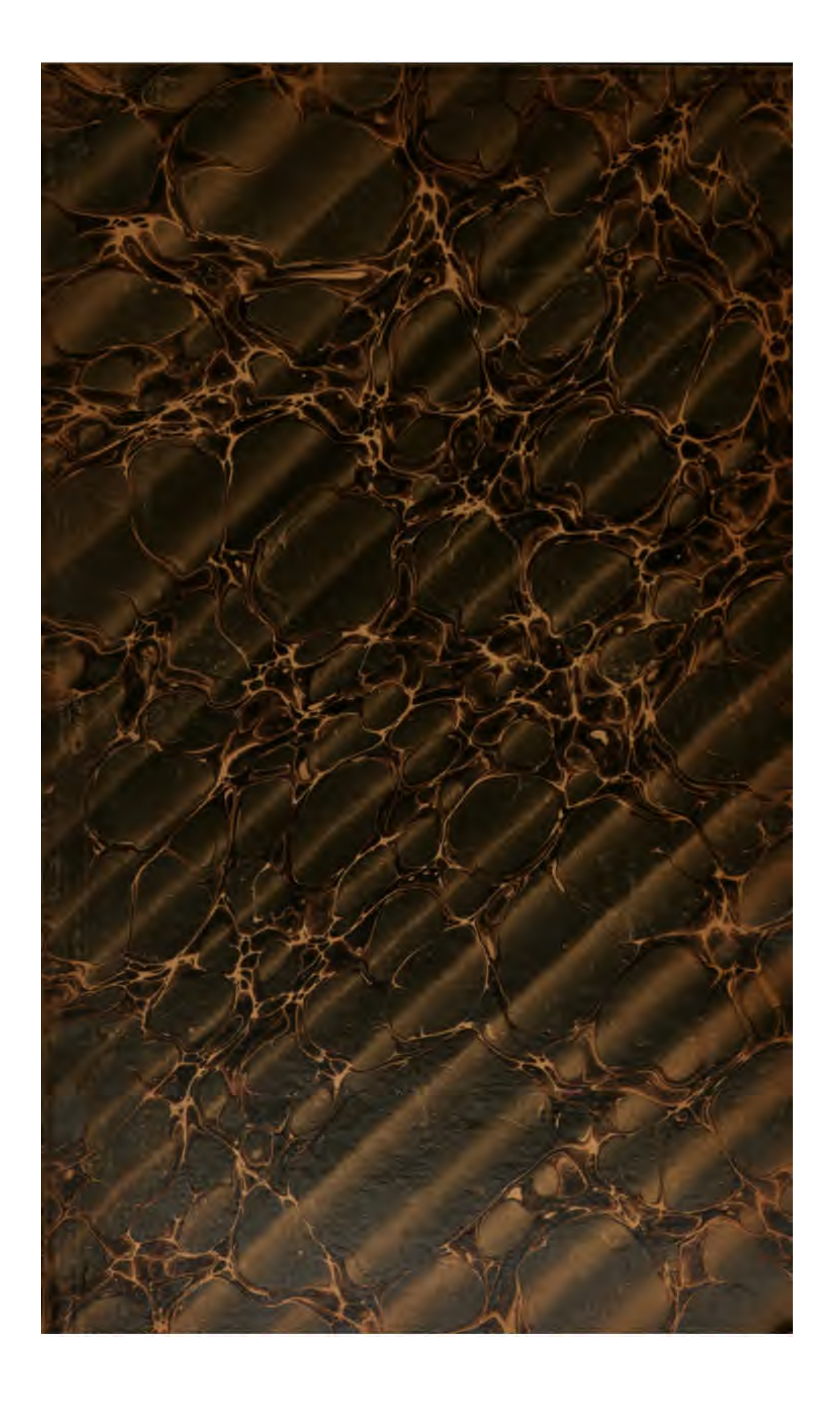






COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES.



COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

PAR M. BRESSE,

Membre de l'Institut,
Inspecteur général des Ponts et Chaussées.

TOME PREMIER.

Cinématique. — Dynamique du point matériel. — Statique.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1885

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

Le *Cours de Mécanique et Machines* que nous publions est celui que M. Bresse a professé à l'École Polytechnique pendant les dernières années de sa vie.

L'impression du premier Volume était commencée lorsque M. Bresse, après une courte maladie, fut enlevé le 22 mai 1883 à la Science, à sa famille, à ses amis.

La rédaction des deux Volumes de l'Ouvrage avait été *entièrement* terminée par M. Bresse, avec le soin consciencieux qu'il a toujours apporté à ses travaux. Aussi la publication de ce *Cours* a-t-elle pu se poursuivre et, nous ajouterons, a-t-elle pu être conduite avec toute la correction désirable, grâce au concours de MM. E. Collignon et Léauté, qui ont revu toutes les épreuves.

G.-V.

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

CINÉMATIQUE.

INTRODUCTION.

CHAPITRE PREMIER.

CINÉMATIQUE PURE.

CHAPITRE DEUXIÈME.

CINÉMATIQUE APPLIQUÉE.

DEUXIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES FORCES ET LEUR MODE D'ACTION.

CHAPITRE DEUXIÈME.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL; APPLICATIONS.

TROISIÈME PARTIE.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈME DU TRAVAIL VIRTUEL.

CHAPITRE DEUXIÈME.

ÉQUILIBRE DES SOLIDES INVARIABLES ET DE QUELQUES AUTRES SYSTÈMES PARTICULIERS.

CHAPITRE TROISIÈME.

ÉQUILIBRE DE DIVERS APPAREILS EN TENANT COMPTE DU FROTTEMENT, DE LA RÉSISTANCE AU ROULEMENT ET DE LA RAIDEUR DES CORDES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER.

ERRATA.

Page	Ligne	Au lieu de	Lisez
19	6 B	amène	mène
27	5 B	d'une variable	d'une ligne invariable
66	12 H	par rapport au système (S)	par rapport au système (S')
73	18 H	dans la même figure	de même la figure
89	9 H	(n° 11)	(n° 22)
91	18 H	l'angle OAO'	l'angle AOA'
91	14 B	ω'BP et ω'BQ	ωBP et ω'BQ
95	*fig.* 48 sur O*z*	R	S
125	2 H	nouvelle position BH	nouvelle position βH
125	10 H	d'où il suit que F'B	d'où il suit que F'β
130	2 B	quand le point A'	quand le point A
137	1 H	rayons OK et O'A	rayons AK et O'A
139	2 B	abaissée au point A	abaissée du point A
153	5 B	distance y reste	distance y reste
159	*fig.* 86	manquent les lettres DE, D'E' aux points de raccordement de la courroie avec les poulies A et A'	
160	4 H	dans le voisinage de *b*	dans le voisinage de *b'*
160	5 B	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
163	16 H	$\frac{la + mc}{lb + mb}$	$\frac{la + mc}{lb + md}$
164	1 B	$\frac{10.11.17.18}{20.21.50.78}$	$\frac{10.11.17.18}{20.28.50.78}$
168	4 H	$29^j\,12^h\,44^m\,28^s,8$	$29^j\,12^h\,44^m\,2^s,8$

Page	Ligne	Au lieu de	Lisez
202	1 H	à l'un des trois axes	à l'un des trois arcs
214	6 H	les figures $A_0 B_1 B_0 G$	les figures $A_1 B_1 B_0 G$
233	*fig.* 134	mettre a à la place de b et réciproquement	
294	16 H	accélération relative j	accélération relative j_r
306	9 B	$\frac{2 v_0 \sin \alpha}{2g}$	$\frac{2 v_0 \sin \alpha}{g}$
319	1 B	la longueur $x = 0$ se réduit	la longueur x se réduit
336	13 B	diminuera de $\overline{EF'} = \overline{EF} \sin i$	diminuera de $\overline{EF'} = \overline{EF} \sin i'$
338	3 B	$\frac{dy}{dt}$	$\frac{dy}{ds}$
339	3 B	méridien de MO	méridien de O
342	2 H	$y = bt - \omega a t^2 \cos \lambda$	$y = bt - \omega a t^2 \sin \lambda$
361	8 H	$\frac{P'}{P} = \frac{p' r}{p}$	$\frac{P}{P'} = \frac{p' r}{p}$
375	17 H	$A'B \doteq AA' \frac{F'}{F' - F}$	$A'B = AA' \frac{F}{F' - F}$
388	9 H	*fig.* 180, p. 383	*fig.* 181, p. 384
428	*fig.* 201	Les forces p devraient être égales.	
429	19 H	$1 - 2 + 3$	$1 + 2 + 3$
458	18 H	$\delta = fh$	$\delta < fh$
461	8 B	$P - Q = \frac{A - BQ}{D}$	$P - Q = \frac{A + BQ}{D}$
481	*fig.* 221	permuter les lettres B et C	
488	16 H	travail résistant utile Q	travail résistant utile de Q
515	18 H	$\frac{Qq}{Pp} = \frac{r}{r'} \cot(i - \varphi)$	$\frac{Qq}{Pp} = \frac{r'}{r} \cot(i - \varphi)$
538	6 H	il faudrait une valeur moindre	il faudrait adopter une valeur moindre

COURS

DE

MÉCANIQUE ET MACHINES

PROFESSÉ

A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

PREMIÈRE PARTIE.

CINÉMATIQUE.

1. *Préliminaires.* — La Mécanique est la science du mouvement et des forces. Nous commencerons par étudier d'abord le mouvement en lui-même, indépendamment des forces, c'est-à-dire des causes qui le produisent ou le modifient; quand on se place à ce point de vue particulier, on a une première partie de la Mécanique générale, à laquelle Ampère a donné le nom de *Cinématique* (du grec κίνημα, mouvement). La Cinématique peut elle-même se diviser en *Cinématique pure* et *Cinématique appliquée,* la première consacrée à l'étude du mouvement, en se plaçant au point de vue de la science abstraite et spéculative; la seconde à l'étude des organes et mécanismes divers employés dans l'industrie pour guider, transformer et mesurer les mouvements, mais en laissant toujours de côté la considération des forces mises en jeu.

La partie de la Mécanique où l'on s'occupe des forces prend le nom de *Statique* ou de *Dynamique,* suivant que les corps auxquels les forces sont appliquées restent en repos ou possèdent un mouvement quelconque. La Statique et la Dynamique sont d'ailleurs intimement liées entre elles, et nous les étudierons plus tard, en les faisant, pour ainsi dire, marcher de front.

CHAPITRE PREMIER.

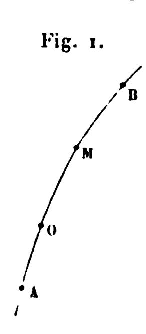
CINÉMATIQUE PURE.

§ I. — Mouvement d'un point.

2. *Mouvement d'un point sur une trajectoire donnée.* — Lorsqu'un corps de dimensions finies se meut dans l'espace, chacun de ses points est lui-même en mouvement; les mouvements des divers points étant supposés connus, on connaîtrait par là même le mouvement de l'ensemble. Il est donc naturel et logique de commencer la Cinématique par l'étude du mouvement d'un point.

Le mouvement d'un point est complètement défini quand on peut indiquer la position qu'il occupe à chaque instant dans l'espace. Si l'on donne *a priori* la courbe qu'il décrit et qu'on appelle *sa trajectoire,* il suffira d'indiquer la position où il se trouve sur cette trajectoire à toute époque, choisie comme on voudra. Cette position du point mobile peut se définir en indiquant sa distance à une origine fixe, O par exemple (*fig.* 1), la distance étant mesurée suivant la trajectoire; et, afin que les grandeurs successives de cette distance variable définissent tous les points de la trajectoire, si le point O n'est pas une des extrémités, on convient ordinairement que les distances sont comptées positivement d'un côté de O et négativement de l'autre. L'époque se définit en indiquant le temps ou la durée qui la sépare d'une autre époque fixe prise pour origine, et l'on convient de même que ces temps ou durées s'expriment par des nombres positifs ou négatifs, suivant qu'ils se

Fig. 1.



rapportent à des époques postérieures ou antérieures à celle qu'on a choisie comme origine.

On voit ici s'introduire une idée nouvelle, celle de l'époque, du temps ou de la durée, dont on n'avait pas besoin en Géométrie. Nous n'en donnerons aucune définition, parce qu'il s'agit d'une de ces idées premières que nous apportons avec nous en venant au monde, et que les définitions les plus ingénieuses sont impuissantes à rendre plus claires, si même elles ne les obscurcissent pas. La notion de la mesure du temps est également du domaine commun; les instruments employés à cet effet, c'est-à-dire les chronomètres, montres et pendules, sont décrits et étudiés dans un autre Cours.

Dans le langage ordinaire, on appelle *moment* un temps assez court. Nous nous abstiendrons de ce mot ainsi employé, car nous en ferons usage par la suite pour désigner une quantité tout autrement définie, qui joue en Mécanique un rôle important. Nous détournerons aussi le mot *instant* de son acception usuelle, en l'employant pour désigner le commencement ou la fin d'une durée quelconque; ainsi compris, l'instant joue, par rapport au temps, le même rôle que le point relativement aux longueurs, et de même que le dernier n'a aucune longueur, l'instant est absolument sans durée.

Cela posé, nommons

s la distance $\overline{OM}$, positive ou négative, comptée suivant la trajectoire AB, entre l'origine O et le point mobile M, à une époque quelconque;

t le temps qui s'est écoulé à cette époque, depuis celle qu'on a prise pour origine.

Si l'on connaît la relation entre s et t, on pourra, puisque la courbe AB est supposée donnée, trouver la position de M à telle époque qu'on voudra. Le mouvement de M sera ainsi connu; il suffit donc, pour le définir, d'une équation telle que

$$s = f(t),$$

qu'on appelle équation du mouvement, et dans laquelle s et t sont évalués numériquement au moyen d'unités conventionnelles quelconques. Nous supposerons d'une manière générale, et sauf avertissement contraire, qu'on emploie : 1° le

mètre pour les longueurs; 2° la seconde (soit $\frac{1}{86400}$ de jour solaire moyen) pour les temps.

3. *Mouvement uniforme.* — Après l'hypothèse $f(t) =$ const., qui répondrait à l'immobilité du point, la plus simple qu'on puisse faire sur la nature de la fonction f consiste à prendre une fonction linéaire et à poser

$$s = at + b, \tag{1}$$

a et b désignant des constantes quelconques. La propriété la plus essentielle du mouvement représenté par cette équation, c'est que, si l'on attribue à t des valeurs croissantes en progression arithmétique, les valeurs correspondantes de s ont également des différences constantes; la longueur σ parcourue par le point mobile, dans un intervalle de temps θ, est toujours $a\theta$, quelle que soit l'époque où l'on fera commencer ce temps θ. D'ailleurs le point se meut toujours dans le même sens, celui des s positifs ou celui des s négatifs, suivant que le coefficient a est lui-même positif ou négatif. Ce coefficient a reçu le nom de *vitesse;* plus il est grand en valeur absolue, plus le point parcourt de chemin dans un temps donné, ce qui répond bien à l'idée exprimée par le mot *vitesse* dans le langage usuel. La relation $\sigma = a\theta$ montre que la vitesse est le rapport constant qui existe entre un espace parcouru et le temps employé à le parcourir, ou encore que c'est l'espace parcouru dans l'unité de temps; ces espaces parcourus doivent toujours, bien entendu, recevoir un signe convenable, suivant le sens dans lequel ils sont engendrés, tandis que, au contraire, le temps θ du parcours est censé toujours positif.

Il n'y a pas lieu, d'après ce qu'on vient de dire, d'indiquer une nouvelle unité pour la vitesse; le choix des unités de longueur et de temps fixe suffisamment, dans chaque mouvement particulier, les valeurs numériques de σ et de θ, d'où résulte aussi celle du rapport $\frac{\sigma}{\theta}$, ou de la vitesse.

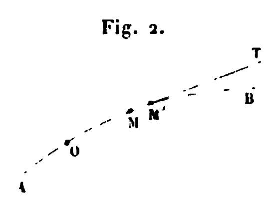
La constante b n'est autre chose que la valeur particulière de s définissant la position du point mobile pour $t = 0$, c'est-

à-dire quand on commence à compter le temps; elle ne donne lieu à aucune remarque particulière.

L'invariabilité du rapport $\frac{\sigma}{\theta}$ a fait donner au mouvement que nous venons d'étudier le nom de *mouvement uniforme*. Ce fait ne peut se produire, θ restant indéterminé, que dans le cas où $f(t)$ est une fonction linéaire. On peut, en effet, supposer un intervalle de temps infiniment petit dt pendant lequel le point parcourrait une longueur ds; l'équation $\frac{ds}{dt} = a$, dans l'hypothèse de a constant, redonnerait alors l'équation (1) par une intégration.

4. *Mouvement varié; vitesse.* — Tout mouvement non uniforme d'un point est dit mouvement varié. Dans ce mouvement, on ne définit plus la vitesse en disant que c'est l'espace parcouru dans l'unité de temps. Soient O (*fig.* 2) l'origine des s, $\overline{OM} = s$ la distance du point mobile à cette origine quand le temps a la valeur t; supposons qu'à l'époque définie par une valeur $t + dt$, infiniment peu différente, la distance s ait varié de $ds = \overline{MM'}$. Si la distance $\overline{MM'}$ était parcourue dans le même temps dt par un point animé d'un mouvement uniforme, la vitesse v de ce point serait donnée par l'équation

Fig. 2.



$$v = \frac{ds}{dt};$$

par définition, la vitesse ainsi obtenue est ce que l'on considère comme la vitesse du point mobile, quand il est dans la position M, à l'époque définie par la valeur t. Si donc on a l'équation du mouvement

$$s = f(t),$$

il en résulte

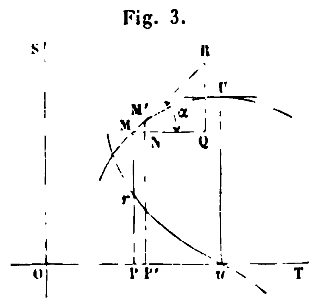
$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

On attribue conventionnellement à la vitesse v la direction

et le sens de l'élément MM'; la direction est celle de la tangente en M à la trajectoire; le sens est celui des s positifs ou des s négatifs à partir de M, suivant qu'en ce point s est croissant ou décroissant, ce que fait reconnaître immédiatement le signe de la dérivée $f'(t)$.

5. *Représentation graphique du mouvement d'un point; son emploi pour la détermination de la vitesse.* — Soit $s=f(t)$ l'équation du mouvement d'un point. Après avoir tracé deux axes rectangulaires OT, OS (*fig.* 3) et avoir adopté deux échelles arbitraires pour représenter les valeurs de s et de t par des longueurs tracées sur le papier, construisons une courbe dont chaque point M aurait t pour abscisse et s pour ordonnée. Le lieu des points M ainsi obtenus se nomme la *courbe des espaces*; si cette courbe était donnée, il est clair qu'elle définirait le mouvement tout aussi bien que l'équation $s=f(t)$, car, étant choisi un temps quelconque représenté par $\overline{OP}$, on connaîtrait la valeur correspondante de s par la mesure de l'ordonnée $\overline{PM}$.

Fig. 3.



La construction de cette courbe peut rendre quelquefois plus apparentes certaines propriétés du mouvement, qu'on reconnaîtrait avec moins de facilité dans l'équation $s=f(t)$; elle est surtout utile quand on n'a pas cette équation, mais qu'on a pu observer un certain nombre de valeurs de s, avec les valeurs correspondantes de t. La courbe est alors construite par points. Ce procédé a même l'avantage que, si certains points s'écartent trop d'un tracé régulier, il est naturel d'attribuer cette irrégularité à des erreurs d'observation; on peut alors contrôler les observations qui répondent à ces points ou les recommencer, et souvent découvrir des erreurs qui auraient pu échapper, si l'on s'était contenté de faire le tableau des valeurs numériques prises simultanément par s et t.

La courbe des espaces permet d'obtenir facilement la vi-

tesse. Soient, en effet, k et k' les rapports constants $\frac{s}{\overline{MP}}$, $\frac{t}{\overline{OP}}$; soient de plus M et M′ les deux points infiniment voisins qui répondent aux temps t, $t+dt$; $\overline{MP}$, $\overline{M'P'}$ les ordonnées de ces points; $\overline{MN}$ la droite égale et parallèle à $\overline{PP'}$ menée par le point M; α l'angle que fait la tangente en M à la courbe des espaces avec l'axe OT. On aura

$$ds = k.\overline{NM'}, \quad dt = k'.\overline{PP'} = k'.\overline{MN};$$

donc

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{k.\overline{NM'}}{k'.\overline{MN}} = \frac{k}{k'} \operatorname{tang}\alpha.$$

La vitesse est donc dans un rapport constant $\frac{k}{k'}$ avec la tangente trigonométrique de l'angle α que la tangente à la courbe en M fait avec l'axe OT. En prenant $k = k'$, on aurait simplement

$$v = \operatorname{tang}\alpha.$$

On peut aussi construire v géométriquement. Pour cela, remarquons que, si le mouvement devenait uniforme à partir du temps t, en conservant la vitesse v qui existe à cette époque, la courbe des espaces deviendrait une ligne droite, puisque l'ordonnée serait fonction linéaire de l'abscisse. Cette droite devrait passer par les points M et M′; car, en rendant la vitesse constante dans la suite du temps, nous n'avons rien changé aux positions du point mobile pour les époques t et $t+dt$; donc elle n'est autre chose que le prolongement MR de MM′, c'est-à-dire la tangente à la courbe en M. Rappelons-nous maintenant que dans un mouvement uniforme la vitesse s'obtient en prenant l'espace parcouru dans l'unité de temps; il en résulte immédiatement que, si l'on porte parallèlement à OT, en partant de M, une longueur $\overline{MQ}$ égale à celle qu'on a choisie pour représenter l'unité de temps, et si l'on mène ensuite par le point Q la droite QR parallèle à OS, jusqu'à sa rencontre avec la tangente en M, la longueur $\overline{QR}$ ainsi construite représente la vitesse en ce point; c'est en effet l'espace parcouru pendant l'unité de temps, dans le mouvement uniforme qui ferait parcourir l'arc $ds = \overline{NM'}$ pendant le temps dt.

Pour revenir de la longueur représentative $\overline{QR}$ à la grandeur réelle, il faudrait, comme pour une quelconque des ordonnées parallèles à OS, prendre le produit $k.\overline{QR}$.

La ligne $\overline{QR}$ étant portée en ordonnée à partir du point P, on obtient ainsi un point r, dont le lieu géométrique, pour toutes les positions de M, se nomme la *courbe des vitesses*. L'ordonnée de cette dernière courbe passe par zéro, quand celle de la courbe des espaces franchit un maximum ou un minimum, comme en U par exemple.

6. *Mouvement uniformément varié.* — On nomme ainsi un mouvement dans lequel la vitesse v varie d'une quantité constante Δv pendant un même intervalle de temps Δt, quelle que soit l'époque où l'on prendra le commencement de cet intervalle. Le quotient $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ a reçu le nom d'*accélération*, et, comme Δt est arbitraire, si on le prend égal à 1, on pourra dire que l'accélération est l'accroissement de la vitesse pendant l'unité de temps. L'évaluation numérique des vitesses n'exigeant que le choix des unités de longueur et de temps, il en est évidemment de même pour l'accélération. L'accélération est positive quand la vitesse croît, négative dans le cas contraire; dans le premier cas le mouvement est dit *accéléré*, dans le second *retardé*.

L'expérience a fait reconnaître que le mouvement vertical des corps pesants est uniformément varié; en nommant g l'accélération positive qui se produit si le corps descend, et v_0 la vitesse initiale pour $t = 0$, on a

Dans le cas de la descente........ $v = v_0 + gt$

Dans le cas de la montée......... $v = v_0 - gt$

D'une manière générale et pour un mouvement quelconque uniformément varié, désignons par j l'accélération positive ou négative, on aura, pour expression de la vitesse à un instant quelconque,

(1) $$v = v_0 + jt,$$

et, puisque $v = \frac{ds}{dt}$,

(2) $$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} jt^2.$$

en nommant s_0 la valeur de s pour $t=0$. Réciproquement, toute équation de cette forme représente un mouvement uniformément varié, car on en déduirait par la dérivation une valeur de la vitesse exprimée par une fonction linéaire du temps, dont les accroissements sont en rapport constant avec ceux de sa variable.

Les expressions de s et de v montrent que la courbe des espaces (n° 5) est une parabole ayant son axe parallèle à OS, et que celle des vitesses est une ligne droite. L'accroissement de l'ordonnée de cette droite correspondant à l'accroissement 1 de l'abscisse donnerait la valeur de l'accélération. Cet accroissement devrait toujours, bien entendu, se traduire en nombres, d'après le dessin, comme toutes les lignes parallèles à OS.

Étudions maintenant, sur les équations (1) et (2), quelques propriétés du mouvement uniformément varié.

Si v_0 et j sont de même signe, l'espace parcouru $s-s_0$, à partir de la position initiale, croît ou décroît constamment avec le temps t, suivant que v_0 et j ont le signe + ou le signe —. Le mobile s'éloigne donc indéfiniment de sa première position, en avançant suivant le sens des s positifs dans le premier cas, et en rétrogradant suivant le sens des s négatifs dans le second. En outre, la vitesse conserve toujours le même sens et grandit indéfiniment en valeur absolue.

Supposons maintenant v_0 et j de signes contraires, par exemple v_0 positif et j négatif. La dérivée $\frac{ds}{dt}$ ou v commence par être positive pour $t=0$, puis elle décroît et devient nulle au bout d'un temps $t'=-\frac{v_0}{j}$; après quoi elle reste toujours négative. Donc $s-s_0$ est d'abord une fonction croissante, passe par un maximum $v_0t'+\frac{1}{2}jt'^2$ ou $-\frac{v_0^2}{2j}$ pour $t=t'$, puis devient indéfiniment décroissante, de sorte que, dans cette dernière phase, le mobile marche constamment dans le sens des s négatifs, en s'éloignant du maximum de $s-s_0$ et prenant des vitesses qui grandissent indéfiniment en valeur absolue. L'hypothèse $v_0<0$, $j>0$ conduirait à des résultats analogues; on la ramène d'ailleurs à la précédente par un simple change-

ment du sens des s positifs, qui a pour effet de changer les signes de v et de j.

Soit un intervalle de temps θ; il commence à une époque arbitraire, que nous sommes toujours en droit de choisir pour origine du temps t. Soient, en outre, σ l'espace parcouru pendant cet intervalle de temps; v_0, v_1 et v_2 les vitesses au commencement, au milieu et à la fin. D'après les formules (1) et (2), on aura

$$v_1 = v_0 + \frac{1}{2} j\theta, \quad v_2 = v_0 + j\theta, \quad \sigma = v_0\theta + \frac{1}{2} j\theta^2.$$

Le quotient $\frac{\sigma}{\theta}$ est ce qu'on nomme, par définition, *vitesse moyenne* du point mobile pendant la durée θ; c'est la vitesse du mouvement uniforme qui permettrait de franchir le même espace dans le même temps. On tire de la dernière équation

$$\frac{\sigma}{\theta} = v_0 + \frac{1}{2} j\theta$$

ou bien, eu égard aux deux précédentes,

$$\frac{\sigma}{\theta} = v_1 = \frac{1}{2}(v_0 + v_2).$$

Donc la vitesse moyenne, pendant un certain intervalle de temps, est égale à la vitesse que le point possède réellement au milieu de cet intervalle, ou encore à la moyenne arithmétique des vitesses aux deux instants qui le commencent et le finissent.

L'élimination du temps entre les équations (1) et (2) conduit facilement à

$$(3) \qquad v^2 - v_0^2 = 2j(s - s_0);$$

donc l'accroissement du carré de la vitesse entre deux positions est égal au double produit de l'accélération par l'arc parcouru.

Remarquons, enfin, que les équations (1) et (2) peuvent prendre une forme plus simple en changeant les origines du temps et de l'espace parcouru. Elles peuvent s'écrire

$$v = j\left(t + \frac{v_0}{j}\right), \quad s + \frac{v_0^2}{2j} - s_0 = \frac{1}{2} j\left(t + \frac{v_0}{j}\right)^2,$$

ce qui revient à

$$(4)\qquad v = jt', \quad s' = \frac{1}{2} j t'^2,$$

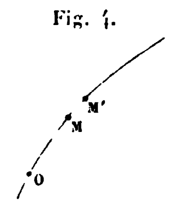
en posant

$$t' = t + \frac{v_0}{j}, \quad s' = s + \frac{v_0^2}{2j} - s_0,$$

c'est-à-dire en faisant rétrograder les origines du temps et de l'espace parcouru, respectivement de $\frac{v_0}{j}$ et de $\frac{v_0^2}{2j} - s_0$. Dans le cas où la nouvelle origine du temps serait comprise dans l'intervalle total pendant lequel le point mobile possède un mouvement uniformément varié, on peut dire que, pour ramener les équations (1) et (2) à la forme (4), il faut commencer à compter le temps et la longueur parcourue à partir de l'instant et de la position pour lesquels la vitesse est nulle. Les hypothèses v_0 et s_0 nuls pour $t = 0$ font en effet disparaître le terme constant de l'équation (1) et réduisent l'équation (2) à un terme du second degré en t. De cette manière les vitesses deviennent simplement proportionnelles au temps et les longueurs décrites au carré des temps employés à les décrire.

7. *Accélération dans un mouvement quelconque.* — Soient M et M' (*fig.* 4) deux positions infiniment voisines d'un point mobile sur sa trajectoire; t et $t + dt$ les valeurs correspondantes du temps; v et $v + dv$ celles de la vitesse; s et $s + ds$ les distances $\overline{OM}$ et $\overline{OM'}$ du point à une origine fixe O prise sur la courbe. On appelle *accélération* du mobile, dans la position M ou à l'époque t, celle du mouvement uniformément varié dans lequel la vitesse varierait toujours de la même quantité dv pour un même accroissement dt du temps. Cette accélération est donc exprimée (n° 6) par le quotient $\frac{dv}{dt}$; elle est par conséquent égale à la dérivée de la vitesse par rapport au temps, ou bien, puisque $v = \frac{ds}{dt}$,

Fig. 4.



à la dérivée seconde $\frac{d^2s}{dt^2}$ de l'espace parcouru. En nommant j l'accélération, nous poserons donc

$$j = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Par la combinaison de la première de ces expressions avec la relation $v = \frac{ds}{dt}$, on trouve encore

$$j = \frac{v\,dv}{ds} = \frac{d\frac{1}{2}v^2}{ds}.$$

Par définition, l'accélération sera censée avoir la direction de la tangente en M; son sens est identique ou contraire à celui des s positifs, suivant qu'elle est positive ou négative. On lui ajoute souvent l'épithète de *tangentielle*, pour une raison qui sera indiquée plus loin (n° 15).

Quand on a l'équation du mouvement

$$s = f(t),$$

on en déduit, par deux dérivations successives,

$$v = f'(t), \quad j = f''(t);$$

l'accélération se trouve alors, comme la vitesse, exprimée en fonction de la seule variable t. On peut concevoir une courbe représentative des accélérations, comme nous l'avons indiqué (n° 5) pour les espaces et les vitesses. Si la courbe des espaces avait été d'abord construite, nous avons vu comment on en déduirait géométriquement la courbe des vitesses; le même procédé permettrait d'avoir, au moyen de celle-ci, la courbe des accélérations.

Les notions exposées jusqu'à présent suffisent à l'étude du mouvement d'un point sur sa trajectoire, et par conséquent de son mouvement dans l'espace, quand la trajectoire est connue. En voici des exemples simples.

8. Problèmes : 1° *Mouvement ascendant d'un point pesant.* — Soit un corps lancé verticalement de bas en haut avec une

vitesse v_0; on demande la hauteur h à laquelle il s'élèvera malgré l'action de la pesanteur, et le temps T de l'ascension.

Commençons à compter le temps à partir de l'instant où la vitesse est v_0 et les longueurs décrites à partir de la position correspondante. Nous avons vu (nº 6) qu'on a

$$v = v_0 - gt;$$

donc

$$\frac{ds}{dt} = v_0 - gt,$$

et, puisque s est nul pour $t = 0$,

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2.$$

La vitesse s'annule et s devient maximum après le temps donné par l'équation $v_0 - gt = 0$; donc

$$T = \frac{v_0}{g}, \quad h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

La hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$ se nomme *hauteur due à la vitesse* v_0, non seulement dans la question actuelle, mais toutes les fois que cette expression se rencontre, le dénominateur g représentant toujours, bien entendu, l'accélération dans le mouvement vertical des corps pesants.

2° *Mesure de la profondeur d'un puits par la chute d'un corps pesant.* — On suppose un corps pesant abandonné sans vitesse initiale à l'orifice d'un puits; on mesure le temps T qui s'écoule entre l'instant du départ et celui où l'on entend le bruit produit par l'arrivée du corps au fond du puits : on demande de déterminer la profondeur de celui-ci.

Soient V la vitesse du son dans l'air et h la profondeur demandée. Le temps T se compose de deux parties, savoir : le temps T′ de la chute, et le temps T″ que le son a mis pour arriver du fond du puits à son orifice. On a (nº 6), puisque la vitesse initiale du corps est nulle,

$$h = \frac{1}{2} g T'^2, \quad \text{d'où} \quad T' = \sqrt{\frac{2h}{g}};$$

on a ensuite, la vitesse de propagation du son étant supposée

constante,

$$h = \mathrm{VT}'', \quad \text{d'où} \quad \mathrm{T}'' = \frac{h}{\mathrm{V}}.$$

Donc

$$\mathrm{T} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{\mathrm{V}},$$

ce qui permet de déterminer h par une équation du second degré. Le radical étant susceptible d'un double signe, l'élévation au carré qui le fait disparaître introduit en même temps une racine étrangère. Pour distinguer celle qui donne la solution du problème, mettons l'équation précédente sous la forme

$$h = \mathrm{V}\left(\mathrm{T} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right);$$

nous voyons alors que la racine cherchée est plus petite que VT, tandis que la racine étrangère serait plus grande.

9. *Problèmes divers sur la détermination des quatre quantités s, v, j, t les unes au moyen des autres.* — On suppose que, indépendamment des relations connues,

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad j = \frac{dv}{dt};$$

on en donne une autre distincte entre deux des quatre quantités dont il s'agit; alors trois d'entre elles peuvent être considérées comme fonctions de la quatrième et, si celle-ci est donnée, on peut en déduire les autres. En d'autres termes, on peut obtenir entre s, v, j, t trois relations sous forme finie ; le problème se réduit toujours, comme on va le voir, à des différentiations ou à de simples quadratures, quand la relation donnée est censée pouvoir être résolue par rapport à l'une de ses deux variables, qu'on choisit, dans chaque cas, de la manière la plus avantageuse.

Les combinaisons des quatre quantités deux à deux sont au nombre de six et donnent lieu à autant de problèmes différents.

1° On donne $s = f(t)$. Il en résulte immédiatement

$$v = f'(t), \quad j = f''(t).$$

2° On donne $v = f(t)$. Alors on a

$$\frac{ds}{dt} = f(t),$$

d'où l'on tire, en intégrant et nommant s_0 la valeur de s pour $t = 0$,

$$s = s_0 + \int_0^t f(t)\,dt.$$

On a enfin

$$j = \frac{dv}{dt} = f'(t).$$

3° Soit donnée l'équation $j = f(t)$. On en tire, par deux intégrations consécutives, en nommant v_0 et s_0 les valeurs de v et de s pour $t = 0$,

$$v = v_0 + \int_0^t f(t)\,dt, \quad s = s_0 + v_0 t + \int_0^t dt \int_0^t f(t)\,dt.$$

4° On donne $v = \varphi(s)$. Cette relation peut s'écrire

$$\frac{ds}{dt} = \varphi(s) \quad \text{ou} \quad dt = \frac{ds}{\varphi(s)};$$

par suite,

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varphi(s)}.$$

D'autre part, la différentiation de la relation $v = \varphi(s)$ conduit à

$$\frac{dv}{dt} = j = \varphi'(s)\frac{ds}{dt} = v\varphi'(s).$$

5° Si l'on suppose donnée l'équation $j = \varphi(s)$, on la mettra sous la forme (n° 7)

$$\frac{v\,dv}{ds} = \varphi(s);$$

d'où l'on tire, par une intégration,

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s} \varphi(s)\,ds.$$

De cette dernière, on déduit $v = F(s)$, F étant une fonction connue; par suite, on posera, comme dans le cas précédent,

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{F(s)}.$$

6° Supposons enfin qu'on donne $j = \varphi(v)$, on écrira

$$\frac{dv}{dt} = \varphi(v),$$

d'où résulte

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{\varphi(v)}.$$

La vitesse est ainsi connue pour chaque valeur de t, et l'on aura les espaces en calculant l'expression

$$s = s_0 + \int_0^t v\,dt.$$

i la relation trouvée entre t et v ne pouvait pas être résolue par rapport à v, on pourrait remplacer dt par $\frac{dv}{\varphi(v)}$ et poser

$$s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v\,dv}{\varphi(v)}.$$

10. *Remarque sur la manière dont varient les valeurs numériques des vitesses et des accélérations, quand on modifie les unités de longueur et de temps.* — Supposons que l'unité de longueur soit multipliée par un coefficient quelconque m et l'unité de temps par un autre coefficient k; une longueur d'abord exprimée par le nombre s prendra une valeur numérique $s' = \frac{s}{m}$, et de même le nombre t, qui représentait le temps, deviendra $t' = \frac{t}{k}$. Il résulte de là qu'on a

$$ds' = \frac{ds}{m}, \quad dt' = \frac{dt}{k},$$

et, par suite,

$$\frac{ds'}{dt'} = \frac{k}{m}\frac{ds}{dt};$$

la vitesse qu'un point mobile possède à une époque arbitraire a donc deux valeurs numériques $\frac{ds'}{dt'}$, $\frac{ds}{dt}$, et celle qui se rapporte aux nouvelles unités est égale à l'ancienne multipliée par le quotient $\frac{k}{m}$. De l'équation précédente nous déduirons encore

$$d\frac{ds'}{dt'} = \frac{k}{m}\,d\frac{ds}{dt}$$

et, en divisant membre à membre par $dt' = \frac{dt}{k}$,

$$\frac{d^2s'}{dt'^2} = \frac{k^2}{m}\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Le changement d'unités a donc pour effet de multiplier par $\frac{k^2}{m}$ la valeur numérique des accélérations.

Exemple. — La vitesse et l'accélération d'un train de chemin de fer s'expriment par des nombres v et j quand on prend le mètre et la seconde pour unités de longueur et de temps; quelles seront leurs valeurs numériques v' et j' si la lieue de 4^{km} et l'heure sont prises pour unités?

Ici l'on a

$$m = 4000, \quad k = 3600;$$

on en conclut immédiatement

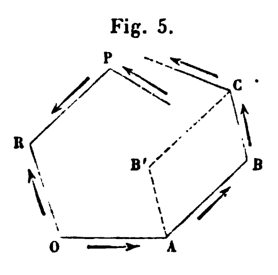
$$v' = 0{,}9\,v, \quad j' = 3240\,j.$$

11. *Digression sur les résultantes géométriques.* — En vue de certains énoncés à donner ultérieurement, nous allons exposer, à titre de digression, quelques propriétés qui peuvent être regardées comme appartenant à la Géométrie pure.

Soient données dans l'espace un certain nombre de droites D, D', D'', D''', ..., D_k définies en grandeur, direction et sens; on mène, par une origine arbitraire O (*fig.* 5), une droite $\overline{OA}$ égale et parallèle à D et de même sens; à partir de A, on mène pareillement une droite $\overline{AB}$ ayant la direction, la longueur et le sens de D'; puis $\overline{BC}$ ayant les mêmes éléments communs avec D'', et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à la dernière

droite D_k, qui sera reproduite en direction, longueur et sens par $\overline{PR}$. Les sens sont marqués par des flèches sur la figure.

Fig. 5.



On nomme *résultante* des droites D, D', D", ..., D_k la droite $\overline{OR}$ qui joint l'origine à l'extrémité du polygone ainsi construit, cette droite étant prise dans le sens de O vers R. Les droites D, D', ... sont appelées *composantes*.

La résultante est égale et contraire à la droite qui fermerait le polygone OABC...PR; cette droite fermant le polygone est $\overline{RO}$, allant de R vers O, pendant que la résultante va de O vers R.

On peut intervertir l'ordre de deux droites consécutives sans changer le point final R et la résultante $\overline{OR}$. Si, par exemple, on met D" avant D', ce changement aura pour seule conséquence de comprendre dans le polygone les deux côtés $\overline{AB'}$ et $\overline{B'C}$ au lieu des côtés $\overline{BC}$ et $\overline{AB}$, respectivement égaux et parallèles. Il résulte immédiatement de là qu'on peut faire arriver successivement une quelconque des droites D, D', ... à tel rang qu'on veut, et produire par conséquent toutes les permutations possibles sans changer la résultante $\overline{OR}$.

La projection orthogonale ou oblique (¹) de la résultante sur un plan quelconque est la résultante des droites composantes, projetées de la même manière sur ce plan. C'est ce qu'on voit tout de suite en projetant le polygone de composition sur le plan.

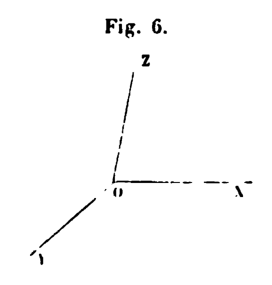
La projection, orthogonale ou faite parallèlement à un plan directeur, de la résultante sur un axe quelconque, est égale à la somme algébrique des projections des composantes. Cette propriété ne peut appartenir qu'à la résultante, car deux

(¹) Les projections orthogonales sur un plan ou sur un axe sont d'un emploi beaucoup plus fréquent que les autres. Pour simplifier le langage, nous supprimerons ordinairement l'adjectif quand il s'agira d'une projection à angle droit; mais nous avertirons le lecteur par une mention spéciale quand la projection pourra se faire obliquement.

droites ne peuvent avoir constamment leurs projections égales sans être identiques en grandeur, direction et sens.

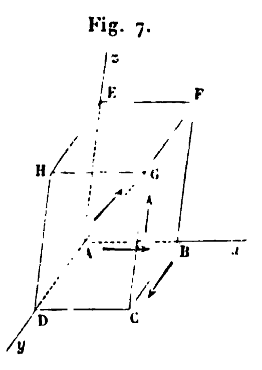
Il suffit même, pour qu'on soit en droit d'affirmer cette identité, que l'égalité des projections ait lieu sur trois axes non parallèles à un même plan, pourvu que les plans directeurs des projections ne soient pas parallèles entre eux, ni à une même droite. Soient, en effet, $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$ (*fig.* 6) des droites égales et parallèles aux trois projections d'une première droite, que je suppose issue du point O. J'aurai sa seconde extrémité en menant par les points X, Y, Z trois plans qui devront la contenir, savoir : par le point X un plan parallèle au plan directeur des projections sur l'axe OX, et de même pour Y et Z. Ces trois plans se couperont nécessairement en un point unique, d'après la condition admise relativement à leurs directions. Si maintenant je transporte la seconde droite parallèlement à elle-même en O, elle aura aussi les projections $\overline{OX}$, $\overline{OY}$, $\overline{OZ}$, et la construction de la seconde extrémité redonnera le même point que pour la première.

Fig. 6.



Lorsque les droites à composer sont au nombre de trois et ne sont pas parallèles à un même plan, on peut d'abord effectuer la composition en construisant le polygone ABCG (*fig.* 7) au moyen des droites portées bout à bout, comme l'indique la définition générale des résultantes. On obtient ainsi la résultante $\overline{AG}$. On arrive également au but par un autre moyen. On porte les trois composantes à partir du même point A, ce qui donne $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$; puis on amène trois plans par ces droites prises deux à deux et trois plans parallèles par les extrémités B, D, E, ce qui donne lieu au parallélépipède ABCDEFGH, dont la diagonale $\overline{AG}$ est la résultante cherchée. On énonce le fait ainsi établi en disant : *La diagonale d'un pa-*

Fig. 7.



rallélépipède, construit sur trois droites, est la résultante de ces droites.

On peut remarquer que $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ sont respectivement les projections de $\overline{AG}$ sur trois axes coordonnés Ax, Ay, Az, la projection sur chaque axe étant faite parallèlement au plan des deux autres. Donc, moyennant cette condition, une droite est la résultante de ses trois projections sur trois axes coordonnés.

Supposons les axes rectangulaires, et nommons :

X, Y, Z la longueur des composantes, prises avec le signe + ou le signe —, suivant qu'elles ont le sens des coordonnées positives ou le sens contraire;

R la longueur de la résultante prise en valeur absolue;

α, β, γ les angles d'une ligne ayant le sens et la direction de la résultante, avec les parties positives des axes coordonnés.

On a entre ces quantités les relations, bien faciles à établir,

$$X = R\cos\alpha, \quad Y = R\cos\beta, \quad Z = R\cos\gamma,$$
$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Le radical doit se prendre en valeur absolue; X, Y et Z ont respectivement les signes de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Si les droites à composer ne sont qu'au nombre de deux, la résultante R et les deux composantes X, Y forment un triangle, ou bien encore la résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur les deux composantes $\overline{OA} = X$, $\overline{OC} = Y$ (*fig.* 8), portées avec leurs directions et leurs sens à partir d'un même point de départ O. Quel que soit l'angle $COA = \theta$ des deux composantes, on a toujours, en vertu de théorèmes connus de Trigonométrie,

Fig. 8.

$$\frac{X}{\sin(R, Y)} = \frac{Y}{\sin(R, X)} = \frac{R}{\sin(X, Y)},$$
$$R^2 = X^2 + Y^2 + 2XY\cos\theta.$$

Dans le cas d'axes rectangulaires, il faut faire $\theta = 90°$, d'où

résulte

$$X = R\cos(R, X), \quad Y = R\cos(R, Y),$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

De même qu'avec trois axes, R se prend en valeur absolue, X et Y ayant un signe pareil à celui des cosinus qui entrent dans leurs valeurs.

La résultante d'un certain nombre de lignes porte aussi le nom de *somme géométrique*. Ce nom se justifie par plusieurs analogies qui existent entre l'addition algébrique et l'opération consistant à porter des lignes bout à bout, en conservant leur direction et leur sens. D'abord il n'y a aucune différence entre les deux opérations, si toutes les lignes ont une direction commune. Secondement, on peut composer les lignes par groupes qui en comprennent un certain nombre et chercher la résultante des résultantes partielles; cela ne change évidemment rien à la projection totale des lignes sur un axe quelconque, et par conséquent ne modifie pas la résultante, de même qu'on ne change pas une somme algébrique en groupant les termes de diverses manières. L'opération inverse, consistant à décomposer certaines composantes en plusieurs autres lignes, donnerait lieu à une observation toute semblable. Troisièmement, si l'on ajoute à une somme géométrique un ou plusieurs de ses termes pris en sens contraire, ces termes ajoutés se détruisent avec ceux qui existaient déjà, et les uns et les autres disparaissent de la somme; c'est ce qui a lieu aussi dans la somme algébrique. En quatrième lieu, on ne trouble pas l'égalité de deux sommes géométriques en ajoutant géométriquement une même droite à chacune d'elles. Enfin supposons que deux groupes

$$D, D', D'', \ldots \quad \text{et} \quad \partial, \partial', \partial'', \ldots$$

aient des résultantes égales, et traduisons ce fait par l'égalité

$$\overline{D} + \overline{D'} + \overline{D''} + \ldots = \overline{\partial} + \overline{\partial'} + \overline{\partial''} + \ldots,$$

dans laquelle le trait placé sur chaque lettre est destiné à rappeler qu'il s'agit d'une composition ou d'une sommation géométrique. Si l'on ajoute géométriquement aux deux membres

la droite — D, égale à D et de sens contraire, l'égalité devient, en vertu des deux remarques précédentes,

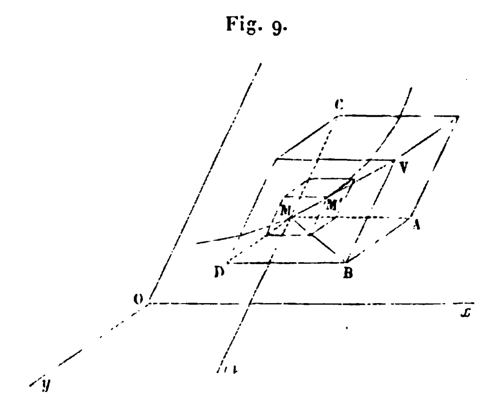
$$\overline{D'} + \overline{D''} + \ldots = \overline{\partial} + \overline{\partial'} + \overline{\partial''} + \ldots - \overline{D};$$

on voit donc qu'on peut faire passer un terme d'un membre dans un autre n changeant son signe.

Revenons maintenant au mouvement d'un point, mais sans supposer sa trajectoire connue *a priori*.

12. *Relation entre la vitesse d'un point mobile et les dérivées de ses coordonnées par rapport au temps.* — Que la trajectoire d'un point soit donnée ou non, la vitesse reste définie de la même manière ; lorsque le point passe de la position M à la position M′ infiniment voisine (*fig.* 9), en décrivant un élé-

Fig. 9.



ment $ds = \overline{MM'}$ pendant un temps dt, on dit par définition que la vitesse v a pour grandeur $\frac{ds}{dt}$, pour direction celle de la tangente en M à la trajectoire, et pour sens celui de M vers M′. Prenons trois axes coordonnés quelconques Ox, Oy, Oz, auquel nous rapporterons les positions du mobile, il faudra, pour que le mouvement soit déterminé, que les coordonnées x, y, z de M soient déterminées en fonction du temps. Cela posé, remarquons que la droite $\overline{MM'}$ est la résultante de ses trois projections dx, dy, dz sur les axes, la projection sur

chacun d'eux étant faite parallèlement au plan des deux autres; il en est de même, à la limite, pour l'arc ds, qui se confond avec $\overline{MM'}$ en longueur, direction et sens. L'élément ds est donc la diagonale du parallélépipède construit sur les composantes dx, dy, dz. Maintenant, si l'on construit un autre parallélépipède semblable au précédent, en adoptant M pour centre d'homologie et amplifiant toutes les dimensions linéaires dans le rapport $\frac{1}{dt}$, le sommet opposé à M se placera en V sur MM' prolongé à la distance $\frac{ds}{dt}$, et les composantes de cette droite, égale à la vitesse en grandeur, direction et sens, seront

$$\overline{MA} = \frac{dx}{dt}, \quad \overline{MB} = \frac{dy}{dt}, \quad \overline{MC} = \frac{dz}{dt}.$$

On peut avoir ces trois dérivées lorsque x, y, z sont définies en fonction du temps; la vitesse s'obtient donc alors par la composition de trois droites connues.

Si les axes étaient rectangulaires, on aurait pour grandeur de la vitesse v (n° 11)

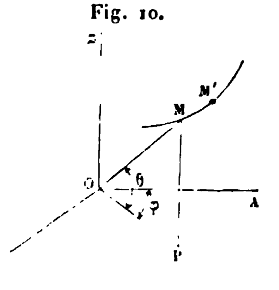
$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

et pour ses cosinus directeurs

$$\frac{1}{v}\frac{dx}{dt}, \quad \frac{1}{v}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{1}{v}\frac{dz}{dt}.$$

On pourrait adopter un autre genre de coordonnées, par exemple les coordonnées sphériques. On a un axe fixe Oz, issu du point O (*fig.* 10); la position du point mobile M sera définie si l'on donne à chaque instant la longueur $\overline{OM} = r$, l'angle φ du plan zOM avec un plan fixe zOA, et enfin l'angle θ que fait OM avec sa projection OP sur le plan OAP perpendiculaire à Oz. Pour passer du point M au point infiniment voisin M', on peut donner successivement aux trois

Fig. 10.



variables r, θ, φ leurs accroissements $dr, d\theta, d\varphi$; l'arc élémentaire $ds = \overline{\text{MM}'}$ est alors la résultante de trois longueurs rectangulaires entre elles, savoir :

1° dr suivant le prolongement de OM;

2° $r\,d\theta$ suivant la perpendiculaire à cette droite, dans le plan MOZ et dans le sens des accroissements de θ;

3° $r\cos\theta\,d\varphi$ suivant une perpendiculaire aux deux premières, dans le sens des accroissements de φ.

Par suite, la vitesse a pour valeur, en vertu de raisonnements tout à fait analogues aux précédents,

$$v = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\cos^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2},$$

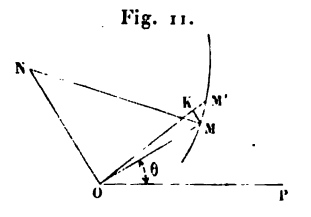
et ses composantes, suivant les trois directions qu'on vient de définir, seront

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d\theta}{dt}, \quad r\cos\theta\frac{d\varphi}{dt};$$

on pourrait en déduire la direction et le sens de v.

Supposons encore que les positions d'un point M mobile dans un plan soient définies par les coordonnées polaires, savoir le rayon vecteur $\overline{\text{OM}} = r$ (*fig.* 11) et l'angle θ qu'il fait avec l'axe polaire OP. L'arc élémentaire $\overline{\text{MM}'} = ds$ de trajectoire sera considéré comme la résultante des deux longueurs $\overline{\text{MK}} = r\,d\theta$ et $\overline{\text{KM}'} = dr$, la première perpendiculaire au rayon vecteur OM, la seconde comptée suivant ce rayon, dans les sens respectifs des accroissements de θ et de r. Par suite, la vitesse v a deux composantes

Fig. 11.



$$r\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dr}{dt}$$

dans ces mêmes directions et sens, et sa valeur est

$$v = \sqrt{r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2}.$$

La première composante $r\frac{d\theta}{dt}$ a reçu le nom de *vitesse de circulation*, et la seconde $\frac{dr}{dt}$ celui de *vitesse de glissement*. Le rapport $\frac{d\theta}{dt}$, accroissement de l'angle θ rapporté à l'unité de temps, se nomme *vitesse angulaire*. Enfin le rapport $\frac{\text{aire OMM}'}{dt}$, accroissement, rapporté à l'unité de temps, de l'aire engendrée par le rayon vecteur, se nomme *vitesse aréolaire;* son expression analytique est $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$.

La sous-normale $\overline{\text{ON}}$ est égale à r tang OMN ou à r tang KMM'; or tang KMM' $= \frac{dr}{r\,d\theta}$, d'où

$$\overline{\text{ON}} = \frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}}.$$

La sous-normale en coordonnées polaires est donc égale au rapport de la vitesse de glissement à la vitesse angulaire.

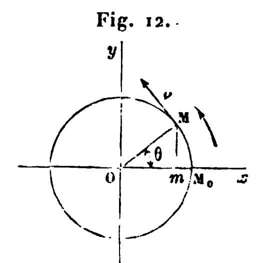
13. *Projection du mouvement d'un point sur un axe ou sur un plan.* — Si l'on imagine que le point M (*fig.* 9) soit à chaque instant projeté sur un axe des x, parallèlement au plan des yz, le point de projection se déplacera en même temps que le point de l'espace, et la distance du premier à l'origine O sera toujours égale à la coordonnée x. La vitesse du point de projection sur sa trajectoire aura donc pour valeur $\frac{dx}{dt}$ (n° 4). Or on a vu (n° 12) que la vitesse v est la diagonale MV du parallélépipède construit sur trois droites $\overline{\text{MA}} = \frac{dx}{dt}$, $\overline{\text{MB}} = \frac{dy}{dt}$, $\overline{\text{MC}} = \frac{dz}{dt}$, respectivement parallèles aux trois axes coordonnés; donc $\overline{\text{MA}}$, vitesse du point de projection, est la projection faite sur l'axe des x, parallèlement au même plan directeur yz, de la vitesse v de l'espace. Il est évident d'ailleurs que l'axe des x et le plan des yz n'ont rien de particulier, mais sont tout ce qu'on veut, à la seule condition de ne pas être parallèles.

La projection m du point M sur le plan des xy, faite parallèlement à l'axe des z, a constamment pour coordonnées x, y; la vitesse de m est donc la diagonale du parallélogramme construit sur $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, puisqu'ici $\frac{dz}{dt}$ s'annule. D'autre part, cette diagonale, égale et parallèle à $\overline{MD}$, n'est autre chose que la projection de $\overline{MV}$ sur le plan des xy. Donc, si l'on projette le mouvement d'un point sur un plan, parallèlement à une droite quelconque, la vitesse du point de projection est la projection de la vitesse du point de l'espace.

14. *Applications diverses.* — Nous allons indiquer diverses applications des théorèmes énoncés aux nos 12 et 13.

(*a*). *Projection d'un mouvement circulaire uniforme sur un axe.* — Soit un point M (*fig.* 12) qui décrit uniformément le cercle OM ayant pour centre O et pour rayon $\overline{OM} = r$; cherchons l'équation du mouvement projeté orthogonalement sur Ox. On aura

Fig. 12.



$$\overline{Om} = x = r \cos MOM_0 = r \cos\theta;$$

or l'angle θ varie uniformément, d'après les données, et si l'on nomme ω son accroissement dans l'unité de temps, on pourra prendre $\theta = \omega t$, en convenant de placer l'origine du temps à l'époque où le point M était en M_0 sur Ox. Donc

$$(1) \qquad x = r \cos \omega t;$$

c'est l'équation demandée.

On trouve ensuite par la différentiation

$$(2) \qquad \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t = -\omega . \overline{Mm},$$

ce qui montre que la vitesse $\frac{dx}{dt}$ du point de projection m est proportionnelle à l'ordonnée $\overline{Mm}$ du point M décrivant le cercle. Il est d'ailleurs facile de vérifier qu'elle est bien la

projection orthogonale de la vitesse v de M sur Ox. L'arc $\overline{M_0M} = s$ a pour valeur $r\theta$ ou $r\omega t$; donc $v = \frac{ds}{dt} = \omega r$. Cette vitesse, dirigée suivant la tangente au cercle, fait avec l'axe Ox un angle $\frac{\pi}{2} + \theta$ ou $\frac{\pi}{2} + \omega t$; sa projection sur Ox est par conséquent $-\omega r \sin \omega t$, égale à $\frac{dx}{dt}$, conformément à un théorème du n° 13.

Si l'on avait projeté sur une perpendiculaire Oy à Ox, on aurait trouvé de même

$$y = r \sin \omega t, \quad \frac{dy}{dt} = \omega r \cos \omega t;$$

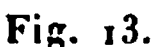
sur un troisième axe perpendiculaire au plan du cercle, on aurait des projections nulles. Donc (n° 12)

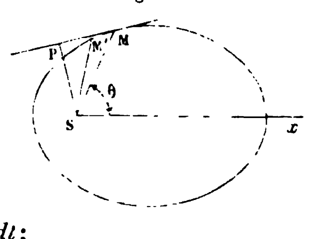
$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \omega r,$$

ce qui a lieu effectivement, comme on vient de le voir.

Le mouvement représenté par l'équation (1) est un mouvement périodique et oscillatoire; la distance x varie de $+r$ à $-r$. Le temps nécessaire pour passer d'une de ces limites à l'autre est celui que le rayon OM met à tourner de l'angle π, c'est-à-dire $\frac{\pi}{\omega}$.

(*b*). *Quelques propriétés des vitesses d'une planète, dans son mouvement autour du Soleil.* — Soient (*fig.* 13)


Fig. 13.



S et M les centres du Soleil et de la planète;

r le rayon vecteur $\overline{SM}$ joignant le premier centre, supposé fixe, au second;

θ l'angle décrit par SM à partir d'une variable Sx;

$\overline{MM'} = ds$ le déplacement infiniment petit de M dans un temps dt;

$\overline{SP} = p$ la perpendiculaire abaissée de S sur la tangente en M à la trajectoire de ce point.

Kepler, célèbre astronome allemand [1], a constaté par l'observation que les aires engendrées par le rayon vecteur croissent proportionnellement au temps. La vitesse aréolaire (n° 12) est donc constante; en la désignant par C, on aura

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = C, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{2C}{r^2}.$$

Donc *la vitesse angulaire du rayon vecteur est en raison inverse du carré de sa longueur.*

La vitesse de circulation s'exprime par $r\frac{d\theta}{dt}$, soit dans le cas actuel par $\frac{2C}{r}$; donc *la vitesse de circulation est en raison inverse du rayon.*

L'aire du triangle SMM′ s'exprime à la fois par $\frac{1}{2}r^2d\theta$ et par $\frac{1}{2}p\,ds$; comme $\frac{1}{2}r^2d\theta$ est égal à $C\,dt$, il en résulte qu'on a

$$p\,ds = 2C\,dt, \quad \text{d'où} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{2C}{p}.$$

Ainsi *la vitesse avec laquelle la planète parcourt un élément de sa trajectoire est en raison inverse de la distance entre le Soleil et la tangente à cet élément.*

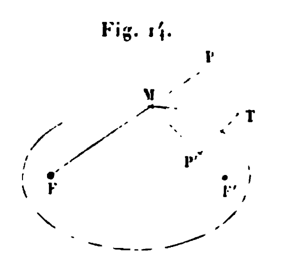
(*c*). *Méthode de Roberval pour mener des tangentes aux courbes.* — Roberval, savant français, a proposé vers la fin du XVIIe siècle, pour résoudre le problème des tangentes, une méthode générale qui consiste essentiellement à considérer la courbe comme engendrée par le mouvement d'un point, dont on détermine la vitesse, au moins en direction. Comme cette direction et celle de la tangente sont identiques, chercher l'une ou l'autre c'est au fond la même chose, et il semble au premier abord que l'introduction de ce point mobile ne fait pas avancer beaucoup la solution du problème. Cependant il arrive souvent qu'on trouve un secours bien réel dans l'emploi du vocabulaire spécial et des théorèmes de la Cinématique; c'est ce qu'on va voir par quelques exemples.

---

[1] Né en 1571, mort en 1630.

1° *Ellipse (ou hyperbole) définie par la propriété des rayons vecteurs menés des deux foyers à un point de la courbe.* — Soient F et F′ les deux foyers d'une ellipse (*fig.* 14); on sait que la courbe est le lieu des points M, tels que la somme des deux distances $\overline{FM}$ et $\overline{F'M}$ ait une valeur constante $2a$. Si nous considérons d'abord F comme pôle, la vitesse du point M sur la courbe se composera (n° 12) d'une vitesse de glissement dirigée suivant le rayon vecteur, que nous représentons par $\overline{MP}$, et d'une vitesse de circulation dans une direction perpendiculaire; donc, en menant PT perpendiculaire à MP, l'extrémité de la vitesse cherchée doit se trouver quelque part sur cette perpendiculaire. Elle doit de même se trouver sur la perpendiculaire P′T menée au bout de la droite $\overline{MP'}$, qui représente la vitesse de glissement quand on choisit pour pôle le second foyer F′, et par conséquent elle est au point de rencontre T de ces deux perpendiculaires. Mais on a, d'un autre côté, en nommant u et u' les deux vitesses de glissement,

Fig. 14.



$$u = \frac{d\overline{FM}}{dt}, \quad u' = \frac{d\overline{F'M}}{dt}$$

et, puisque la somme $\overline{FM} + \overline{F'M}$ est constante,

$$\frac{d\overline{FM}}{dt} + \frac{d\overline{F'M}}{dt} = 0 \quad \text{ou bien} \quad u' = -u.$$

Cela montre que, si $\overline{MP}$ est portée en prolongement de $\overline{FM}$, $\overline{MP'}$ doit être portée, au contraire, dans le sens de M vers F′, et de plus que les deux longueurs $\overline{MP}$, $\overline{MP'}$ sont égales. Par suite les triangles rectangles MTP, MTP′ le sont aussi, comme ayant l'hypoténuse commune et les côtés $\overline{MP}$, $\overline{MP'}$ égaux; donc la direction MT de la vitesse, ou de la tangente, partage en deux parties égales l'angle formé par un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre.

Pour l'hyperbole, la relation entre les rayons vecteurs con-

siste en ce que leur différence est constante. On aurait alors, en suivant une marche analogue, $u = u'$; les deux longueurs représentatives $\overline{\text{MP}}$, $\overline{\text{MP}'}$ devraient se porter en se rapprochant des deux foyers (ou en s'éloignant), et l'on arriverait à conclure que la tangente partage en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs.

2° *Courbe du second degré définie par la propriété d'un foyer et de la directrice correspondante.* — On sait qu'une courbe du second degré est le lieu des points M (*fig.* 15) tels que le rapport des distances $\overline{\text{MP}}$ et $\overline{\text{MF}}$ de chacun de ces points à une droite fixe DD′ et à un point fixe F conserve une valeur constante k. La droite DD′ et le point F sont une directrice et le foyer correspondant. Considérons encore le point M comme mobile sur la courbe, et imaginons des coordonnées polaires avec F pour pôle. La vitesse de M se compose alors d'une vitesse de glissement (n° 12), représentée par une longueur telle que $\overline{\text{MQ}}$ portée sur MF, et d'une vitesse de circulation dont l'extrémité est quelque part sur la perpendiculaire QR au rayon vecteur. On peut aussi considérer le mouvement du point M comme rapporté à deux axes rectangulaires, dont l'un serait DD′; la vitesse est alors la résultante d'une vitesse comptée suivant MP, que nous représentons par la longueur $\overline{\text{MS}}$, et d'une autre vitesse dirigée suivant une perpendiculaire SR à la première. L'extrémité de la vitesse doit donc se trouver au point de rencontre R des perpendiculaires QR et SR. Maintenant, de la relation $\overline{\text{MP}} = k\overline{\text{MF}}$, on déduit

Fig. 15.

$$\frac{d\overline{\text{MP}}}{dt} = k\,\frac{d\overline{\text{MF}}}{dt} \quad \text{ou} \quad \overline{\text{MS}} = k\overline{\text{MQ}};$$

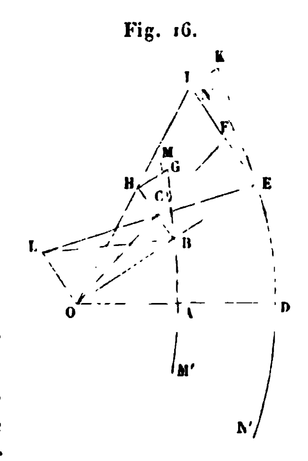
par suite, si l'on prolonge MR jusqu'à la rencontre V de DD′, il est facile d'en conclure que la droite FV est perpendiculaire à MF. On a, en effet,

$$\frac{\overline{\text{MR}}}{\text{MV}} = \frac{\overline{\text{MS}}}{\text{MP}} = \frac{k\overline{\text{MQ}}}{k\,\text{MF}} = \frac{\overline{\text{MQ}}}{\text{MF}},$$

ce qui prouve le parallélisme de QR et de FV. Donc finalement *la tangente passe au point de rencontre de la directrice avec la perpendiculaire menée au rayon vecteur par le foyer.*

3° *Conchoïde.* — Une courbe MM′ étant donnée (*fig.* 16) ainsi qu'un pôle O, on prolonge tous les rayons vecteurs $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, ... d'une quantité constante $l = \overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = \ldots$; le lieu des points D, E, F, ... ainsi obtenus est une autre courbe NN′, à laquelle on a donné le nom de *conchoïde.* On peut facilement mener la tangente en un point E de cette courbe, quand on sait déterminer celle de la courbe MM′ au point correspondant B. Imaginons, en effet, deux points parcourant simultanément les deux courbes, de manière à se trouver toujours sur le même rayon vecteur à une même époque. Quand le premier se trouve en B, par exemple, l'autre est en E. Appelons ensuite r le rayon vecteur $\overline{OB}$, θ son angle avec une droite fixe; r' le rayon vecteur $\overline{OE}$, égal à $l + r$.

Fig. 16.



La vitesse v du point B étant censée représentée par la longueur $\overline{BG}$ suivant la tangente en B, on peut la décomposer (n° 12) en une vitesse de circulation $r\dfrac{d\theta}{dt}$, représentée par la perpendiculaire $\overline{BH}$ à OB, et une vitesse de glissement $\overline{HG}$ parallèle à OB et égale à $\dfrac{dr}{dt}$. Au point E, on aura, suivant les deux mêmes directions, les composantes $\overline{EI}$ et $\overline{IK}$, respectivement égales à $r'\dfrac{d\theta}{dt}$ et à $\dfrac{dr'}{dt}$. Ces deux dernières sont dans des rapports connus avec BH et $\overline{HG}$, car on a

$$\frac{\overline{EI}}{\overline{BH}} = \frac{r'\dfrac{d\theta}{dt}}{r\dfrac{d\theta}{dt}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}, \quad \frac{\overline{IK}}{\overline{HG}} = \frac{\dfrac{dr'}{dt}}{\dfrac{dr}{dt}} = 1.$$

De là résulte la construction suivante : après avoir pris arbitrairement la longueur $\overline{BG}$ et tracé le triangle rectangle BHG, on joindra OH et l'on prolongera cette ligne jusqu'à la perpendiculaire élevée en E à OE. La longueur $\overline{EI}$ ainsi obtenue représente la vitesse de circulation de E, car elle est égale à $\overline{BH} \times \frac{\overline{OE}}{\overline{OB}}$. Puis on mène $\overline{IK}$ égale et parallèle à $\overline{HG}$, ce qui donne la vitesse de glissement de E. Par suite, le point K est l'extrémité de la vitesse résultante, ce qui fait connaître la tangente EK.

On arrive encore plus simplement au but par l'emploi de la sous-normale. Cette droite est égale au rapport entre la vitesse de glissement et la vitesse angulaire (nº 12); or ces deux quantités ont les mêmes valeurs pour les deux points B et E; donc la sous-normale y est la même. Si donc on trace la normale BL à la courbe MM', et qu'on détermine la sous-normale correspondante OL par la rencontre de BL avec une perpendiculaire à OB menée par le point O, la droite LE joignant l'extrémité L de cette sous-normale avec E sera normale en ce point à la courbe NN'.

4º *Spirale d'Archimède.* — L'équation polaire de la courbe étant

$$r = a\theta,$$

on en déduit

$$\frac{dr}{dt} = a\frac{d\theta}{dt};$$

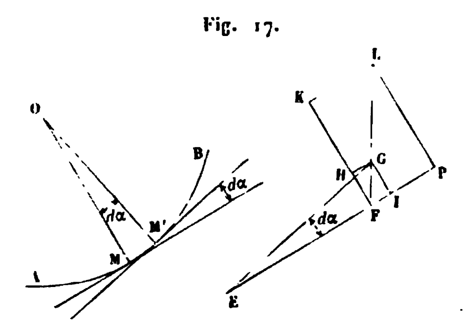
par suite, la sous-normale, dont la valeur est égale au rapport de $\frac{dr}{dt}$ à $\frac{d\theta}{dt}$, a une longueur constante a. Cette propriété donne le moyen de tracer facilement la normale et la tangente.

13. *Accélération totale.* — En étudiant le mouvement d'un point dans l'espace, nous n'avons jusqu'à présent considéré que ses coordonnées variables et sa vitesse; nous allons maintenant nous occuper de la manière dont la vitesse varie avec le temps, en grandeur et en direction.

Soient AB la trajectoire (*fig.* 17); M et M' les positions du point mobile aux époques infiniment rapprochées t et $t+dt$;

v et $v + dv$ les vitesses correspondantes. Menons par le point E, arbitrairement choisi, deux droites $\overline{EF}$ et $\overline{EG}$ qui représentent respectivement les vitesses v et $v + dv$, en grandeur, direction et sens. Ces deux droites font entre elles un angle infiniment petit $d\alpha$, égal à l'angle de contingence de la courbe AB, pour le parcours $\overline{MM'} = ds$. Le troisième côté $\overline{FG}$ du triangle

Fig. 17.



EFG se nomme *vitesse acquise élémentaire*. On peut, en effet, regarder $\overline{EG} = v + dv$ comme la résultante ou somme géométrique (n° 11) de $\overline{EF} = v$ et de $\overline{FG}$; à ce point de vue, $\overline{FG}$ est la différence géométrique entre les valeurs finale et initiale de la vitesse aux deux instants extrêmes de l'intervalle de temps dt, ce qui explique le nom de *vitesse acquise*.

La vitesse acquise élémentaire, divisée par dt, donne ce qu'on nomme l'*accélération totale*. D'après cette définition, l'accélération totale est l'accélération d'un mouvement rectiligne uniformément varié (n° 6), dans lequel la vitesse éprouverait une variation égale à $\overline{FG}$, pendant chaque élément de temps égal à dt. On attribue à cette accélération totale la direction et le sens de FG.

On peut déterminer l'accélération totale au moyen de ses projections sur des droites déterminées. A cet effet, construisons d'abord un rectangle FIGH ayant pour diagonale $\overline{FG}$ et ses côtés dans les directions de EF et de la perpendiculaire à cette droite; puis construisons un rectangle homothétique FPLK avec F pour centre d'homothétie, en amplifiant les dimensions dans le rapport $\frac{1}{dt}$. Alors la diagonale $\overline{FL} = \frac{\overline{FG}}{dt}$ re-

présente l'accélération totale en grandeur, direction et sens; $\overline{FP}$ et $\overline{FK}$ sont ses composantes, suivant la direction de la vitesse en M et suivant une perpendiculaire à cette vitesse. Cette seconde direction, parallèle à une normale en M, est nécessairement celle qui va de ce point au centre de courbure O, car elle est, dans le plan EFG, parallèle au plan osculateur, puisqu'il contient deux droites parallèles à deux tangentes consécutives; de plus, la figure montre que FH a le sens convenable.

Il faut maintenant calculer les grandeurs de ces composantes $\overline{FP}$ et $\overline{FK}$. Or on a

$$\overline{FI} = (v + dv)\cos d\alpha - v, \quad \overline{FH} = \overline{IG} = (v + dv)\sin d\alpha$$

ou simplement, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur au premier,

$$\overline{FI} = dv, \quad \overline{FH} = v\,d\alpha;$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$\overline{FP} = \frac{dv}{dt}, \quad \overline{FK} = v\frac{d\alpha}{dt}.$$

Si l'on nomme ρ le rayon de courbure de AB en M, on peut mettre $\frac{ds}{\rho}$ au lieu de $d\alpha$ dans l'expression de $\overline{FK}$, qui devient ainsi

$$\overline{FK} = \frac{v}{\rho}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}.$$

Donc finalement les deux composantes ont pour valeur $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$; en les considérant comme issues du point M auquel elles appartiennent, elles sont toutes deux, ainsi que leur résultante, contenues dans le plan osculateur de la trajectoire en ce point.

La première se nomme *accélération tangentielle;* elle se confond avec ce que nous avons appelé *accélération* dans l'étude du mouvement d'un point sur une trajectoire donnée. Dorénavant, pour éviter tout malentendu, nous conviendrons de réserver le mot d'*accélération* pour l'accélération totale, à moins qu'une épithète, comme celle de tangentielle par

exemple, n'avertisse du contraire. La quantité $\frac{dv}{dt}$ sera donc toujours nommée *accélération tangentielle,* même s'il s'agit d'un point en mouvement sur une courbe donnée. Dans le cas le plus général, cette composante jouit toujours des propriétés indiquées au n° 7; nous ajouterons seulement que si le mouvement a lieu en ligne droite, ρ devenant infini, la seconde composante s'annule et, par conséquent, l'accélération totale se réduit à l'accélération tangentielle.

La composante normale $\frac{v^2}{\rho}$, toujours dirigée, comme nous l'avons dit, vers le centre de courbure de la trajectoire, s'appelle, pour ce motif, *accélération centripète.* Dans le cas particulier du mouvement uniforme, cette composante subsiste seule, car l'invariabilité de la vitesse entraîne la nullité de $\frac{dv}{dt}$.

16. *Propriétés projectives de l'accélération totale.* — Imaginons qu'on projette la *fig.* 17 (p. 33), sur un plan ou sur une droite quelconques, la projection étant faite parallèlement à une droite dans le premier cas, et parallèlement à un plan directeur dans le second. Désignons les projections obtenues pour les divers points ou lignes par les mêmes lettres que dans l'espace, mais en employant les petites lettres italiques au lieu des majuscules ordinaires. Les longueurs $\overline{ef}$ et $\overline{eg}$ représentent, en grandeur, direction et sens, les vitesses du mouvement projeté (n° 13), aux époques t et $t + dt$; donc $\overline{fg}$ est la vitesse acquise élémentaire de ce même mouvement, dans le temps dt; par suite $\overline{fl}$, égal à $\frac{\overline{fg}}{dt}$ en vertu de la proportion

$$\frac{\overline{fg}}{\overline{fl}} = \frac{\overline{FG}}{\overline{FL}} = dt,$$

représente l'accélération totale du mouvement projeté. Donc enfin l'accélération totale du mouvement en projection coïncide, en grandeur, direction et sens avec la projection de l'accélération totale du mouvement dans l'espace.

On déduit de cette propriété un moyen de trouver l'accélération totale d'un point mobile M, quand on connaît, en fonc-

tion du temps, ses coordonnées x, y, z, relativement à un système d'axes concourants Ox, Oy, Oz.

Les longueurs x, y, z sont en effet les distances entre l'origine et les trois projections de M sur les axes, la projection sur chaque axe étant faite parallèlement au plan des deux autres; ces points projections ont pour vitesses respectives $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ (nº 12), et, puisqu'ils se meuvent en ligne droite, ils ont les accélérations totales correspondantes (nº 15)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right),$$

ou bien, si l'on prend le temps t pour variable indépendante,

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ce sont les projections de l'accélération totale J sur les trois axes coordonnés; comme, de plus, la projection sur chacun d'eux doit se faire parallèlement au plan des deux autres, et qu'alors une droite est la résultante de ses trois projections (nº 11), nous en concluons que J peut se trouver en prenant la diagonale du parallélépipède construit sur les trois composantes parallèles aux axes dont les expressions (1) donnent les valeurs.

Dans le cas particulier d'axes rectangulaires, on aurait, pour valeur de l'accélération totale,

$$J = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

et, pour celles de ses trois cosinus directeurs,

$$\frac{1}{J}\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{1}{J}\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{1}{J}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Remarque. — Lorsqu'on projette sur un plan le rectangle construit avec les deux composantes tangentielle et centripète (nº 15) de l'accélération totale J, on obtient généralement un parallélogramme.

La diagonale de ce parallélogramme, qui est la projection de

celle du rectangle, donne bien l'accélération totale j du mouvement en projection sur le plan; mais ses côtés, projections de $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$, ne peuvent pas être les composantes tangentielle et centripète de j, lorsque leur angle est différent de 90°, ce qui est le cas ordinaire.

17. *Application.* — Nous avons cherché (nº 14) les équations d'un mouvement circulaire uniforme, en projection sur deux axes rectangulaires Ox, Oy (*fig.* 12), et nous avons trouvé

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t,$$

les notations étant celles du nº 14. On déduit de là

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r\cos\omega t = -\omega^2 x,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 r\sin\omega t = -\omega^2 y;$$

par suite, l'accélération totale est

$$J = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \omega^2\sqrt{x^2+y^2} = \omega^2 r,$$

et sa direction est celle de M vers O. Ce résultat s'accorde avec la théorie du nº 15, car ici la vitesse v conserve une valeur constante ωr et l'on a $\rho = r$, d'où résulte

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r.$$

L'accélération totale se réduit à sa composante centripète $\omega^2 r$, comme nous venons de le trouver par un autre moyen.

Projetons encore orthogonalement le même mouvement circulaire sur un plan parallèle à Ox et faisant un angle λ avec celui du cercle. Les projections de Ox et de Oy seront deux droites $O'x'$, $O'y'$ encore perpendiculaires entre elles et passant par le point O' projection de O. Si nous les prenons pour axes de coordonnées, les coordonnées x', y' de la projection M' du point M seront

$$x' = x = r\cos\omega t, \quad y' = y\cos\lambda = r\cos\lambda\sin\omega t.$$

L'élimination du temps entre ces deux équations donne pour équation de la trajectoire parcourue par M'

$$\frac{x'^2}{r^2} + \frac{y'^2}{r^2 \cos^2 \lambda} = 1.$$

C'est, comme on le savait déjà, une ellipse ayant O' pour centre, $O'x'$ et $O'y'$ pour diamètres principaux, r et $r\cos\lambda$ pour demi-axes correspondants.

On a d'ailleurs

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\omega^2 r \cos\omega t, \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = -\omega^2 r \cos\lambda \sin\omega t$$

ou bien

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\omega^2 x', \quad \frac{d^2y'}{dt^2} = -\omega^2 y';$$

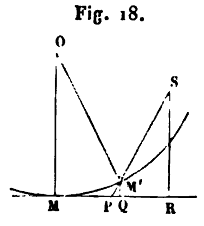
on en déduit l'accélération totale de M'

$$J' = \omega^2\sqrt{x'^2 + y'^2} = \omega^2 \overline{M'O'}.$$

Cette accélération totale est donc égale au produit du facteur constant ω^2 par le rayon vecteur $\overline{M'O'}$; et les valeurs de ses composantes montrent qu'elle est dirigée de M' vers O'. Ces résultats se démontreraient aussi en remarquant que l'accélération J' est la projection orthogonale de l'accélération $\omega^2\overline{MO}$ du mouvement circulaire.

18. *Autre définition de l'accélération totale.* — Soient M et M' (*fig.* 18) les positions du point mobile sur sa trajectoire MM', pour les temps t et $t + dt$. Si le point M s'était déplacé uniformément sur la tangente en M à la trajectoire, avec la vitesse v qu'il possède à l'époque t, il aurait parcouru dans le même temps dt une longueur $\overline{MP} = v\,dt$, et occuperait la position P au lieu de la position M'. La longueur $\overline{PM'}$ a été nommée *déviation*. Si nous la considérons comme un chemin rectiligne parcouru dans le temps dt, de P en M', par un point

Fig. 18.



mobile partant de P sans vitesse initiale et animé d'un mouvement uniformément varié, l'accélération J de ce point sera, par définition, l'accélération totale de M dans son mouvement réel, au temps t. La seconde formule (4) du n° 6 donne alors

$$\overline{PM'} = \frac{1}{2} J\,dt^2 \quad \text{ou} \quad J = \frac{2\,\overline{PM'}}{dt^2}.$$

Il reste à démontrer qu'une ligne portée suivant PM' et égale à $\frac{2\,\overline{PM'}}{dt^2}$ coïncide bien avec l'accélération totale, telle qu'elle a été définie plus haut (n° 15), car il n'est pas permis d'assigner deux valeurs différentes à une même quantité; à cet effet, nous allons chercher les deux projections $\overline{PQ}$ et $\overline{QM'}$ de $\overline{PM'}$ sur la tangente et sur la normale. Cette normale se trouve dans le plan osculateur de la trajectoire et a par conséquent la direction du rayon de courbure MO, car le plan MM'P, qui la renferme, passe par la tangente MP et par un point infiniment voisin.

Soit σ l'arc infiniment petit parcouru à partir de M sur la trajectoire dans un temps θ quelconque du même ordre que l'arc σ. Les deux premières dérivées de σ par rapport à θ sont, pour $\theta = 0$, la vitesse v en M et l'accélération tangentielle $\frac{dv}{dt}$; on aura donc, par la formule de Maclaurin,

$$\sigma = v\theta + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}\theta^2,$$

aux infiniment petits du troisième ordre près, pourvu que v et $\frac{dv}{dt}$ restent finies et continues dans les environs de M, ce que nous admettrons comme donnée relative à la nature du mouvement. Faisant dans cette équation $\theta = dt$, on en tire

$$\overline{MM'} = v\,dt + \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}dt^2,$$

et cette même expression donne aussi la valeur de $\overline{MQ}$ avec le même ordre d'approximation, car $\overline{MM'}$ ne diffère de sa projection sur la tangente en M que par des infiniment petits du

troisième ordre au moins. Donc

$$\overline{PQ} = \overline{MQ} - v\,dt = \frac{1}{2}\frac{dv}{dt}dt^2,$$

ce qui donne l'une des deux projections de $\overline{PM'}$. L'autre projection $\overline{QM'}$ se trouve par une formule d'Analyse bien connue; on a

$$\overline{QM'} = \frac{\overline{MM'}^2}{2\rho},$$

ρ désignant, comme au n° 15, le rayon de courbure MO de la trajectoire. De là résulte, en mettant pour $\overline{MM'}$ sa valeur et négligeant toujours les termes d'ordre supérieur au second,

$$\overline{QM'} = \frac{1}{2}\frac{v^2}{\rho}dt^2.$$

Prenons maintenant $\overline{PR} = \frac{2\overline{PQ}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$ et achevons la construction du triangle rectangle PRS, semblable à PQM', en menant RS parallèle à QM' et à MO jusqu'à la rencontre de PM' prolongé. La similitude des deux triangles donne

$$\overline{RS} = \frac{2\overline{QM'}}{dt^2} = \frac{v^2}{\rho}, \quad \overline{PS} = \frac{2\overline{PM'}}{dt^2}.$$

Par conséquent, on voit que la déviation $\overline{PM'}$, amplifiée dans le rapport $\frac{2}{dt^2}$, donne une droite PS contenue dans le plan osculateur, ayant pour composantes $\frac{dv}{dt}$ suivant la tangente, et $\frac{v^2}{\rho}$ suivant le rayon de courbure; donc enfin cette droite coïncide bien avec l'accélération totale définie au n° 15, en grandeur, direction et sens.

§ II. — Mouvement d'un solide invariable.

19. *Définition et observation générale.* — Un solide invariable est un ensemble de points dont les distances n'éprouvent jamais aucun changement. Les solides invariables n'existent

pas rigoureusement dans la nature, mais il y a des corps qui en approchent beaucoup; on peut d'ailleurs les concevoir à titre de fiction géométrique et rechercher les lois de leurs déplacements. Afin de simplifier le langage, nous supprimerons ordinairement l'épithète d'*invariable*, mais elle sera toujours sous-entendue.

Pour définir le mouvement d'un solide, il suffit qu'on donne celui de trois de ses points non en ligne droite; en effet, un autre point quelconque peut être considéré comme le sommet d'un tétraèdre de figure et de dimensions constantes, dont le triangle des trois points donnés serait la base, et, dès qu'on aura la position de la base, on aura par là même celle du sommet.

Cela posé, nous allons étudier le mouvement des solides, en commençant par des cas particuliers simples, pour arriver successivement au cas le plus général.

20. *Mouvement de translation.* — On appelle *translation* un mouvement tel que tous les points décrivent à chaque instant, dans le même temps infiniment petit dt, un élément ds de trajectoire qui soit le même pour tous, en grandeur, direction et sens. Toutes les trajectoires sont des courbes égales et parallèles; toutes les vitesses à une même époque ont la valeur unique $\frac{ds}{dt}$, et toutes ont la direction et le sens de l'élément ds parcouru par un quelconque des points. Enfin toute droite tracée dans le solide et participant à son mouvement se déplace parallèlement à elle-même, car, les déplacements de ses deux extrémités étant égaux et parallèles, deux positions consécutives de cette droite forment toujours un parallélogramme.

Il est presque inutile de prouver qu'un solide peut prendre un mouvement de ce genre; voici cependant comment on y arriverait au besoin. Considérons une première position du solide et nommons x, y, z les coordonnées d'un point A quelconque de ce solide relativement aux axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig.* 19). Si nous prenons un système d'axes parallèles $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ et si, dans ce nouveau système, nous déterminons un point A' par des coordonnées x', y', z' égales

à x, y, z, il est évident qu'après avoir opéré de même pour tous les points nous aurons construit un système superposable à celui des points A, auquel on pourrait passer en déplaçant celui-ci. Or, dans ce mouvement, tout point se déplacera d'une longueur égale et parallèle à $\overline{OO'}$; il résulte en effet de l'égalité de x', y', z' avec x, y, z, que $\overline{O'A'}$ est égal et parallèle à $\overline{OA}$, et que par suite la figure OAA'O' est un parallélogramme. En opérant de la même manière pour une série d'origines infiniment voisines, prises de manière à former une courbe continue OO'O'', ..., on aura obtenu le mouvement de translation tel que nous l'avons défini.

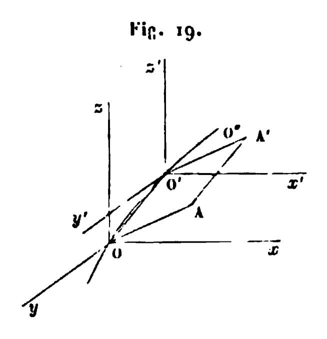


Fig. 19.

21. *Mouvement de rotation autour d'un axe fixe.* — Lorsqu'on fixe deux points A et B d'un solide, tous les autres points situés sur la même droite deviennent nécessairement fixes; mais un plan quelconque passant par cette droite n'est pas déterminé en position. La figure suivant laquelle il coupe le solide peut donc prendre une infinité de positions différentes en entraînant avec elle l'ensemble des autres points, et l'on dit alors que le système a un mouvement de rotation autour d'un axe fixe AB.

Fig. 20.

Considérons un point quelconque C (*fig.* 20), en dehors de l'axe AB, et abaissons la perpendiculaire CD de ce point sur l'axe. Pendant que le solide se déplace et que le point C décrit la trajectoire CC', la longueur $\overline{CD}$ et l'angle CDA ne peuvent varier, puisque le corps est supposé rigoureusement solide. Le rayon CD engendre par conséquent un plan perpendiculaire à l'axe, et dans ce plan le point C décrit un cercle. Toutes les trajectoires sont donc des cercles contenus dans des plans perpendiculaires à l'axe.

Si l'on suppose maintenant un autre point F décrivant l'arc circulaire FF′ autour du centre G, pendant que C décrit l'arc CC′, il est facile de reconnaître que ces arcs décrits dans le même temps répondent à un même angle au centre, c'est-à-dire que les plans CAB, FAB ont tourné simultanément du même angle. Soient en effet Df et Df' les intersections du plan CC′D avec les plans FAB, F′AB; l'angle de ces deux plans sera égal à fDf' ou à FGF′ et il s'agit de démontrer qu'il l'est aussi à CDC′. Or l'hypothèse de l'invariabilité du système exige qu'on ait $CDf = C'Df'$, puisque ces deux angles sont deux positions différentes d'une même figure tracée dans le solide; en ajoutant aux deux membres de cette égalité un même angle fDC', on aura

$$CDC' = fDf',$$

ce qu'il fallait établir.

Appelons α l'angle décrit, à une certaine époque t, par un quelconque des plans passant par l'axe, à partir d'une position déterminée; dans les calculs que nous aurons à faire ultérieurement sur les mouvements de rotation, cet angle sera toujours, sauf indication contraire, censé exprimé en arc pris sur le cercle de rayon 1. Un point situé à la distance r de l'axe aura décrit, à la même époque, un arc ayant pour longueur

$$s = r\alpha,$$

et sa vitesse sera

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\alpha}{dt}.$$

La vitesse a toujours une direction perpendiculaire à l'axe et au rayon r (ou au plan de ces deux lignes), comme l'arc auquel elle est tangente; la dernière égalité fait voir en outre que les vitesses des divers points à une même époque sont proportionnelles aux distances de ces points à l'axe, le facteur $\frac{d\alpha}{dt}$ restant le même pour tous les points. Ce facteur, égal à la vitesse d'un point situé à l'unité de distance, exprime l'augmentation qu'éprouverait l'angle α dans l'unité de temps, si dans chaque élément égal à dt, après l'époque t, il y avait une même augmentation $d\alpha$. Par analogie avec la définition,

donnée au n° 3, de la vitesse d'un point, on nomme $\frac{d\alpha}{dt}$ *vitesse angulaire* du solide.

Quand l'axe s'éloigne à l'infini, les dimensions d'un corps fini disparaissent en comparaison des rayons r, qui peuvent alors être considérés comme égaux et parallèles. Il en est par conséquent de même pour les vitesses simultanées de tous les points, de sorte que le mouvement tend à se changer en une translation perpendiculaire à l'axe. Il est nécessaire d'ailleurs de supposer que la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ décroît indéfiniment à mesure que l'axe s'éloigne, sans quoi les vitesses des points sur leurs trajectoires tendraient vers l'infini en même temps que leurs distances à l'axe.

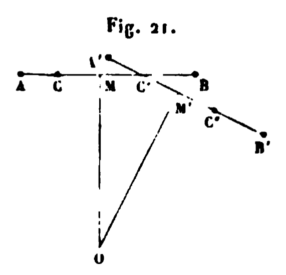
22. *Mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe, ou d'une figure plane dans son plan.* — On dit qu'un solide a un mouvement parallèle à un plan fixe, quand les trajectoires de tous les points se trouvent contenues dans des plans parallèles. Le mouvement de rotation autour d'un axe fixe en fournit un exemple; on en aurait un second en prenant une translation dans laquelle un point décrirait une courbe plane quelconque. Mais ce sont là seulement des cas particuliers.

Quand un solide se meut parallèlement à un plan fixe, on peut à chaque instant retrouver sa position si l'on connaît celle de sa projection sur ce plan; les lignes projetantes restent en effet invariables et il suffit d'imaginer que chacune d'elles est entraînée, sans changer de direction, avec le point correspondant de la projection. L'ensemble de cette projection forme une figure plane invariable mobile dans son plan, et nous sommes ramenés à étudier le mouvement de cette figure. Nous allons en établir successivement quelques propriétés.

(a) *Déplacement fini.* — Supposons d'abord un déplacement fini quelconque dans lequel une droite quelconque AB de la figure vient de AB en A'B' (*fig.* 21). Je dis qu'il est possible d'amener cette droite de sa première position AB à sa dernière A'B' (sans avoir égard aux positions intermédiaires) par une rotation autour d'un certain point du plan. Soient en effet C'

le point de rencontre des deux droites et C le point de AB qui est venu se placer au point C′ de A′B′; le point C′ considéré comme appartenant à AB sera venu prendre sur A′B′ une position finale C″, telle que $\overline{CC'} = \overline{C'C''}$, puisque C′C″ est la position finale de la partie CC′ de AB. Élevons maintenant des perpendiculaires au milieu des droites CC′ et C′C″; elles se couperont en O, centre du cercle circonscrit au triangle isoscèle CC′C″. Il est clair que, si l'on fait tourner autour de O la droite AB, d'un angle MOM′ égal à l'angle des deux perpendiculaires ou des deux droites elles-mêmes, la droite OM viendra en OM′ et CC′ en C′C″; tous les points de AB auront pris leur position finale, et par conséquent aussi ceux de la figure plane dont AB fait partie et qu'on peut concevoir entraînés par le mouvement de cette droite. Donc, en résumé, on peut toujours amener une figure plane d'une position à une autre dans le même plan, en la faisant tourner autour d'un certain point du plan, pris pour centre fixe. Et si le solide dont cette figure est la projection la suit dans son mouvement, il tournera autour d'un axe mené par ce centre, perpendiculairement au plan.

Fig. 21.



On laisse de côté le cas où A′B′ ne rencontrerait pas AB. La figure ABA′B′ serait alors un parallélogramme, comme ayant deux côtés opposés $\overline{AB}$, $\overline{A'B'}$ égaux et parallèles. Les déplacements $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ seraient donc égaux et parallèles; un raisonnement semblable établirait leur égalité avec celui d'un point quelconque pris sur la droite, et celui d'un point quelconque de la figure entraînée par elle. On tomberait alors dans l'hypothèse particulière d'une translation, et l'on pourrait considérer celle-ci comme due à l'éloignement indéfini du point O (nº 21).

(*b*) *Déplacement infiniment petit; centre instantané de rotation.* — Une figure plane (F) ne peut pas passer à une position différente (F′) sans passer par une série de positions intermédiaires se succédant d'une manière continue, de telle sorte que chaque point décrive une certaine trajectoire. Quand

on effectue le passage de (F) à (F') par une rotation autour d'un centre O, tous les points décrivent des arcs de cercle ayant les points de départ et d'arrivée communs avec les arcs de trajectoire qu'ils remplacent, mais pouvant d'ailleurs s'en écarter plus ou moins dans l'intervalle si le déplacement est fini. Prenons au contraire le déplacement total infiniment petit, en supposant (F') indéfiniment rapprochée de (F) et faisant décrire à un point quelconque un seul élément ds de la courbe parcourue par lui; alors les arcs de cercle substitués aux éléments ds en vertu de la rotation autour du centre O_1, limite de O pour un déplacement nul, auront encore les mêmes points extrêmes et par conséquent ils coïncideront avec eux en longueur, direction et sens. La même chose aurait lieu pour tous les points d'un solide projeté sur (F) pendant la rotation autour de l'axe projeté sur O_1. Donc :

Les arcs élémentaires décrits simultanément par tous les points d'une figure plane mobile dans son plan, ou d'un solide mobile parallèlement à ce plan, peuvent s'obtenir, en grandeur, direction et sens, au moyen d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan.

D'un autre côté, on sait que la vitesse d'un point quelconque décrivant pendant le temps dt un élément ds de sa trajectoire n'est autre chose que ds amplifié dans le rapport $\frac{1}{dt}$. Donc aussi :

Les vitesses des divers points de la figure plane ou du solide sont identiques à celles qui auraient lieu, si la rotation ci-dessus indiquée se produisait effectivement pendant le temps dt.

Le centre O_1 dont on vient de parler ne demeure pas, en général, immobile pendant que la figure (F) se déplace; il faudrait pour cela que toutes les trajectoires fussent des cercles concentriques. Si cela n'a pas lieu, le centre O_1 variera de position avec le temps, et chaque point O_1 ne se rapportera qu'à une position de (F). Pour cette raison on a donné à ce point le nom de *centre instantané de rotation*. L'axe passant par ce point et perpendiculaire au plan (F) se nomme de même *axe instantané de rotation*.

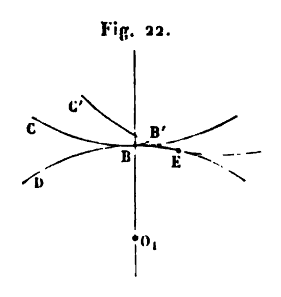
(*c*) *Propriétés géométriques du centre instantané de rotation.* — Le point A étant amené en A′ par une rotation autour de O, le rayon OA est normal à l'arc décrit dans la rotation. Or cet arc devient tangent en A avec la trajectoire réelle quand le déplacement décroît indéfiniment et que O arrive à sa position limite O_1; donc :

Les normales aux trajectoires, menées en tous les points dont l'ensemble forme une des positions de la figure mobile, concourent toutes au centre instantané de rotation.

Si dans une position de la figure on connaît la direction dans laquelle un de ses points doit commencer à se déplacer, en menant par ce point une droite perpendiculaire à la direction qu'il va suivre, on aura une ligne passant au centre instantané. On pourra déterminer ce centre par la rencontre de deux lignes analogues, lorsque les trajectoires de deux points seront données *a priori* et qu'on saura leur mener des normales.

Voici encore une remarque susceptible de conduire à la connaissance du centre instantané de rotation. Supposons une courbe C (*fig.* 22), faisant partie de la figure mobile et devant toujours rester tangente à une courbe fixe D, son enveloppe. Le contact a lieu actuellement en B; puis il passe au point E quand la courbe C a pris une seconde position infiniment voisine de la première. Dans ce mouvement, le point B de la courbe C est venu se placer quelque part sur la nouvelle position C′ de cette courbe à une distance infiniment petite de E, en B′ par exemple. Puisque les courbes C′ et D sont tangentes en E, le point B′ est à une distance infiniment petite du second ordre de la tangente en E et aussi de la tangente en B, menée par un point infiniment voisin de E. Il résulte de là que le déplacement $\overline{BB'}$ se fait dans la direction de la tangente en B, s'il est du premier ordre; le centre instantané de rotation correspondant se trouve alors sur la normale BO_1 commune aux deux courbes C et D. Si $\overline{BB'}$ était du second ordre, on pourrait

Fig. 22.



regarder le point B comme ayant un déplacement nul en comparaison de celui des autres points; B serait alors le centre instantané. Donc, dans un cas comme dans l'autre :

Si une courbe fait partie de la figure mobile et qu'on lui mène une normale au point où elle touche son enveloppe, cette normale passe par le centre instantané actuel de rotation, répondant à la position considérée de la courbe dont il s'agit.

Le cas où le point de contact B n'a qu'un déplacement infiniment petit du second ordre se présente quand la courbe C roule sur la courbe D, conformément à la définition donnée en Géométrie. En effet, les arcs $\overline{BE}$ et $\overline{B'E}$ sont alors égaux et il en est de même de leurs cordes, dont ils ne diffèrent que par les infiniment petits du troisième ordre; par suite, le triangle rectiligne BB'E devient isoscèle, et l'on a

$$\overline{BB'} = 2\,\overline{BE}\sin\frac{1}{2}BEB',$$

quantité du second ordre.

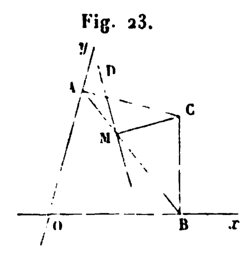
De là résulte ce théorème :

Dans le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe, le point de contact est toujours centre instantané de rotation.

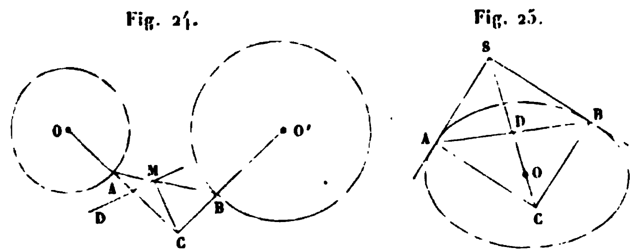
Les propriétés qu'on vient d'exposer fournissent souvent un moyen commode pour mener des tangentes ou des normales à certaines courbes, dont la génération est définie par le mouvement d'une figure plane dans son plan. En voici quelques exemples :

1° L'ellipse peut être engendrée par un point M d'une droite AB, de longueur constante (*fig.* 23), qui se meut en s'appuyant toujours sur deux droites fixes Ox, Oy. Puisque les points A et B parcourent les droites Ox et Oy, les perpendiculaires AC et BC à ces droites donnent par leur rencontre le centre instantané C; donc CM est normale en M à l'ellipse sur laquelle ce point se déplace, et la perpendiculaire MD est la tangente.

Fig. 23.



2° Remplaçons les droites Ox et Oy par deux cercles, sur lesquels on fait toujours glisser les extrémités A et B d'une droite AB, de longueur constante (*fig.* 24). Un point M de cette droite engendre alors une courbe, dite *courbe à longue inflexion* ou *courbe de Watt*, dont nous aurons à reparler plus loin, et à laquelle on mène bien facilement une tangente, quoique son équation soit passablement compliquée. Il suffit, en effet, de tracer les rayons OA et O'B; leur rencontre a lieu au centre instantané C. Joignant alors CM et menant la perpendiculaire MD à cette ligne, on a la normale et la tangente en M.



3° Considérons un angle droit ASB (*fig.* 25) dont les deux côtés se meuvent en touchant toujours une ellipse. Les normales aux points de contact A et B se rencontrent en C, centre instantané de rotation de l'angle ASB; donc CS est normale en S à la courbe décrite par le sommet de l'angle. On peut remarquer que CS, diagonale du rectangle SACB, coupe l'autre diagonale AB en son milieu D; donc SC passe par le centre O de l'ellipse, puisque cette droite joint le sommet d'un angle circonscrit avec le milieu de la corde de contact. Toutes les normales au lieu des points S concourent donc en O, et par conséquent ce lieu est un cercle ayant pour centre le point O, centre de l'ellipse. Le rayon du cercle se trouve ensuite facilement, en supposant que les points de contact sont deux sommets de l'ellipse; on voit ainsi qu'il est égal à la demi-diagonale du rectangle circonscrit, ayant ses côtés parallèles aux axes.

4° Si l'on regarde la conchoïde comme engendrée par le point E d'une droite BE (*fig.* 16, p. 31), assujettie à passer par le point fixe O, pendant qu'un de ses points (le point B) dé-

crit la courbe MM′, on voit d'abord que la normale BL à MM′ passe par le centre instantané de rotation de la droite BE. Ensuite, comme le point O peut se remplacer par un cercle de rayon infiniment petit, auquel BE devrait rester tangente, la normale OL, commune à BE et à son enveloppe, passe aussi par le centre instantané, qui est par conséquent le point de rencontre de ces deux normales. Donc LE est la normale en L à la conchoïde, ce qu'on a déjà reconnu d'une autre manière (nº 14).

Remarque. — Les arcs de cercle décrits en vertu d'une rotation infiniment petite autour d'un centre instantané remplacent les arcs élémentaires *ds* des trajectoires réelles, sous le rapport de la longueur, de la direction et du sens, comme on l'a dit. Mais, en général, ils ne sont pas osculateurs aux trajectoires, parce qu'ils ont été déterminés de manière à avoir seulement deux points communs avec chacune d'elles. Le centre instantané ne coïncide que par exception avec le centre de courbure d'une trajectoire. Ainsi, dans la *fig.* 23, les points A et B parcourent des droites dont les centres de courbure sont à l'infini, pendant que le centre instantané de rotation se trouve en C; dans la *fig.* 24, le centre instantané C est de même distinct des centres de courbure O et O′ relatifs aux trajectoires des points A et B.

23. *Mouvement continu d'une figure plane dans son plan.* — Quand le mouvement continu d'une figure plane dans son plan n'est pas une translation, ni une rotation autour d'un axe fixe, il existe à chaque instant un centre instantané de rotation O, dont le lieu géométrique forme une courbe continue OO′O″... (*fig.* 26) dans le plan fixe où se déplace la figure mobile. Il y a aussi, dans cette figure, une série de points qui lui appartiennent et qui viennent successivement se placer sur les centres instantanés O, O′, O″, ...; ces points forment une autre courbe CC′C″... fixe par rapport à la figure mobile, et qui sera entraînée dans son mouvement. Ces deux courbes ont à chaque instant un point commun, qui est la position du centre de rotation à l'instant considéré; à une certaine

Fig. 26.

époque, c'est le point C de la figure et le point O du plan qui coïncident et sont la position présente du centre instantané de rotation; un peu plus tard, ce sera C′ et O′, puis C″ et O″, et ainsi de suite. De plus, les courbes sont tangentes en leur point commun, et ce point se déplace de quantités égales sur les deux courbes. En effet, le point C′, supposé infiniment près du centre O ou C, est amené en O′ en décrivant autour de ce centre un angle infiniment petit, et par conséquent le déplacement $\overline{C'O'}$ est infiniment petit du second ordre. Or, dans le triangle rectiligne OO′C′, on a

$$\overline{C'O'} > (\overline{OO'} - \overline{CC'}) \text{ en valeur absolue;}$$

donc, puisque les arcs ne diffèrent des cordes que par des quantités du troisième ordre, la différence entre l'arc $\overline{OO'}$ et l'arc $\overline{CC'}$ est au plus du deuxième ordre. Cela montre l'égalité entre les déplacements du point commun sur les deux courbes. Quant au fait du contact, il est aussi une conséquence de l'ordre de grandeur de $\overline{C'O'}$, car l'angle en O du triangle isoscèle OO′C′ satisfait à l'égalité

$$\sin\frac{1}{2}O'OC' = \frac{1}{2}\frac{\overline{C'O'}}{\overline{OO'}};$$

il en résulte que les deux directions CC′ et OO′ tendent vers une même limite quand les longueurs $\overline{OO'}$, $\overline{CC'}$ décroissent indéfiniment, puisque le sinus de la moitié de leur angle tend vers zéro, et par conséquent les tangentes en O ou C aux deux courbes se confondent.

On conclut de là que :

Le mouvement continu d'une figure plane dans son plan peut toujours être regardé comme dû au roulement d'une courbe solidaire avec la figure sur une courbe fixe. Cette dernière est le lieu des centres instantanés de rotation dans le plan fixe; la courbe roulante est le lieu des centres instantanés de rotation dans la figure mobile.

Le mouvement continu d'une figure plane dans son plan est donc toujours un mouvement épicycloïdal.

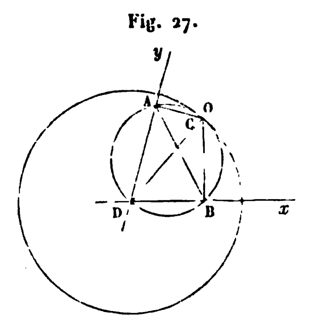
Si l'on suppose que la figure plane dont il s'agit entraîne

dans son mouvement un solide quelconque invariablement lié avec elle, il est bien évident que, dans ce mouvement, les cylindres dont OO′O″... et CC′C″... sont les sections droites rouleront l'un sur l'autre. On a dans ce roulement d'un cylindre mobile lié au solide sur un cylindre fixe l'image du mouvement continu du solide parallèlement à un plan; le mouvement élémentaire serait à chaque instant une rotation autour de la génératrice de contact.

Voici un exemple de la détermination des courbes dont on vient de parler.

Supposons que la figure mobile consiste en une droite de longueur constante $\overline{AB}$ dont les extrémités A et B sont assujetties à glisser sur deux droites fixes Dy, Dx (*fig.* 27). Pour la position que représente le dessin, le centre instantané de rotation se trouve à la rencontre O ou C des deux perpendiculaires BO, AO, menées à Dx et Dy par les extrémités de la droite. L'angle en C étant constant et égal au supplément de yDx, le cercle circonscrit au triangle ACB est de rayon déterminé; il passe par D, et DC en est un diamètre, puisque les angles DAC, DBC sont droits. En ramenant la figure mobile AB d'une autre position quelconque à la position dessinée, le centre instantané resterait toujours sur ce cercle, à cause de l'invariabilité de l'angle des deux droites qui, dans cette autre position, auraient remplacé BC et AC; donc le cercle décrit sur DO comme diamètre est ici le lieu des centres instantanés de rotation dans la figure mobile. Pour le lieu des centres instantanés dans le plan fixe, il suffit de remarquer que $\overline{DO} = \overline{DC}$ reste constant comme diamètre du cercle DACB; le centre instantané dans le plan fixe conserve donc toujours la même distance au point D et décrit par conséquent un cercle ayant ce point D pour centre, avec un rayon double du précédent.

Fig. 27.



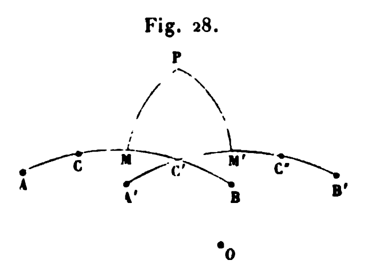
Le mouvement continu de la droite s'obtiendra donc en faisant rouler intérieurement un certain cercle sur un cercle

fixe de rayon double. On démontre en Géométrie que, dans ce roulement, tout point pris sur la circonférence mobile engendre un diamètre du cercle fixe; les points A et B décrivent donc bien les diamètres Dy, Dx, ce qui concorde avec le résultat auquel nous arrivons.

24. *Mouvement d'un solide autour d'un point fixe ou d'une figure sphérique sur la sphère.* — Lorsqu'un solide se meut autour d'un point fixe O, on peut imaginer qu'il est suivi dans son mouvement par les rayons, de longueur invariable, joignant chacun de ses points au point fixe; si l'on coupe ensuite ces rayons par une sphère ayant le point O pour centre, sur laquelle ils dessineront la perspective du solide, il est bien évident que leur position et, par suite, celle du solide seront immédiatement connues dès qu'on connaîtra celle de cette perspective. On se trouve donc ici ramené à étudier le mouvement d'une figure sphérique sur la sphère, de même que, dans le cas du mouvement d'un solide parallèlement à un plan, on avait réduit la question à celle du mouvement d'une figure plane dans son plan.

Soit donc une figure sphérique (F) se déplaçant sur la sphère et, dans cette figure, un arc de grand cercle AB (*fig.* 28); il suffit de produire le déplacement de AB pour entraîner simultanément celui de toute la figure (F) qui fait corps avec AB. Or je dis d'abord qu'on peut amener AB à une autre de ses positions A′B′ (sans avoir égard aux positions intermédiaires) par une simple rotation autour d'un certain pôle P convenablement choisi sur la sphère ou, ce qui revient au même, autour du rayon OP joignant P au point fixe O, centre de la sphère. Il y a en effet un point C de AB qui, après le déplacement, se trouvera placé en C′, à la rencontre des deux arcs AB, A′B′; de même, le point C′ de AB viendra en C″ sur A′B′, et l'on aura nécessairement CC′ = C′C″, puisque CC′ et C′C″ sont deux positions d'un même arc. Élevant ensuite les arcs de

Fig. 28.



grand cercle perpendiculaires aux milieux M et M′ de CC′ et de C′C″, on déterminera par leur rencontre le point P, tel que PM = PM′; si l'on fait tourner, autour de P comme pôle ou de OP comme axe, la figure PMAB, il est clair qu'on amènera PM à coïncider avec PM′, que, par suite, CC′ couvrira C′C″, et qu'enfin, AB ayant pris la position A′B′, la figure (F) sera venue aussi coïncider avec sa position finale (F′).

Tout ce qu'on vient de dire s'applique aussi bien dans le cas d'un déplacement fini que dans celui d'un déplacement infiniment petit. Mais, dans le premier, les divers points de la figure (F) ou du solide qu'elle entraîne décrivent autour de OP des arcs de cercle ayant pour rayons les distances de ces points à OP, et, en général, ces arcs, n'ayant que les deux extrémités communes avec les trajectoires réelles qu'ils ont remplacées, pourront s'en écarter plus ou moins dans l'intervalle. Dans le second, au contraire, les arcs circulaires, ayant toujours leurs deux extrémités communes avec les arcs élémentaires ds des trajectoires, leur sont identiques en grandeur, direction et sens; toutefois ils ne sont pas en général osculateurs, car il faudrait pour cela trois points communs au lieu de deux.

La limite vers laquelle tend OP quand l'écart entre (F) et (F′) décroît indéfiniment se nomme *axe instantané de rotation*. Les explications précédentes permettent alors d'énoncer ce théorème:

Le déplacement élémentaire d'une figure sphérique sur sa sphère (ou d'un solide autour d'un point fixe) revient à une rotation autour d'un certain axe instantané passant par le centre de la sphère (ou par le point fixe).

La même rotation, si elle est supposée effectuée dans le même temps dt que le déplacement élémentaire du solide, donnera aussi les vitesses de tous les points, puisque la vitesse d'un point n'est autre chose que son déplacement élémentaire amplifié dans le rapport $\frac{1}{dt}$.

Lorsqu'un point tourne autour d'un axe, le plan normal à son déplacement élémentaire contient nécessairement cet axe. Donc, en vertu du théorème précédent:

Tous les plans normaux aux déplacements élémentaires,

simultanément effectués par les divers points d'un solide qui a un point fixe, se coupent suivant une même droite issue de ce point.

L'intersection de deux quelconques de ces plans normaux donne par conséquent la droite en question, c'est-à-dire l'axe instantané.

On peut aussi donner une image géométrique du mouvement continu du solide. Imaginons, d'une part, le lieu des axes instantanés de rotation dans l'espace et, d'autre part, le lieu des droites du solide qui viennent successivement coïncider avec l'axe instantané de rotation, ces droites étant toutes prises dans une même position du système mobile; les lieux dont il s'agit seront deux cônes ayant pour sommet commun le point fixe. En considérant les courbes d'intersection de ces cônes par une sphère de rayon quelconque, la répétition exacte des mêmes raisonnements qu'on a présentés au n° 23 dans le cas des figures planes ferait reconnaître que ces courbes sont tangentes au point situé sur l'axe instantané actuel et qu'elles roulent l'une sur l'autre. On en dira donc autant des deux cônes; ils sont toujours tangents le long d'une génératrice commune, position actuelle de l'axe instantané de rotation, et le second cône, entraîné avec le solide, roule sur le premier, qui est fixe; les secteurs élémentaires, formés par deux génératrices infiniment voisines sur le premier cône, viennent en effet s'appliquer sur des secteurs égaux formés par les génératrices du second.

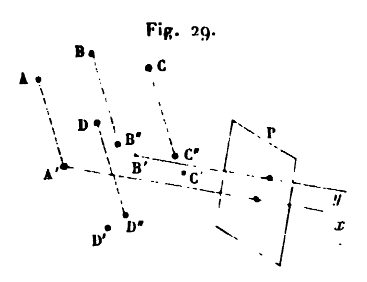
Il est prouvé par là que tout mouvement d'un solide autour d'un point fixe est un mouvement épicycloïdal sphérique.

25. *Mouvement le plus général d'un solide.* — Pour étudier le mouvement le plus général d'un solide, nous allons d'abord, comme dans les cas particuliers précédents, considérer un déplacement d'étendue quelconque. Il s'agit simplement de faire passer le solide d'une position initiale à une position finale, sans s'inquiéter des positions intermédiaires. Il est possible d'y arriver par la combinaison de deux mouvements précédemment étudiés, savoir : une translation rectiligne suivie d'une rotation autour d'un axe.

Soit, en effet, un solide formé d'un ensemble quelconque

de points A, B, C, D, ... (*fig.* 29), qu'on veut amener à la position A'B'C'D' .... On pourra d'abord donner à tous les points une translation rectiligne égale à la droite qui joint les positions initiale et finale de l'un d'eux, par exemple la translation $\overline{AA'}$, qui amènera le point A à sa position finale A' et l'ensemble du système à une position A'B''C''D''.... Il reste encore à passer de cette dernière position à A'B'C'D'... ; et, comme le point A' peut rester fixe dans le passage, il est possible de l'effectuer par une rotation autour d'un axe A'x issu de A' (n° 24). Le passage du solide de la première à la dernière position peut donc bien s'obtenir, comme nous l'avons dit, par une translation rectiligne suivie d'une rotation autour d'un axe.

Fig. 29.



Il y a même une infinité de combinaisons de deux mouvements du même genre qui conduisent au même résultat final. Au lieu de choisir le point A, nous aurions pu prendre B ou C, ou tout autre point faisant partie du solide ou invariablement lié avec lui; dans tous les cas la translation aurait été la ligne droite joignant les positions extrêmes du point choisi, et l'axe de la rotation aurait passé par la seconde position du même point. Toutefois trois choses restent constantes dans ces deux mouvements simples par lesquels on produit un déplacement total donné.

1° La direction de l'axe de rotation ne change pas. Supposons, en effet, qu'on substitue aux deux mouvements d'abord employés pour amener ABCD... en A'B'C'D'... une translation $\overline{BB'}$ suivie d'une rotation autour d'un axe B'y. Considérons un plan P perpendiculaire à Ax et invariablement lié au solide ABCD...; la translation $\overline{AA'}$ et la rotation autour de Ax ne changeront pas la direction de ce plan, qui devra finalement prendre une position P' parallèle à P. Quand on emploie les deux mouvements substitués à ceux-là, il faut toujours arriver à la même position finale du système et, par conséquent, remplir la condition de ne pas altérer la direction de P. Or cette direction est conservée après la translation $\overline{BB'}$, mais

elle serait changée par la rotation autour de $B'y$ si cette ligne était oblique au plan P; donc cette obliquité est impossible et alors les axes $A'y$, $B'x$ sont parallèles, comme perpendiculaires à un même plan.

2° La translation projetée sur l'axe de la rotation conserve la même valeur. En effet, après que le point B a été amené en B'' par la translation $\overline{AA'} = \overline{BB''}$, il passe en B' par une rotation autour de $A'x$, qui lui fait décrire un arc de cercle contenu, ainsi que sa corde $\overline{B''B'}$, dans un plan perpendiculaire à l'axe. Donc la projection de $\overline{BB''}$ ou $\overline{AA'}$ sur l'axe est la même que celle de $\overline{BB'}$, puisque celle de $\overline{B''B'}$ est nulle. Donc les déplacements de deux points quelconques ont une même projection sur l'axe, et le même énoncé s'applique à toutes les translations possibles à employer, car elles sont identiques aux déplacements des points qui font partie du système ou lui sont invariablement liés.

3° L'angle de la rotation conserve toujours la même valeur. Pour le prouver, considérons une droite contenue dans le plan P. La translation aura pour effet de lui faire prendre une position parallèle dans le plan P', et la rotation devra l'amener à sa position finale dans le même plan. La rotation devra donc toujours faire coïncider l'une avec l'autre deux droites de directions déterminées dans un même plan; donc l'angle de rotation sera toujours le même, puisque ce sera l'angle des directions de ces deux droites (n° 22).

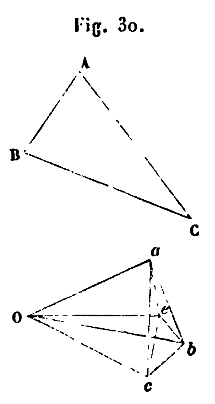
Parmi toutes les combinaisons de deux mouvements qui aboutissent ainsi au même résultat final, il y en a une particulièrement remarquable : c'est celle dans laquelle la translation est parallèle à l'axe de la rotation. On l'obtient en donnant au solide un mouvement de translation parallèle à Ax et égal à la distance entre les plans P et P'; cela fait, une figure quelconque tracée dans le plan P n'aura plus à sortir de P', pour passer à sa position finale, en partant de la position intermédiaire que la translation vient de lui donner. Ce déplacement dans le plan P' pourra donc se réaliser (n° 22) par une rotation autour d'un point du plan, ou, ce qui revient au même, autour d'un axe perpendiculaire au plan et parallèle à Ax. On voit que le déplacement du solide consiste alors en un glissement le long d'un axe, suivi d'une rotation autour du même

axe. Quand une vis pénètre dans son écrou, elle glisse aussi le long d'un axe et tourne simultanément autour de lui, d'un angle toujours proportionnel à la longueur dont elle a glissé; mais rien n'empêche, quand la vis est passée d'une position à une autre, d'imaginer que la rotation totale a succédé au glissement total, car le résultat final serait le même dans les deux cas. Inversement nous pouvons imaginer que le plan P, emportant le solide avec lui, glisse le long de l'axe et tourne en même temps d'une quantité proportionnelle, à la manière de la vis pénétrant dans son écrou, de sorte que les deux mouvements commencent et s'achèvent en même temps. Chaque point du solide parcourt ainsi un arc d'hélice joignant ses positions extrêmes; toutes les hélices des divers points sont tracées sur des cylindres concentriques et ont un même pas.

On voit donc que le déplacement le plus général d'un solide, en tant qu'il s'agit seulement de passer d'une position à une autre, peut être assimilé à la pénétration d'une vis dans son écrou. C'est, comme on dit, un déplacement *hélicoïdal*. L'axe commun des cylindres sur lesquels se trouvent toutes les hélices prend le nom d'*axe de rotation et de glissement*.

Comme le déplacement d'un solide est déterminé par ceux que prennent trois de ses points (n° 19), on peut se proposer, avec cette seule donnée, de trouver l'axe de rotation et de glissement, ainsi que la grandeur des deux déplacements à effectuer le long de l'axe et autour de lui. Voici comment on y arrive :

Fig. 30.



Soient A, B, C (*fig.* 30) les trois points; nommons A′, B′, C′ leurs positions après le déplacement et menons par un même point O, arbitrairement choisi, des droites $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$, $\overline{Oc}$ égales aux déplacements $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, en grandeur, direction et sens. Si l'on menait aussi par le même point O une parallèle à l'axe cherché et si l'on projetait sur cette parallèle les trois droites $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$, $\overline{Oc}$, les trois projetantes des extrémités *a*, *b*, *c* devraient tomber au même point, car on sait que les trois déplacements ont des projections égales sur l'axe. Ces trois

projetantes se trouvent donc dans un même plan perpendiculaire à l'axe, et ce plan est connu parce qu'il contient les trois points a, b, c. Donc, en abaissant de O la perpendiculaire Oe sur le plan abc, on aura d'abord la direction de l'axe qui sera parallèle à Oe; ensuite, si e désigne le pied de la perpendiculaire, $\overline{Oe}$ sera la grandeur commune de tous les déplacements des points du solide, en projection sur l'axe, et par conséquent la grandeur du glissement le long de cet axe. Il reste encore à trouver la position de l'axe et la grandeur de la rotation. Pour cela, on donnera d'abord au triangle ABC une translation $\overline{Oe}$, et il faudra trouver la rotation capable de le faire passer de la position intermédiaire ainsi obtenue à la position A′B′C′. Or cette rotation constitue un mouvement parallèle à un plan abc, de sorte qu'on rentre dans un problème déjà traité. On le résoudrait en projetant AB et A′B′ sur un plan parallèle à abc et opérant sur ces projections comme on l'a fait au n° 22 sur les lignes AB et A′B′ de la *fig.* 21, p. 45; le centre de rotation qu'on obtiendrait serait un point situé sur l'axe de rotation et de glissement, et comme la direction de celui-ci est déjà connue, il se trouverait ainsi complètement déterminé. Quant à l'angle de la rotation, ce serait celui que font entre elles les projections de AB et de A′B′ dont on vient de parler.

Jusqu'à présent nous nous sommes bornés à étudier et discuter divers moyens par lesquels on peut faire passer un solide d'une position à une autre, sans prendre en considération les positions intermédiaires, et aussi sans rien supposer de particulier sur l'ordre de grandeur du déplacement. Quand ce déplacement est infiniment petit, on peut encore l'obtenir par la coexistence d'un glissement le long d'un axe et d'une rotation autour de ce même axe, qui prend alors le nom d'*axe instantané de rotation et de glissement*. Les arcs d'hélice substitués de cette manière aux éléments ds des diverses trajectoires ont toujours les mêmes extrémités que ces éléments; ils peuvent donc les remplacer en grandeur, direction et sens, mais ne leur sont point, en général, osculateurs.

Soient, à une époque et dans une position quelconques du solide, NN son axe instantané de rotation et de glissement (*fig.* 31), A un quelconque de ses points situé à la distance $\overline{AP} = r$ de l'axe. Le déplacement infiniment petit $\overline{AA'} = ds$ de

ce point peut se remplacer par un arc d'hélice, conformément à ce qu'on vient de dire; on le décomposera en un glissement $\overline{AA''} = d\gamma$ parallèle à NN, et un arc $\overline{A''A'} = r\,d\alpha$, décrit en vertu d'une rotation $d\alpha$ autour de NN. Les quantités $d\gamma$ et $d\alpha$ sont les mêmes pour tous les points du solide, en considérant les éléments ds parcourus simultanément par eux. Rappelons-nous maintenant que la vitesse de A n'est pas autre chose que l'élément $\overline{AA'}$ amplifié dans le rapport $\frac{1}{dt}$.

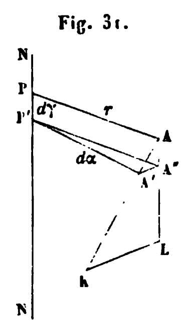


Fig. 31.

Si nous imaginons un triangle AKL homothétique à AA'A'' ayant $\frac{1}{dt}$ pour rapport de similitude, $\overline{AK}$ représentera la vitesse $v = \frac{ds}{dt}$ de A, $\overline{AL}$ et $\overline{LK}$ auront les valeurs $\frac{d\gamma}{dt}$, $r\frac{d\alpha}{dt}$. Ainsi v sera la résultante de deux composantes rectangulaires, savoir : 1° une vitesse de glissement $\frac{d\gamma}{dt}$ le long de l'axe, commune à tous les points; 2° une vitesse $r\frac{d\alpha}{dt}$ due à la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ autour de l'axe, cette vitesse angulaire ne changeant pas non plus d'un point à l'autre. On a, par conséquent,

$$v^2 = \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

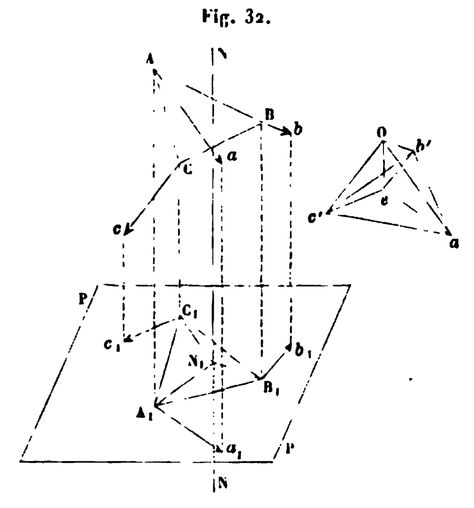
expression d'où il résulte immédiatement que l'axe NN est le lieu des points du solide qui sont animés de la vitesse minimum. Pour un point de NN la vitesse se réduit en effet à $\frac{d\gamma}{dt}$; et pour tout autre point elle est l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant $\frac{d\gamma}{dt}$ comme l'un des côtés de l'angle droit. D'ailleurs il est bien évident que deux axes différents ne peuvent pas jouir de cette même propriété de minimum, sauf le cas où, la rotation disparaissant, le mouvement élémentaire se réduirait à une translation; l'axe instantané de rotation et

de glissement est donc une ligne bien déterminée, quand il s'agit d'un solide ayant lui-même un mouvement élémentaire bien défini.

En raison de cette propriété de minimum, et aussi parce que les surfaces comprenant tous les points animés d'une même vitesse sont des cylindres circulaires ayant la droite NN pour axe, on donne aussi à cette droite le nom d'*axe central du mouvement*.

Cherchons comment on pourrait trouver la direction et la position de cet axe, ainsi que les deux vitesses $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en supposant données les vitesses de trois points A, B, C du solide (*fig.* 32). Ces vitesses $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ ont, comme celle des

Fig. 32.



autres points du solide, une même projection $\frac{d\gamma}{dt}$ sur l'axe inconnu NN; si l'on transportait toutes ces vitesses parallèlement à elles-mêmes en un point O pris arbitrairement, leurs secondes extrémités devraient toutes se trouver dans un même plan perpendiculaire à l'axe. Les trois droites $\overline{Oa'}$, $\overline{Ob'}$, $\overline{Oc'}$, respectivement égales et parallèles aux trois vitesses données, suffisent pour déterminer le plan dont il s'agit, puisqu'on a trois de ses points, a', b', c'. La perpendiculaire $\overline{Oe}$ à

ce plan donne la direction de l'axe, en même temps que la valeur de $\frac{d\gamma}{dt}$, projection d'une vitesse quelconque sur NN ou Oe. Pour avoir la position de l'axe NN, on remarquera que le mouvement de la projection $A_1B_1C_1$ de ABC sur un plan P perpendiculaire à NN est uniquement dû à sa rotation autour de cette droite ou, ce qui revient au même, autour de son pied N_1 dans le plan P. Les vitesses de A_1, B_1, C_1 sont connues; ce sont les projections de $\overline{Aa}$, $\overline{Bb}$, $\overline{Cc}$ (n° 13), c'est-à-dire les droites $\overline{A_1a_1}$, $\overline{B_1b_1}$, $\overline{C_1c_1}$, égales et parallèles à $\overline{ea'}$, $\overline{eb'}$, $\overline{ec'}$. Si donc on mène en A_1, B_1, C_1 les normales à ces vitesses projetées, elles iront concourir en N_1 sur l'axe, ce qui achève de le déterminer; de plus, on aura

$$\overline{A_1a_1} = \overline{N_1A_1}\frac{d\alpha}{dt}, \quad \overline{B_1b_1} = \overline{N_1B_1}\frac{d\alpha}{dt}, \quad \overline{C_1c_1} = \overline{N_1C_1}\frac{d\alpha}{dt},$$

et la vitesse angulaire $\frac{d\gamma}{dt}$ se tirera de l'une de ces trois équations.

Remarque. — La nécessité de trouver un point de rencontre unique N_1 pour les trois normales N_1A_1, N_1B_1, N_1C_1 et une seule valeur de $\frac{d\alpha}{dt}$ par les trois équations qui peuvent la donner, montre qu'on n'est pas en droit de choisir arbitrairement les vitesses de trois points d'un corps solide. Mais c'est là un point de vue sur lequel nous ne donnerons pas ici de plus amples explications.

Mouvement continu le plus général d'un solide. — Le mouvement continu d'un solide, quel qu'il soit, peut toujours être regardé comme formé par la succession d'une infinité de déplacements élémentaires, à chacun desquels répond un axe instantané de rotation et de glissement. Le lieu de ces axes dans l'espace forme une première surface réglée, gauche en général, laquelle reste fixe pendant le mouvement du solide. Secondement, on peut concevoir, dans l'une des positions du solide, le lieu des droites qui lui appartiennent et qui viendront ou sont déjà venues successivement se placer suivant l'axe instantané; on a ainsi une autre surface réglée, fixe dans

le solide et se déplaçant avec lui d'un mouvement commun. D'après leur définition même, ces deux surfaces ont sans cesse une génératrice commune, l'axe instantané actuel; il est facile de reconnaître qu'elles sont tangentes le long de cette génératrice. En effet, le glissement et la rotation qui se font le long ou autour des deux génératrices confondues sur une même droite, ne troublent pas leur coïncidence, et à la fin de ce double mouvement, une autre génératrice de la surface mobile sera venue s'appliquer sur la surface fixe, suivant le nouvel axe instantané qui doit succéder au précédent; on peut donc considérer les deux surfaces comme ayant simultanément, à l'instant final qu'on vient d'indiquer, deux génératrices communes infiniment voisines l'une de l'autre, et, par suite, elles sont tangentes, comme nous l'avons dit. Quant au mouvement de la surface mobile, ce serait un simple glissement le long de la génératrice commune, si la rotation s'annulait; si celle-ci subsistait seule, on verra plus loin que la surface mobile roulerait sur l'autre. Dans le cas général, on peut dire qu'elle roule et glisse tout à la fois le long de la génératrice de contact. On a ainsi une image géométrique du mouvement continu du solide.

On peut en donner une autre. Prenons un point A dans le solide et imaginons trois axes de coordonnées de direction constante, ayant toujours A pour origine. Pendant que chacun des deux systèmes, axes et solide, se déplace en vertu de son mouvement propre, le second possède, relativement au premier, un mouvement dans lequel A reste fixe : on peut donc avoir le mouvement relatif au moyen d'un cône fixe dans le solide, qu'on ferait rouler sur un autre cône fixe par rapport aux axes (n° 24). Ces deux cônes ont pour sommet commun le point A, et le second est en translation commune avec les axes et ce point. Donc, en résumé, le mouvement le plus général d'un solide se produit en faisant rouler un cône lié à ce solide sur un autre cône qui a même sommet, et qui est animé d'un mouvement de translation égal à celui du sommet commun, considéré comme point du solide.

§ III. — Mouvement composé et mouvement relatif d'un point.

26. *Définitions; observations générales.* — On appelle *mouvement relatif* d'un point celui qu'il a par rapport à un solide en mouvement, et qu'on peut constater par la variation de ses coordonnées dans un système d'axes (S) faisant partie du solide. Le mouvement de celui-ci ou du système (S) est nommé *mouvement d'entraînement.* Le *mouvement absolu* du point se constaterait par le changement de ses coordonnées dans un autre système (S') qu'on saurait en repos; il prend aussi le nom de *mouvement composé,* en tant du moins qu'on l'étudie en prenant pour données le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement, dont il est en quelque sorte un produit.

Au lieu d'une combinaison de deux mouvements, on pourrait en imaginer une qui en comprendrait un nombre quelconque. On supposera un point en mouvement dans un système (S), mobile lui-même par rapport à un autre (S'), qui aurait aussi un mouvement par rapport à un troisième (S''), et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un système fixe (S_n).

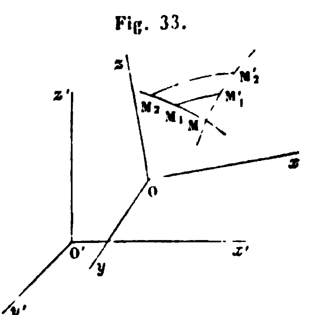
Les mouvements que nous pouvons observer à la surface de la Terre ne sont que des mouvements relatifs, puisque la Terre possède un mouvement dans l'espace; ce dernier est lui-même le résultat de plusieurs mouvements, savoir : le mouvement diurne, le mouvement annuel, ceux de précession et de nutation, auxquels il faut sans doute ajouter un mouvement du Soleil parmi les étoiles et peut-être d'autres encore. La notion des mouvements composés s'offre donc tout naturellement à notre esprit. D'ailleurs il arrive bien souvent qu'un mouvement se définit d'une manière simple et facilement saisissable en le considérant comme composé de plusieurs autres, tandis qu'on aurait beaucoup de peine à démêler ses lois si on le traitait directement comme un mouvement absolu, sans faire usage de la décomposition dont il s'agit. Cela suffit pour faire comprendre l'importance de la question générale que nous abordons maintenant, et qu'on peut énoncer comme il suit :

On demande de déterminer le mouvement composé d'un

point, quand on a une définition suffisante des mouvements dont il est le résultat.

27. *Recherche de la trajectoire d'un point dans un mouvement composé.* — Supposons d'abord un mouvement composé seulement de deux autres. Un point M se déplace, en vertu d'un mouvement relatif, par rapport à un système (S) comprenant trois axes coordonnés Ox, Oy, Oz (*fig.* 33), et ce système se déplace, en vertu d'un mouvement d'entraînement, par rapport aux axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, formant le système fixe de comparaison (S'). La figure représente la position de (S) à une certaine époque. Le mouvement relatif du point étant censé connu, on a les valeurs de ses coordonnées x, y, z en fonction du temps; on peut donc tracer, pour cette position des axes, sa trajectoire relative MM_1M_2... et savoir les époques $t, t_1, t_2, \ldots$ auxquelles correspondent les positions quelconques $M, M_1, M_2, \ldots$ de ce point. Au temps t, le point mobile est bien réellement en M, et ce point M appartient à sa trajectoire absolue, aussi bien qu'à sa trajectoire relative; mais, pendant que le mobile allait de M en M_1, le système (S), avec la trajectoire $MM_1M_2\ldots$ qui lui est liée, a subi un déplacement en vertu du mouvement d'entraînement, de sorte que M_1 n'est pas la position réelle du mobile au temps t_1. Pour l'avoir, il faudra donner au point M_1, considéré comme faisant partie du système (S), le déplacement $M_1M'_1$ produit par le mouvement d'entraînement pendant l'intervalle de temps $t_1 - t$; on obtiendra ainsi le point M'_1 de la trajectoire absolue, répondant à l'époque t_1. On aurait de même M'_2, qui répond à l'époque t_2, et ainsi de suite; la trajectoire absolue $MM'_1M'_2\ldots$ peut donc se construire par points.

Fig. 33.



Cette construction se résume dans la règle suivante :

Tracer la trajectoire relative dans la position qu'elle occupe à une époque déterminée t; puis donner à chaque point M_1 de cette courbe un déplacement $M_1M'_1$ égal à celui que produit le

mouvement d'entraînement pendant le temps compris entre l'époque t et celle où le point mobile est arrivé en M_1 *sur sa trajectoire relative. Le lieu des points* M'_1 *est la trajectoire absolue.*

Si, au lieu de deux mouvements composants, il y en avait un plus grand nombre, le système (S′) ne serait plus fixe, mais mobile relativement à (S″), qui le serait lui-même par rapport à (S‴), etc. Imaginons que ces divers systèmes soient placés dans les positions qu'ils occupent à une même époque t. Dans ce cas, la courbe $MM'_1M'_2\ldots$, obtenue comme on vient de le dire, ne serait plus que la trajectoire relative du point M, par rapport au système (S) pris dans la position contemporaine de $Oxyz$ (c'est-à-dire celle où il se trouve à l'époque t). En partant de cette nouvelle trajectoire relative, et tenant compte du mouvement d'entraînement de (S′) par rapport à (S″), la répétition d'une construction analogue donnerait une troisième trajectoire relative, que l'on aurait encore à combiner de la même manière avec le mouvement d'entraînement de (S″) par rapport à (S‴). Il est clair qu'une opération semblable répétée un certain nombre de fois conduirait finalement à trouver la trajectoire du point mobile relativement au système fixe (S_n), c'est-à-dire la trajectoire absolue.

On aurait pu prendre pour données la trajectoire absolue, avec les mouvements d'entraînement successifs, et déterminer les diverses trajectoires relatives par lesquelles on vient de passer. Il suffirait d'imaginer que les divers déplacements dus aux mouvements d'entraînement sont décrits en ordre et en sens inverses. Pour nous borner au cas de deux mouvements composants, par exemple, si, dans la *fig.* 33, on donnait la courbe $MM'_1M'_2\ldots$ trajectoire absolue, il est bien éviden qu'on retrouverait la trajectoire relative $MM_1M_2\ldots$ en décrivant à partir de chaque point tel que M'_1 un arc M'_1M_1, égal et contraire à celui qu'il avait fallu décrire pour passer de la dernière de ces trajectoires à la première.

28. *Composition des vitesses d'un point.* — Faisons décroître indéfiniment les arcs MM_1, $M_1M'_1$, MM'_1 (*fig.* 33) et la durée correspondante $t_1 - t$ du parcours de ces arcs par le point mobile; à la limite, les arcs peuvent se remplacer par leurs

cordes, en grandeur, direction et sens. Si nous concevons ensuite que les côtés du triangle infiniment petit $MM_1M'_1$ soient amplifiés dans le rapport $\frac{1}{t_1 - t}$, ils représenteront trois vitesses, savoir :

La vitesse absolue, égale à $\lim \frac{\overline{MM'_1}}{t_1 - t}$;

La vitesse relative, égale à $\lim \frac{\overline{MM_1}}{t_1 - t}$;

Enfin la vitesse dite *vitesse d'entraînement,* exprimée par $\lim \frac{\overline{M_1M'_1}}{t_1 - t}$, celle que prendrait le point M_1 (ou M à la limite) s'il devenait fixe dans le système (S).

Or, dans le triangle $MM_1M'_1$, le côté $\overline{MM'_1}$ est la résultante géométrique de $\overline{MM_1}$ et de $\overline{M_1M'_1}$; on a donc, par la considération du triangle semblable, le théorème suivant :

Lorsqu'un point se meut relativement à un système animé lui-même d'un certain mouvement, la vitesse absolue de ce point est la résultante de sa vitesse relative et de sa vitesse d'entraînement.

On aurait pu tout aussi bien considérer $\overline{MM_1}$ comme la résultante de $\overline{MM'_1}$ et de $\overline{M'_1M_1}$, ce dernier côté devant être alors parcouru en sens inverse de celui qu'on avait d'abord dû suivre; donc, les hypothèses de l'énoncé précédent restant les mêmes, nous pouvons ajouter :

La vitesse relative d'un point est la résultante de sa vitesse absolue et de sa vitesse d'entraînement prise en sens contraire.

Nous sommes arrivé à ces théorèmes en nous servant du point M, situé à l'intersection des trajectoires absolue et relative dans la *fig.* 33; néanmoins cela ne particularise rien, car l'époque t, à laquelle se rapporte la position attribuée aux axes mobiles, reste absolument arbitraire, et l'on aurait pu la choisir de manière à faire passer la trajectoire relative par tout autre point de la trajectoire absolue. Les théorèmes ci-dessus restent donc vrais pendant toute la durée du mouvement.

Dans le cas où le mouvement d'entraînement, qu'on vient

de supposer absolu, serait lui-même un mouvement composé de plusieurs autres, comme on l'a vu au n° **27**, la résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement, telle qu'on vient de la trouver, ne serait plus la vitesse absolue du point, mais sa vitesse relativement au second système d'axes (S'). En la composant avec sa vitesse d'entraînement produite par le mouvement de (S') relativement à (S''), on aurait une seconde résultante qui serait la vitesse absolue dans l'hypothèse de (S'') fixe, ou une nouvelle vitesse relative dans le cas contraire. Cette composition successive des vitesses finirait toujours par donner la vitesse absolue, égale à la résultante de la vitesse relative du point dans (S) et des vitesses qu'il aurait s'il était lié à chacun des systèmes (S), (S'), ..., (S_{n-1}), dans le mouvement que ce système possède relativement au suivant. L'ordre suivi pour la composition est d'ailleurs indifférent (n° **11**), et toutes les vitesses composantes peuvent se traiter de la même manière.

29. *Emploi de la transformation des coordonnées.* — Nous nous bornerons à étudier le cas auquel se rapporte la *fig.* 33, dans lequel on a seulement deux systèmes de comparaisons, l'un $Oxyz$ mobile, l'autre $O'x'y'z'$ fixe. On définira le mouvement du premier en donnant, pour chaque valeur du temps t : 1° les coordonnées ξ, η, ζ de l'origine O, relativement aux axes fixes; 2° les cosinus directeurs a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 de chacune des lignes Ox, Oy, Oz dans le système $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$. Les deux systèmes d'axes étant supposés rectangulaires, ces neuf cosinus doivent satisfaire à six relations distinctes qu'il est inutile de rappeler; écrivons seulement les formules de transformations

$$x' = \xi + ax + a_1y + a_2z,$$
$$y' = \eta + bx + b_1y + b_2z,$$
$$z' = \zeta + cx + c_1y + c_2z,$$

ou encore

$$x = a\,(x'-\xi) + b\,(y'-\eta) + c\,(z'-\zeta),$$
$$y = a_1(x'-\xi) + b_1(y'-\eta) + c_1(z'-\zeta),$$
$$z = a_2(x'-\xi) + b_2(y'-\eta) + c_2(z'-\zeta).$$

Puisque ξ, η, ζ, ainsi que les neuf cosinus, sont donnés en fonction du temps, le premier groupe définit les coordonnées absolues du point quand on donne les coordonnées relatives, c'est-à-dire qu'il permet de trouver le mouvement absolu au moyen du mouvement relatif et du mouvement d'entraînement; inversement, le second groupe permet d'avoir le mouvement relatif au moyen des deux autres.

Supposons, comme exemple particulier, que les axes mobiles soient animés d'un mouvement de translation; ils conservent dans ce cas des directions constantes, qu'on peut prendre pour celles des axes fixes. Supposons de plus que le point dont on étudie le mouvement soit en repos absolu à l'origine O'. Il faut faire alors

$$x'=0,\quad y'=0,\quad z'=0,\quad a=1,\quad b_1=1,\quad c_2=1,$$
$$b=0,\quad c=0,\quad a_1=0,\quad c_1=0,\quad a_2=0,\quad b_2=0,$$

et le second groupe devient

$$x=-\xi,\quad y=-\eta,\quad z=-\zeta.$$

Les coordonnées de O' dans le système $Oxyz$ deviennent égales et contraires à celles de O dans le système $O'x'y'z'$, ce qui serait d'ailleurs bien facile à voir sans calcul. Il résulte de ce fait que, si l'on construisait la trajectoire relative de O' et la trajectoire absolue de O dans un même système d'axes, les deux courbes seraient symétriques relativement à l'origine; elle seraient égales en les supposant planes.

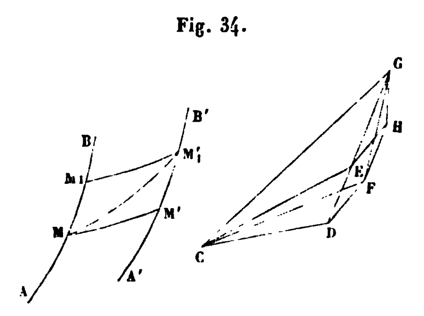
Par exemple, le Soleil décrit, dans une année, relativement à des axes de direction constante menés par le centre de la Terre, une ellipse ayant l'un de ses foyers en ce point; on peut en conclure que, relativement à des axes de direction constante menés par le centre du Soleil, la Terre décrit une ellipse égale, ayant de même ce point pour l'un de ses foyers.

La différentiation des équations précédentes conduirait sans peine à la composition des vitesses, démontrée par un autre moyen au n° 28; on pourrait aussi arriver, par une seconde différentiation, à connaître l'accélération totale dans l'un des deux mouvements absolu ou relatif, quand l'autre est donné, ainsi que le mouvement d'entraînement. Mais les calculs sont

assez prolixes, principalement quand il s'agit des accélérations; nous nous en tiendrons par conséquent aux démonstrations géométriques du n° 28 et du n° 30 ci-après.

30. *Composition des accélérations.* — Nous nous proposons de déterminer l'accélération dans le mouvement composé d'un point. Nous allons d'abord le faire en supposant ce point en mouvement relatif par rapport à un système de comparaison mobile, animé lui-même d'un mouvement absolu de translation. Concevons la trajectoire relative comme faisant partie du système mobile et se transportant avec lui; soient AB (*fig.* 34) sa position au temps t, M la position du point mobile

Fig. 34.



sur cette courbe à la même époque, $\overline{MM_1}$ l'arc élémentaire parcouru dans le temps dt, en vertu du mouvement relatif. Pendant ce même temps dt, AB s'est déplacé et a pris la position A'B', par l'effet du mouvement d'entraînement, de sorte que $\overline{MM_1}$ est venu en $\overline{M'M'_1}$ et que le point mobile M est arrivé en M'_1, ayant parcouru un arc $\overline{MM'_1}$ sur sa trajectoire absolue. Sa vitesse absolue en M est égale à la résultante $\overline{CE}$ de deux vitesses, l'une $\overline{CD}$ égale à la vitesse d'entraînement, l'autre DE égale à la vitesse relative (n° 28). Pareillement, en M'_1 nous aurions la vitesse d'entraînement $\overline{CF}$ et la vitesse relative $\overline{FG}$, donnant une résultante $\overline{CG}$ égale à la vitesse absolue. Donc la vitesse acquise élémentaire, dans le mouvement absolu, est représentée par la ligne $\overline{EG}$ qui joint les extrémités de ces deux résultantes (n° 15). Menons maintenant en F une droite $\overline{FH}$ égale et parallèle à $\overline{DE}$; de plus, joignons DF, EH,

GH. La droite $\overline{EG}$ est résultante de $\overline{EH}$ et de $\overline{HG}$, et, en amplifiant les côtés du triangle dans le rapport $\frac{1}{dt}$, on peut dire aussi que $\frac{\overline{EG}}{dt}$ est la résultante de $\frac{\overline{EH}}{dt}$ et de $\frac{\overline{HG}}{dt}$. Le premier de ces quotients exprime l'accélération absolue du point mobile (n° 15); nous allons voir la signification des deux autres.

D'après la construction qu'on vient de faire, $\overline{EH}$ est égal et parallèle à $\overline{DF}$, $\overline{CD}$ représente la vitesse d'entraînement en M, $\overline{CF}$ la vitesse analogue en M'_1 ou en M', car dans un mouvement de translation tous les points se meuvent simultanément avec la même vitesse (n° 20); donc $\overline{DF}$ est la vitesse acquise élémentaire dans le mouvement d'entraînement pendant le parcours $\overline{MM'}$, et $\frac{\overline{DF}}{dt}$ est l'accélération correspondante. D'un autre côté, $\overline{FH}$ et $\overline{FG}$ sont les vitesses relatives en M et M'_1 ou M_1; par suite, la vitesse acquise élémentaire dans le mouvement relatif est $\overline{HG}$, à laquelle répond l'accélération $\frac{\overline{HG}}{dt}$. Donc nous pouvons conclure que :

L'accélération absolue est la résultante de l'accélération d'entraînement et de l'accélération relative.

S'il s'agissait de trouver cette dernière, on verrait par le même triangle HGE que $\overline{HG}$ résulte de la composition de $\overline{HE}$ et de $\overline{EG}$. Par conséquent :

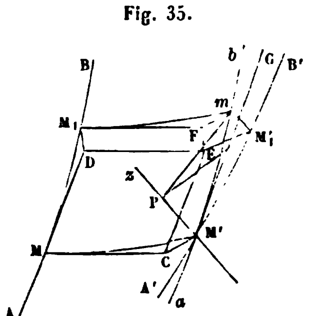
L'accélération relative est la résultante de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire, et de l'accélération absolue.

La démonstration précédente ne subsisterait plus si les axes mobiles et, avec eux, la trajectoire relative n'avaient pas un mouvement de translation. Voici comment on pourrait procéder dans le cas d'un mouvement d'entraînement quelconque, lequel d'ailleurs sera toujours censé absolu.

Supposons encore la trajectoire relative emportée avec les axes mobiles; soient AB (*fig.* 35) sa position au temps t, M et M_1 les positions occupées sur cette courbe par le point mobile aux temps t et $t + dt$. Pendant le temps dt, la trajec-

toire AB se transporte en une position différente A′B′, sur laquelle le point M de AB est venu en M′ et M_1 en M'_1; M'_1 est donc la position réelle du point mobile après le temps dt, pendant lequel il a parcouru un arc MM'_1 de sa trajectoire absolue. Le passage de AB à A′B′, dû au mouvement d'entraînement, peut toujours s'effectuer au moyen de deux déplacements successifs; on donne d'abord à tous les points une translation égale au déplacement MM′ de M dans ce mouvement, et, en vertu de cette translation,

Fig. 35.



le point M_1 arrive en m, sur la position intermédiaire ab de AB, ayant décrit l'arc $M_1 m$ égal et parallèle à MM′; après cette translation, il ne reste plus qu'à donner une rotation autour d'un certain axe instantané $M'z$ passant nécessairement en M′ (n° 24), puisque ce point est arrivé à sa position finale sur A′B′ et reste immobile dans le trajet de ab à A′B′. En vertu de cette rotation, le point m de ab décrit un arc mM'_1 ayant pour rayon la perpendiculaire mP abaissée de m sur l'axe, et arrive ainsi à sa position finale M'_1.

Maintenant désignons par

v, v_r, v_e les vitesses absolue, relative et d'entraînement en M, c'est-à-dire les vitesses avec lesquelles sont parcourus les arcs MM'_1, MM_1, MM';

j, j_r, j_e les accélérations totales correspondantes;

j_c une quatrième accélération, dite *complémentaire*, dont la définition sera donnée plus loin;

$\omega\, dt$ l'angle infiniment petit mPM'_1 de la rotation, ω étant la vitesse angulaire de cette rotation;

α l'angle $mM'z$, c'est-à-dire l'angle fait par l'axe de rotation avec la vitesse relative v_r, qui a la direction de $M'm$.

On a vu (n° 28) que la vitesse v peut s'obtenir par la composition des vitesses v_r et v_e, c'est-à-dire (n° 11) qu'elle est la diagonale du parallélogramme construit sur ces vitesses. Si donc nous portons une longueur $\overline{MD} = v_r\, dt$ suivant la tan-

gente en M à MM_1, et une longueur $\overline{MC} = v_e dt$ suivant la tangente à MM' au même point, la diagonale $\overline{ME}$ du parallélogramme MDEC construit sur ces deux droites aura une longueur $v dt$ et la direction de v, ou de la tangente à la trajectoire absolue MM'_1, car MDEC est semblable au parallélogramme de composition des vitesses v_r et v_e. Donc $\overline{EM'_1}$ est la déviation (n° 18) dans le mouvement absolu, et l'on a par conséquent

$$\overline{EM'_1} = j\frac{dt^2}{2}.$$

D'un autre côté, on voit immédiatement que les lignes $\overline{DM_1}$ et $\overline{CM'}$ sont des déviations dans les mouvements relatif et d'entraînement de M, de sorte que

$$\overline{DM_1} = j_r\frac{dt^2}{2}, \quad \overline{CM'} = j_e\frac{dt^2}{2}.$$

Pour arriver à la relation qui existe entre ces déviations ou les accélérations correspondantes, menons encore $\overline{M_1F}$ égal et parallèle aux lignes $\overline{MC}$ et $\overline{DE}$, et enfin joignons EF et Fm. La figure $DEFM_1$ est un parallélogramme, comme ayant deux côtés opposés égaux et parallèles; donc $\overline{EF}$, égale et parallèle à $\overline{DM_1}$, a pour valeur $j_r\frac{dt^2}{2}$; dans la même figure, M_1Fm ayant ses lignes $\overline{M_1m}$, $\overline{M_1F}$ respectivement égales et parallèles à $\overline{MM'}$ et $\overline{MC}$, il s'ensuit que $\overline{Fm}$ est aussi égal et parallèle à $\overline{CM'}$ et a pour valeur $j_e\frac{dt^2}{2}$. Or $\overline{EM'_1}$ est la résultante du contour $\overline{EF}$, $\overline{Fm}$, $\overline{mM'_1}$; donc, en multipliant toutes les lignes par le rapport $\frac{2}{dt^2}$, ce qui produirait un polygone de composition homothétique à $EFmM'_1$, on pourra dire que :

*L'accélération absolue j est la résultante de trois accélérations, savoir : l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et une troisième composante, à laquelle on donne le nom d'*accélération complémentaire.

L'accélération complémentaire, dirigée de m vers M'_1, a pour expression $\frac{2\,\overline{mM'_1}}{dt^2}$; il reste encore à en définir, d'une

manière plus précise et plus nette, la grandeur, la direction et le sens. Remarquons à cet effet que le triangle $M'mP$ peut être, à la limite, considéré comme rectiligne; l'angle en P étant droit, on a donc

$$\overline{mP} = \overline{M'm} \sin mM'P = v_r\, dt \sin\alpha$$

et, par suite,

$$\overline{mM'_1} = \overline{mP} \times \text{angle}\, mPM'_1 = v_r\, dt \sin\alpha \times \omega\, dt.$$

Donc l'accélération complémentaire j_c, qui s'obtient en multipliant $\overline{m'M_1}$ par $\frac{2}{dt^2}$, a pour grandeur

$$j_c = 2\omega v_r \sin\alpha.$$

Quant à la direction et au sens de j_c, ils sont identiques avec ceux du déplacement mM'_1 que la rotation instantanée $\omega\, dt$ donne au point m ou à tout point situé sur le prolongement rectiligne de l'élément $M'm$, et en particulier au point G, situé sur la tangente en M' à cet élément, à la distance $2v_r$. Ce point G est à une distance $2v_r \sin\alpha$ de l'axe instantané $M'z$ et j_c est égal à sa vitesse dans la rotation autour de cet axe. Donc, en résumé :

L'accélération complémentaire coïncide en grandeur, direction et sens avec la vitesse que prend, en vertu de la rotation instantanée dans le mouvement d'entraînement, l'extrémité d'une droite représentant le double de la vitesse relative du point mobile.

Il reste sous-entendu dans cet énoncé que l'axe de la rotation instantanée doit toujours être amené à passer par le point mobile. Rien n'est d'ailleurs plus facile. Quand un même mouvement élémentaire ou fini d'un solide est remplacé de diverses manières par une translation suivie d'une rotation, cette dernière ne varie pas, non plus que la direction de son axe. Si donc, d'après la définition immédiatement donnée du mouvement d'entraînement, l'axe instantané de rotation ne passait pas en M' (ou M à la limite), il suffirait de l'y transporter parallèlement à lui-même, en conservant la même valeur de la vitesse angulaire.

S'il s'agissait de trouver l'accélération relative au lieu de l'accélération absolue, on y arriverait encore par la considération du même quadrilatère $EFmM'_1$. On voit que le côté $\overline{EF}$ de ce quadrilatère est la résultante de $\overline{EM'_1}$, $\overline{M'_1m}$, $\overline{mF}$; donc, en imaginant tous les côtés multipliés par $\frac{2}{dt^2}$, on aura ce théorème :

L'accélération relative est la résultante de l'accélération absolue, de l'accélération d'entraînement prise en sens contraire et d'une troisième accélération égale et contraire à l'accélération complémentaire.

Coriolis, qui avait obtenu les mêmes résultats par l'emploi de la transformation des coordonnées, a nommé cette dernière composante *accélération centrifuge composée*. Il paraît difficile de bien saisir les raisons de cette dénomination, d'ailleurs un peu longue et qui s'est néanmoins conservée.

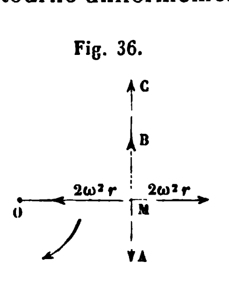
Supposons maintenant que le système de comparaison (S), auquel on rapporte le mouvement relatif du point mobile, ait un mouvement d'entraînement composé de deux mouvements; ainsi (S) se meut par rapport à un autre système (S′), lequel se meut lui-même relativement à un système fixe (S″). Dans ce cas, on opérerait d'abord sur le mouvement relatif du point dans le système (S) et sur le mouvement de celui-ci par rapport à (S′), en le considérant comme un mouvement absolu d'entraînement; alors l'application de la méthode précédente conduirait à trouver une accélération qui serait considérée comme absolue par un observateur emporté dans le mouvement de (S′). Mais, en réalité, ce ne serait encore qu'une accélération relative, puisque (S′) n'est pas fixe; il faudrait recommencer une opération analogue, en combinant cette accélération relative qu'on vient de trouver avec l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire qui répondent au mouvement absolu de (S′). Dans le cas d'un plus grand nombre de mouvements composants, ce serait toujours la même chose; seulement l'opération dont on vient de parler se répéterait un plus grand nombre de fois.

Dans le cas particulier où tous les mouvements d'entraînement successifs seraient des translations, on se trouverait

ainsi conduit à trouver l'accélération absolue égale à la résultante géométrique des accélérations du point mobile dans ses divers mouvements composants.

Applications. — 1° *Point en repos absolu, rapporté à un système d'axes qui tourne uniformément autour d'une droite fixe.* — Soient O (*fig.* 36) l'origine d'un système d'axes qui tourne uniformément, dans le sens indiqué par la flèche, avec une vitesse angulaire ω, autour d'une perpendiculaire au plan de la figure; M un point immobile dans ce plan. Pour un observateur entraîné avec les axes, le point paraît décrire un cercle de rayon $\overline{OM} = r$, et il semble le parcourir avec une vitesse constante $\overline{MB} = \omega r$, égale et contraire à $\overline{MA} = \omega r$, vitesse d'entraînement qu'aurait le point s'il était lié aux axes; il faut en effet que la résultante de $\overline{MB}$ et de $\overline{MA}$ soit nulle, puisque c'est la vitesse absolue d'un point immobile.

Fig. 36.



Nous pouvons maintenant chercher l'accélération absolue de M au moyen des théorèmes précédents et vérifier qu'elle est nulle. L'accélération relative et l'accélération d'entraînement sont l'une et l'autre celle d'un point qui décrit uniformément un cercle avec la vitesse ωr; chacune d'elles se réduit à sa composante centripète, dirigée de M vers O et égale à $\frac{\omega^2 r^2}{r}$ ou $\omega^2 r$ (n° 15). Leur réunion donne $2\omega^2 r$, dans les mêmes direction et sens. D'autre part, l'accélération complémentaire est égale à la vitesse que prend l'extrémité C d'une droite $\overline{MC} = 2\overline{MB}$ représentant le double de la vitesse relative, en vertu de la rotation ω autour d'une parallèle menée en M à l'axe O; cette vitesse $\omega\overline{MC}$, ou $2\omega^2 r$, perpendiculaire à MC et par conséquent parallèle à OM, est en outre dans le sens de O vers M. Donc cette dernière composante de l'accélération absolue détruit les deux premières et la résultante est bien nulle, comme on le savait d'avance.

2° *Accélération d'un point rapporté à des coordonnées rectilignes ou à des coordonnées polaires dans un plan.* — Les

coordonnées x, y, z d'un point mobile M, dans un système fixe de trois axes Ox, Oy, Oz, définissent le mouvement absolu de ce point quand elles sont liées au temps t par trois relations que nous concevons mises sous la forme

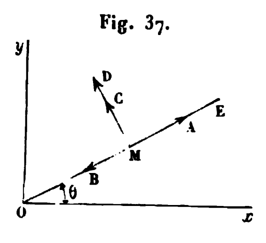
$$x=f(t), \quad y=\varphi(t), \quad z=\psi(t).$$

Or le mouvement du point peut être aussi regardé comme un mouvement composé de la manière suivante : le point M glisse sur une droite (D) toujours parallèle à l'axe des x, pendant qu'un point P, fixe sur la droite (D), glisse sur une droite (D') parallèle à Oy et contenue dans le plan des yz; la distance $\overline{PM}$ est toujours $f(t)$ et la coordonnée y du point P est toujours $\varphi(t)$; enfin le plan (D, D') des deux droites se déplace simultanément par une translation parallèle à l'axe des z, de telle sorte que la coordonnée z commune à tous ses points ait à chaque instant la valeur $\psi(t)$. Il est clair que de cette manière le point serait sans cesse défini par les mêmes coordonnées x, y, z; son mouvement absolu serait donc demeuré identique à ce qu'il était.

Appliquons maintenant les théorèmes sur la composition des accélérations, en considérant d'abord le plan (D, D') comme immobile. Il ne restera au point que son mouvement relatif sur la droite D et un mouvement d'entraînement parallèle à l'axe des y; comme ce dernier est une translation, l'accélération dans le mouvement composé est la résultante de l'accélération relative $\frac{d^2x}{dt^2}$, et de l'accélération d'entraînement $\frac{d^2y}{dt^2}$. Mais cette résultante n'est elle-même, au fond, qu'une accélération relative, par rapport au plan (D, D'), pris pour système mobile de comparaison. Comme ce plan est animé d'un mouvement d'entraînement qui est encore une translation, la première résultante se compose avec l'accélération $\frac{d^2z}{dt^2}$ de ce mouvement. Donc enfin l'accélération absolue est la résultante des accélérations $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, respectivement parallèles aux trois axes coordonnés, comme nous l'avions déjà démontré par un autre moyen (n° 16).

Supposons encore un point M (*fig.* 37) rapporté à des coordonnées polaires dans un plan. On concevra ce mouvement comme produit en faisant glisser le point M le long du rayon vecteur OM pendant que ce rayon vecteur tourne autour du point fixe O. Ces deux mouvements, le premier relatif, le second d'entraînement, sont définis si l'on donne, en fonction du temps, le rayon $\overline{OM} = r$ et l'angle $MOx = \theta$ qu'il fait avec l'axe polaire Ox; il s'agit alors de trouver l'accélération de M dans son mouvement absolu. Pour cela, nous devons chercher l'accélération relative, l'accélération d'entraînement et l'accélération complémentaire.

Fig. 37.



La première est immédiatement connue, puisque la trajectoire relative est droite; elle a pour valeur $\frac{d^2 r}{dt^2}$, que nous représentons sur la figure par la ligne $\overline{MA}$. La seconde est celle qu'aurait le point M s'il devenait fixe sur OM. Il décrirait alors un cercle de rayon r avec une vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$; sa vitesse linéaire serait $r\frac{d\theta}{dt}$; son accélération aurait une composante tangentielle $\overline{MC} = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ (puisque dans ce mouvement circulaire r ne change pas), et une composante centripète $\overline{MB} = \frac{1}{r}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ (n° 15). Il ne reste plus à trouver que l'accélération complémentaire. On sait qu'il faut, à cet effet, prendre la droite $\overline{ME}$ égale au double de la vitesse relative; la vitesse de E dans la rotation $\frac{d\theta}{dt}$ autour de M donne cette troisième composante. Ici $\overline{ME} = 2\frac{dr}{dt}$; la vitesse de E dans la rotation dont il s'agit est $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$, représentée sur la figure par $\overline{MD}$. Toutes les droites représentatives ont été tracées sur la figure en supposant positives les dérivées $\frac{d^2 r}{dt^2}$, $\frac{d^2\theta}{dt^2}$,

$\frac{dr}{dt}, \frac{d\theta}{dt}$; le sens qu'on leur a donné est le sens positif dans lequel elles sont censées comptées, en conservant toujours les expressions analytiques ci-dessus.

En résumé, nous trouvons pour l'accélération totale :

Une composante suivant le prolongement du rayon vecteur égale à $\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$;

Une composante $r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$, suivant la perpendiculaire à ce rayon, dans le sens des accroissements positifs de l'angle θ.

Voici une autre méthode pour arriver aux mêmes résultats. Prenons l'axe polaire Ox et une perpendiculaire Oy pour axes coordonnés; nous aurons

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

d'où, par des différentiations successives, résulte

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt};$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\theta - 2\sin\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\sin\theta + 2\cos\theta\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} - r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

L'accélération totale étant la résultante de $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$ (n° 16), ses projections sur le rayon vecteur OM et sur la perpendiculaire MD sont respectivement

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta \quad \text{et} \quad -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta,$$

expressions qui, après substitution des valeurs qu'on vient de trouver pour les deux dérivées secondes et toute réduction faite, reproduisent bien les valeurs déjà obtenues par un autre procédé.

La composante suivant la perpendiculaire au rayon peut

s'écrire sous la forme

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

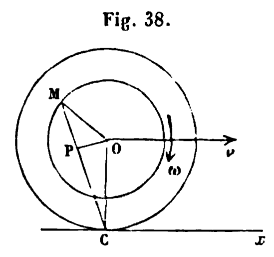
ou, en nommant V le double de la vitesse aréolaire (n° 12),

$$\frac{1}{r}\frac{dV}{dt}.$$

Si l'on sait *a priori* que cette composante doit être nulle, ou, en d'autres termes, que l'accélération totale doit passer par le centre fixe O, il en résulte que V ne peut varier; la vitesse aréolaire doit alors rester constante, et l'aire engendrée par le rayon vecteur varie proportionnellement aux variations du temps.

3° *Accélération totale d'un point lié à un cercle qui roule uniformément sur une droite; rayon de courbure de sa trajectoire.* — Soit un cercle OC (*fig.* 38) qui roule sur une droite Cx; son centre O décrit alors une droite parallèle. D'après les principes généraux établis au n° 25, nous pouvons toujours concevoir le mouvement du cercle comme produit par la coexistence d'une translation rectiligne égale au déplacement du point O et d'une rotation autour de ce point. Soient v la vitesse de la translation, ω celle de la rotation, r le rayon $\overline{OC}$; nous aurons la vitesse du point C qui sera la résultante d'une vitesse d'entraînement v et d'une vitesse relative ωr (n° 28), car le cercle tourne avec la vitesse ω autour de O, par rapport à des axes de direction constante, emportés avec la vitesse v. Ces deux composantes sont dirigées suivant la même droite et leur résultante a pour valeur $v - \omega r$. Or on sait d'un autre côté (n° 22, *c*) que le centre instantané de rotation du cercle se trouve en C; donc

Fig. 38.



$$v - \omega r = 0.$$

Il y a un rapport constant r entre les vitesses v et ω : c'est la condition nécessaire du roulement; mais nous admettrons de

plus, comme condition de son uniformité, que v et ω sont invariables avec le temps.

La recherche de l'accélération d'un point quelconque M pris dans le plan du cercle devient alors bien facile. Dans son mouvement relatif, ce point décrit uniformément un cercle de rayon $\overline{OM}$ avec la vitesse angulaire ω; son accélération se réduit à l'accélération centripète $\omega^2\overline{MO}$, dirigée de M vers O. Dans le mouvement d'entraînement rectiligne et uniforme suivant Ov, l'accélération est nulle; de plus l'accélération complémentaire est nulle, parce que ce second mouvement est une translation. Donc l'accélération absolue du point M se réduit à $\omega^2\overline{MO}$.

Ce résultat conduit sans peine à la connaissance du rayon de courbure de la trajectoire décrite par ce point. Menons en effet la normale CM à cette courbe et abaissons du centre O la perpendiculaire OP sur CM; la composante centripète de l'accélération absolue est $\omega^2\overline{MO}\cos OMP$ ou $\omega^2\overline{MP}$. D'autre part, la vitesse angulaire autour de C est encore ω, car on sait (nº 25) que, dans les diverses combinaisons d'une translation avec une rotation pour représenter un mouvement déterminé d'un solide, la rotation reste la même; le produit $\omega\overline{MC}$ exprime donc la vitesse absolue de M, et par conséquent, en nommant ρ le rayon de courbure demandé, on a

$$\omega^2\overline{MP} = \frac{\omega^2\overline{MC}^2}{\rho},$$

d'où

$$\rho = \frac{\overline{MC}^2}{\overline{MP}}.$$

Le centre de courbure se trouverait d'ailleurs sur le prolongement de MC au-dessous de Cx, puisque l'accélération centripète a le sens de M vers P et que $\frac{\rho}{\overline{MC}}$, égal à $\frac{\overline{MC}}{\overline{MP}}$, est plus grand que l'unité, d'après la relation précédente.

Remarquons enfin que, dans le cas particulier où le point M est pris sur la circonférence OC, $\overline{MP}$ devient égal à $\frac{1}{2}\overline{MC}$, et, par suite, $\rho = 2\overline{MC}$; le rayon de courbure d'une cycloïde est double de la normale. On retrouve ainsi un théorème connu.

§ IV. — Mouvements élémentaires composés ou relatifs d'un solide invariable.

31. *Définitions et observations générales.* — Un des moyens par lesquels on peut définir le mouvement d'un solide invariable (S) consiste à donner son mouvement par rapport à un autre solide (S′), puis le mouvement de (S′) par rapport à un troisième solide (S″), le mouvement de (S″) par rapport à un solide suivant (S‴), et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à un solide fixe (S_n). Le mouvement absolu de (S) se nomme alors un *mouvement composé*, et les mouvements dont il est le résultat sont dits *mouvements composants*.

Dans le cas particulier où il n'y aurait que deux mouvements composants et où, par conséquent, le solide (S″) resterait fixe, on nomme ordinairement *mouvement relatif* le mouvement de (S) par rapport à (S′), c'est-à-dire celui qui se manifeste par la variation des coordonnées de tout point de (S) dans un système d'axes faisant partie de (S′); le mouvement absolu de (S′) prend alors le nom de *mouvement d'entraînement*. Souvent on a besoin de rechercher le mouvement relatif de deux solides (S) et (S′), connaissant le mouvement absolu de chacun d'eux. Or on a vu (n° 27) qu'on passe des positions successives d'un point sur sa trajectoire absolue à ses positions contemporaines sur sa trajectoire relative par les mêmes opérations qui avaient permis d'obtenir les premières au moyen des dernières, sauf qu'il faut changer le sens du déplacement produit par le mouvement d'entraînement; cela pouvant s'appliquer à un point quelconque de (S), nous en conclurons que le mouvement relatif de ce solide est un mouvement composé, résultant de son mouvement absolu et du mouvement de (S′) pris en sens contraire. C'est d'ailleurs ce qu'on peut établir plus directement, en partant de ce principe évident qu'on ne change rien aux positions relatives d'un ensemble quelconque de points quand on déplace en bloc tout le système, comme un solide invariable, puisque les distances de tous les points entre eux ne sont alors aucunement modifiées. Si l'on prend ce mouvement commun égal et

contraire à celui de (S′), le solide (S′) est réduit au repos, et le mouvement relatif demandé devient le mouvement absolu de (S), lequel mouvement est composé de son mouvement absolu primitif et du mouvement commun, égal et contraire au mouvement primitif de (S′).

Ainsi donc le mouvement relatif d'un solide n'est pas autre chose au fond qu'un mouvement composé, et les deux questions n'en font qu'une.

Voici maintenant le but qu'on se propose dans l'étude des mouvements composés d'un solide. On se rappelle (n° 28) que la vitesse absolue d'un point quelconque de ce solide peut s'obtenir en prenant la résultante des vitesses qu'aurait le même point dans chacun des mouvements composants; la même chose peut se dire quand on multiplie chaque vitesse par l'élément dt du temps et qu'on lui substitue ainsi le déplacement du point pendant le temps dt. Or il est naturel de se demander si toutes les vitesses résultantes ou les déplacements élémentaires résultants ne pourraient pas s'obtenir en supposant au solide un seul mouvement simple, de translation ou de rotation; dans le cas le plus général, on est certain d'avance qu'il suffit de la combinaison d'une seule translation avec une seule rotation (n° 25), ce qui se réduit en fin de compte à un mouvement hélicoïdal. On peut aussi chercher à substituer à tel mouvement donné un mouvement composé, dans lequel les mouvements composants seraient choisis de manière à donner des facilités spéciales pour la résolution de certains problèmes ou pour la démonstration de certaines théories. Tel est le double but que nous allons poursuivre, en traitant successivement des cas particuliers pour arriver au cas général.

32. *Composition des translations.* — Si un solide (S) est animé, relativement à un autre solide (S′), d'une translation ayant une vitesse v, pendant que (S′) possède une translation absolue avec la vitesse v', la vitesse V d'un point quelconque de (S) sera la résultante des deux mêmes composantes v et v', puisque dans une translation tous les points ont la même vitesse (n° 20). La vitesse résultante de chaque point sera donc produite par une translation, dans laquelle la vitesse est

la résultante de celles qui ont lieu dans les translations composantes.

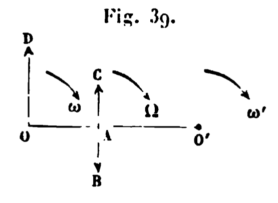
Si maintenant le solide (S′), au lieu d'une translation absolue, avait lui-même une translation de vitesse v', relativement à un solide (S″) animé d'une translation absolue de vitesse (v''), le mouvement résultant qu'on vient d'obtenir ne serait plus que le mouvement relatif de (S) par rapport à (S″); pour avoir son mouvement absolu, il faudrait encore composer ce premier mouvement résultant avec le mouvement de (S″), et l'on verrait de même qu'on arriverait à une translation dont la vitesse serait la résultante de V et de v'', ou, ce qui revient au même, la résultante de v, v', v''.

Dans le cas d'un nombre quelconque de translations composantes, on pourrait appliquer le même procédé de proche en proche, et l'on arriverait toujours à conclure que le mouvement élémentaire résultant est une translation dont la vitesse est la résultante de celles qui ont lieu dans les translations composantes.

Il est également visible que deux groupes de translations composantes peuvent se remplacer l'un l'autre quand les deux vitesses résultantes sont égales, puisqu'ils donnent lieu au même mouvement résultant.

33. *Composition des rotations autour d'axes parallèles.* — Comme on a déjà pu le voir dans diverses occasions, quand on sait composer deux mouvements, on sait par là même en composer un nombre quelconque. Bornons-nous donc à supposer des rotations autour de deux axes O et O′ (*fig.* 39), perpendiculaires au plan de la figure; leurs vitesses angulaires sont ω et ω', et nous leur supposons d'abord un même sens, indiqué par les flèches. On peut admettre, si l'on veut, qu'un solide (S) tourne autour de l'axe O relativement à un solide (S′) avec lequel il a cette ligne commune, pendant que (S′) tourne autour de la droite fixe O′; il s'agit de trouver le mouvement élémentaire absolu de (S).

Fig. 39.



Dans le mouvement composé ainsi défini, la vitesse relative

et la vitesse d'entraînement d'un point quelconque de (S) sont toutes deux perpendiculaires à la direction commune des axes; il en est par suite de même de leur résultante, vitesse absolue du point. On peut donc dire que toutes les vitesses du mouvement absolu, à un instant quelconque, sont parallèles au plan de la figure, et que par conséquent le mouvement élémentaire absolu se réduit à une rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan (n° 22), c'est-à-dire parallèle aux axes O et O'.

Cherchons maintenant un point de cet axe, ce qui suffit pour le définir, sa direction étant connue. A cet effet, déterminons sur la droite OO' un point A tel qu'on ait

$$(1) \qquad \omega\overline{OA} = \omega'\overline{O'A};$$

ce point aura une vitesse relative $\overline{AB}$ exprimée par $\omega\overline{OA}$, une vitesse d'entraînement $\overline{AC}$ exprimée par $\omega'\overline{O'A}$, et par conséquent une vitesse absolue nulle, puisque ses deux composantes sont dirigées perpendiculairement à OO', directement opposées et égales d'après l'équation ci-dessus. Donc le point A appartient à l'axe instantané demandé. Ainsi deux rotations de même sens autour d'axes parallèles produisent, pour chaque point, la même vitesse résultante qu'une rotation unique autour d'un axe parallèle aux deux premiers, contenu dans leur plan et partageant leur distance en parties inversement proportionnelles aux vitesses angulaires des rotations composantes.

Il reste encore à trouver la vitesse angulaire de la rotation résultante. Pour cela, on remarquera que le point O n'a pas de vitesse relative, et que par conséquent sa vitesse absolue se réduit à la vitesse d'entraînement $\overline{OD} = \omega'\overline{OO'}$. Or, en nommant Ω la vitesse angulaire cherchée, la vitesse absolue du même point O s'exprimerait aussi par $\Omega\overline{OA}$; donc

$$\Omega\overline{OA} = \omega'\overline{OO'} = \omega'(\overline{OA} + \overline{O'A})$$

et par suite

$$\Omega = \omega' + \omega' \frac{\overline{O'A}}{\overline{OA}}$$

ou, en vertu de (1),

$$\Omega = \omega + \omega'.$$

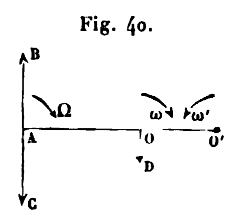
La vitesse angulaire dans le mouvement résultant est donc la somme des vitesses angulaires dans les mouvements composants. Le sens de la vitesse $\omega'\overline{OO'}$ du point O fait d'ailleurs reconnaître que le sens de Ω est le même que celui de ω et ω'.

Rien ne serait changé aux résultats que nous avons trouvés, si les deux rotations ω, ω' permutaient réciproquement les rôles que nous leur avons assignés, c'est-à-dire si la seconde constituait un mouvement relatif et la première un mouvement d'entraînement. Mais il est bon de faire observer que le mouvement élémentaire, pour une position donnée du plan des deux axes, est seul identique dans les deux cas; le mouvement continu du solide diffère complètement. Supposons, par exemple, $\frac{\omega}{\omega'}$ constant; avec notre première hypothèse, le centre instantané de rotation A décrirait dans le plan de la figure autour du centre O' un cercle fixe de rayon O'A, sur lequel roulerait le cercle décrit autour de O avec le rayon OA, lieu des points A dans le solide mobile (n° 23); avec la seconde hypothèse, au contraire, on serait conduit à faire rouler le cercle mobile O'A sur le cercle fixe OA.

Une observation du même genre pourrait être répétée à l'occasion des diverses compositions de mouvements que nous avons à examiner plus loin. Nous nous dispenserons d'y revenir.

Examinons maintenant le cas de deux rotations de sens contraires. Soient toujours O et O' (*fig.* 40) les projections des deux axes, ω et ω' les vitesses angulaires, dont les sens sont indiqués par les flèches; on suppose, par exemple, $\omega > \omega'$. Le mouvement élémentaire résultant a toujours lieu parallèlement à un plan perpendiculaire aux axes, ou au plan de la figure; c'est donc encore une rotation autour d'un axe parallèle à O et O', et il suffit de trouver un point de cet axe ainsi que la vitesse angulaire Ω. Pour cela, on déterminera, sur le prolongement de O'O, du côté de la plus grande rotation, un point A remplissant la condition

Fig. 40.



$$\omega\overline{OA} = \omega'\overline{O'A}; \tag{2}$$

ce point aura une vitesse relative et une vitesse d'entraînement représentées par deux droites $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, directement opposées et égales en vertu de la relation (2); donc il aura une vitesse absolue nulle et sera par conséquent un point de l'axe instantané. Quant à Ω, on l'obtiendra en divisant la vitesse absolue de O, c'est-à-dire $\omega'\overline{OO'}$, par $\overline{OA}$; donc

$$\Omega = \omega' \frac{\overline{OO'}}{\overline{OA}} = \omega' \frac{\overline{O'A} - \overline{OA}}{OA} = \omega' \frac{\overline{O'A}}{\overline{OA}} - \omega'$$

ou, en vertu de (2),

$$\Omega = \omega - \omega'.$$

La vitesse $\omega'\overline{OO'}$ du point O étant représentée par une droite descendante, telle que $\overline{OD}$, on voit en outre que le sens de Ω est celui qu'indique la flèche, c'est-à-dire celui de la plus grande des deux composantes ω et ω'.

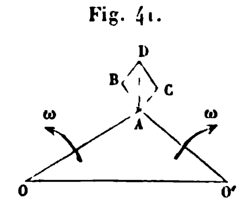
Les deux rotations se composent donc encore en une seule, dont l'axe, parallèle à ceux des rotations composantes, se trouve dans un même plan avec ces axes, en dehors de leur intervalle et du côté de la rotation la plus grande. La vitesse angulaire de la rotation résultante a le sens de cette dernière et une valeur égale à la différence des vitesses angulaires dans les deux rotations composantes.

En remplaçant, dans l'équation (2), $\overline{O'A}$ par $\overline{OA} + \overline{OO'}$, on en tire

$$\overline{OA} = \frac{\omega'\overline{OO'}}{\omega - \omega'};$$

lorsque ω' varie et tend vers ω, on voit que la résultante Ω tend vers zéro; en même temps l'axe A s'éloigne indéfiniment. On a dit (n° 21) qu'une rotation nulle autour d'un axe situé à l'infini est l'équivalent d'une translation. C'est ce qu'on peut, au surplus, reconnaître ici d'une manière directe et bien simple. Prenons en effet un point quelconque A du solide (*fig.* 41) et menons les perpendiculaires AO, AO′ aux deux axes O et O′; soit ω la valeur commune des vitesses angulaires, dont les flèches indiquent les sens respectifs. La

Fig. 41.



vitesse absolue de A est la résultante de deux vitesses, l'une relative, l'autre d'entraînement, représentées par les droites $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$, perpendiculaires à $\overline{OA}$ et $\overline{O'A}$, dont les grandeurs sont $\omega\overline{OA}$ et $\omega\overline{O'A}$; cette résultante coïncide avec les diagonales AD du parallélogramme ABDC construit sur $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$. Or les triangles OAO′, ABD sont semblables; car l'angle A du premier égale l'angle B du second, comme ayant leurs côtés perpendiculaires, et de plus ces angles sont compris entre côtés proportionnels, puisqu'on a

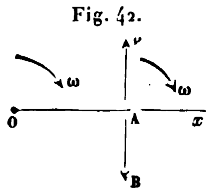
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{O'A}} = \omega.$$

Donc les troisièmes côtés sont aussi perpendiculaires entre eux et dans le même rapport. La vitesse résultante $\overline{AD}$ est donc toujours perpendiculaire au plan des deux axes, parce qu'elle se trouve dans le plan perpendiculaire OAO′ et dirigée perpendiculairement à l'intersection OO′; sa grandeur est toujours $\omega\overline{OO'}$ pour un point quelconque.

L'ensemble de deux rotations égales et contraires se nomme un *couple de rotations*. On voit par ce qui précède que le couple de rotations se réduit à une translation perpendiculaire au plan des deux axes, ayant pour vitesse celle que chaque rotation prise isolément donnerait à l'axe de l'autre. Il est à remarquer que la position du plan des deux axes, la situation des axes dans ce plan, leur direction et même la vitesse angulaire sont indifférentes; pourvu que la direction du plan ne change pas et que la vitesse $\omega\overline{OO'}$ soit conservée en grandeur et sens, le résultat final restera toujours le même.

34. *Composition d'une rotation avec une translation perpendiculaire à son axe.* — Supposons une rotation avec la vitesse angulaire ω autour d'un axe projeté en O (*fig.* 42) sur le plan de la figure; soit v la vitesse de la translation, perpendiculaire à l'axe et par conséquent parallèle à ce même plan. Menons une ligne Ox perpendiculaire à l'axe et à v, et prenons un point quelconque A sur

Fig. 42.



cette ligne, du côté où les vitesses dues à la rotation sont de sens contraire à v. Les sens des deux mouvements étant ceux des flèches, la vitesse résultante du point A aura pour valeur $v - \omega\overline{OA}$ et sera par conséquent nulle si l'on prend $\overline{OA} = \frac{v}{\omega}$.

D'ailleurs l'ensemble des deux mouvements ne produit que des déplacements parallèles au plan de la figure, et l'on sait *a priori* que le mouvement élémentaire résultant sera une rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan ou parallèle à O (n° 11). Cet axe est donc la parallèle à l'axe O menée par le point A, à la distance $\overline{OA}$ déterminée comme on vient de le dire.

La vitesse absolue des points situés sur l'axe O se réduit à v, puisque la composante produite par la rotation s'annule pour eux; la vitesse angulaire autour de l'axe instantané A sera donc $\frac{v}{\overline{OA}}$ ou $\frac{v}{\frac{v}{\omega}}$, ou enfin ω. Il est aisé de reconnaître qu'elle a même sens que la rotation autour de O.

Donc, en résumé, la composition des déplacements élémentaires, produits par une rotation et par une translation perpendiculaire à l'axe de celle-ci, donne lieu à une rotation égale et de même sens autour d'un axe parallèle. Les deux axes sont dans un plan perpendiculaire à la translation; l'axe du mouvement résultant est le lieu des points auxquels la rotation primitive, prise isolément, donnerait une vitesse égale et contraire à celle de la translation.

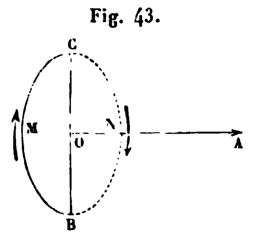
On serait arrivé aux mêmes résultats en remplaçant la translation par un couple de rotations (n° 33), formé d'une rotation égale à ω et de même sens, autour de l'axe A, et d'une rotation contraire autour de l'axe O. Cette dernière aurait détruit la rotation primitive, de sorte que l'autre serait le mouvement résultant.

Réciproquement, si la rotation ω autour de l'axe A était donnée, il est évident que, en supposant autour d'un axe parallèle O, arbitrairement choisi, deux rotations égales et contraires ω et $-\omega$, on ne changerait rien au mouvement primitif. On voit, par conséquent, qu'une rotation autour d'un axe A peut se remplacer par une rotation égale autour d'un axe paral-

lèle quelconque O et par un couple de rotations. Ce couple, formé de la rotation primitive et de la rotation égale et contraire autour du nouvel axe, serait équivalent à une translation perpendiculaire au plan des deux axes; enfin la vitesse de translation serait égale à celle que la rotation primitive autour de A faisait prendre au point O.

35. *Axe représentatif d'une rotation.* — Lorsqu'un corps solide tourne autour d'un axe OA (*fig.* 43), avec une vitesse angulaire ω et dans un sens déterminé, on convient de représenter ce mouvement par une droite qui suffit à en faire connaître tous les éléments caractéristiques. On porte sur l'axe de rotation, à partir d'une origine arbitraire O, une longueur $\overline{OA} = \omega$, dans un sens tel qu'un observateur, ayant la tête en A et les pieds en O, verrait la rotation s'effectuer dans le sens des aiguilles d'une montre.

Fig. 43.



Dans la *fig.* 42, la courbe BMCN est le cercle décrit par un point, BMC et CNB, ses deux moitiés, antérieure et postérieure; l'observateur voit bien tourner de sa gauche à sa droite, sur la première moitié BMC, si la moitié antérieure de son corps est en avant du plan de la figure et l'autre moitié en arrière.

La droite $\overline{OA}$, construite comme on vient de le dire, suffit à définir la position de l'axe, ainsi que la grandeur et le sens de la vitesse angulaire : on la nomme *axe représentatif* de la rotation.

36. *Composition des rotations autour d'axes concourants.*— Soit un solide qui possède, à un instant donné, un mouvement composé de deux rotations ω et ω′, dont $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ (*fig.* 44) sont les axes représentatifs. Quand on veut seulement arriver à connaître le mouvement élémentaire ou les vitesses des divers points à l'instant considéré, il importe peu (comme on l'a déjà dit au n° 33) de spécifier quelle est celle des deux rotations qui constitue le mouvement relatif ou le mouvement d'entraînement; on trouverait le même résultat dans les deux suppositions possibles.

Remarquons d'abord que les déplacements du point O par l'effet des deux rotations ω et ω' sont nuls; le déplacement résultant de ce point est donc aussi nul. Donc le mouvement élémentaire que nous voulons déterminer s'effectue autour d'un point fixe O; c'est donc (n° 24) une rotation autour d'un axe instantané passant par ce point. Secondement, la vitesse absolue doit être nulle pour tous les points de cet axe, et par conséquent ses deux composantes, dues à ω et ω', doivent être égales et opposées. Or, pour un point K en dehors du plan des deux axes, les deux composantes auraient des directions perpendiculaires à deux plans distincts KOA, KOA', et la coïncidence de direction ne s'établirait pas; l'axe de la rotation résultante ne peut donc se trouver que dans le plan AOA'. Ajoutons encore qu'il se trouve dans l'angle OAO' ou dans l'angle opposé; car ces angles renferment tous les points dont les deux vitesses composantes ont des sens contraires. Maintenant il est aisé de voir que le sommet B du parallélogramme OABA', construit sur les deux axes représentatifs $\overline{AO}$, $\overline{AO'}$, a une vitesse absolue nulle, et qu'il est par conséquent situé sur l'axe instantané. Abaissons de B, en effet, les deux perpendiculaires BP et BQ sur les deux axes. Les deux vitesses composantes sont, pour ce point, $\omega'.\overline{BP}$ et $\omega'.\overline{BQ}$, ou $\overline{OA}.\overline{BP}$ et $\overline{OA'}.\overline{BQ}$, quantités égales, car toutes deux expriment l'aire du parallélogramme OABA'; de plus, elles sont dirigées en sens contraires : donc elles se détruisent. Donc l'axe instantané passe en O et en B, et par conséquent il coïncide avec la diagonale OB du parallélogramme.

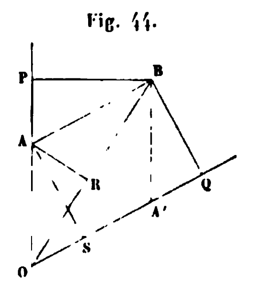


Fig. 44.

Nous avons encore à déterminer la vitesse angulaire Ω de la rotation résultante, en grandeur et en sens. Pour cela, nous remarquons que la vitesse du point A se réduit à la composante produite par ω', c'est-à-dire au produit de ω' par la perpendiculaire AS abaissée de A sur OA', ou enfin au produit $\overline{OA'}.\overline{AS}$, qui exprime l'aire OABA'. Cette aire s'exprime aussi par le produit $\overline{OB}.\overline{AR}$, la droite $\overline{AR}$ étant la distance de A à la diagonale OB. Or Ω est égal (n° 21) au quotient de

la vitesse d'un point quelconque divisée par la distance de ce point à l'axe; donc

$$\Omega = \frac{\overline{OB}.\overline{AR}}{AR} = \overline{OB}.$$

La diagonale $\overline{OB}$ est d'ailleurs bien portée dans le sens voulu pour représenter la rotation Ω (n° 35). En effet, la vitesse $\omega'.\overline{AS}$ du point A doit tendre en arrière du plan de la figure, d'après la convention observée pour le tracé de l'axe donné $\overline{OA'}$; l'observateur couché sur $\overline{OB}$, avec la tête en B et les pieds en O, verra donc bien le point A tourner dans le sens des aiguilles d'une montre.

Ainsi donc le mouvement élémentaire composé qui résulte de deux rotations autour d'axes concourants est une rotation dont l'axe représentatif s'obtient en prenant la diagonale du parallélogramme construit sur les axes représentatifs des rotations composantes.

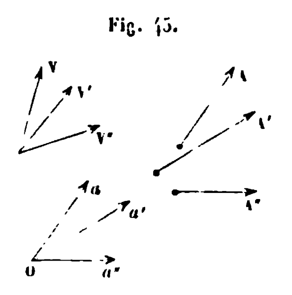
Si l'on avait à composer trois rotations autour d'axes concourants, on pourrait d'abord composer les deux premières, puis composer la résultante avec la troisième. Finalement, on obtiendrait pour mouvement élémentaire résultant une rotation dont l'axe représentatif serait la diagonale du parallélépipède construit sur les axes des rotations composantes.

Pour un nombre de rotations supérieur à deux, les axes étant toujours supposés issus du même point, la composition des mouvements pourrait encore s'effectuer en procédant successivement par deux. Le mouvement élémentaire résultant consisterait toujours en une rotation autour d'un axe passant au point de concours des axes donnés, et l'axe représentatif de cette rotation serait la résultante géométrique des axes représentatifs des rotations composantes.

37. *Composition de mouvements élémentaires quelconques.* — Supposons que le mouvement élémentaire d'un solide soit composé d'un nombre quelconque de translations dont les vitesses sont V, V', V'', ... (*fig.* 45), et d'un nombre quelconque de rotations représentées par des droites A, A', A'', avec des situations également quelconques. Chacune de ces rotations peut se remplacer par une rotation égale autour d'un axe

parallèle mené en un point arbitraire O et par une translation (n° 34); après ce changement, nous aurons : 1° un certain nombre de translations qui, jointes aux translations primitivement données, pourront se réduire à une translation unique (n° 32): 2° des rotations autour d'axes concourants en O, également réductibles à une seule.

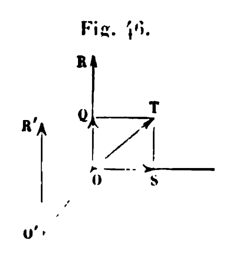
Fig. 45.



Le mouvement élémentaire du solide se trouve donc finalement ramené à la combinaison d'une seule translation avec une seule rotation. La possibilité de le réduire ainsi était connue d'avance (n° 25); elle est confirmée par ce qui précède, en ce qui concerne les mouvements composés, et, de plus, on voit l'ensemble des opérations géométriques à exécuter pour effectuer la réduction.

Si l'on voulait pousser la réduction jusqu'au point de n'avoir qu'un mouvement hélicoïdal, voici ce qu'on pourrait faire. Soient $\overline{OR}$ (*fig.* 46) l'axe représentatif de la rotation résultante et $\overline{OT}$ la vitesse de translation; ces deux lignes sont données par les opérations ci-dessus indiquées. On remplacera la translation par deux autres dont les vitesses seraient $\overline{OQ}$ et $\overline{OS}$, égales aux projections de $\overline{OT}$ sur $\overline{OR}$ et sur une droite perpendiculaire dans le plan TOR. La translation $\overline{OS}$ combinée avec la rotation $\overline{OR}$ donne (n° 34) une rotation égale, représentée par un axe $\overline{O'R'}$ égal et parallèle à $\overline{OR}$, et tellement situé, que le point O prendrait la vitesse $\overline{OS}$ en vertu de la rotation $\overline{O'R'}$. Nous n'avons donc plus finalement que cette dernière rotation, avec la translation $\overline{OQ}$, suivant une parallèle à son axe, ce qui constitue le mouvement hélicoïdal.

Fig. 46.



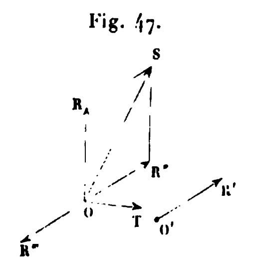
La droite O'R' n'est autre chose que l'axe instantané de rotation et de glissement du solide (n° 25) ou son axe central du mouvement.

Le point O auquel nous avons transporté tous les axes de rotation parallèlement à eux-mêmes est complètement arbitraire; mais, quel que soit ce point, la rotation $\overline{OR}$ ne change pas, car il faut toujours prendre la résultante géométrique des mêmes droites. D'ailleurs $\overline{OT}$ n'est autre chose que la vitesse du point O considéré comme invariablement lié au solide, car cette vitesse résulte de $\overline{OT}$ et d'une seconde composante qui disparaît, puisque c'est la vitesse due à la rotation $\overline{OR}$. En vertu de ce que nous avons démontré au n° 25, nous pouvons donc affirmer : 1° que la projection de $\overline{OT}$ sur OR ne varie pas quand le point O change de position; 2° que $\overline{OT}$ devient minimum en même temps que $\overline{OS}$ s'annule, quand on prend le point O sur O'R'.

Au lieu de ramener le mouvement élémentaire à un mouvement hélicoïdal, nous aurions pu aussi le transformer en deux rotations autour d'axes non contenus dans un même plan. Il suffirait pour cela de remplacer la translation $\overline{OT}$ par un couple de rotations (ω, $-\omega$) contenu dans un plan perpendiculaire à OT, en s'arrangeant pour que l'axe représentatif de ω rencontre $\overline{OR}$. La composition de ω avec $\overline{OR}$ donnerait alors une rotation autour d'un axe oblique au plan du couple, laquelle resterait avec la rotation $-\omega$ contenue dans ce plan.

Réciproquement, supposons données deux rotations représentées par les axes $\overline{OR}$, $\overline{O'R'}$ non contenus dans un même plan (*fig.* 47); il s'agit de réduire ce mouvement composé, autant que faire se peut. Nous n'y changerons rien en ajoutant deux rotations représentées par deux axes égaux et contraires $\overline{OR''}$, $\overline{OR'''}$, dont le premier est égal et parallèle à $\overline{O'R'}$. Or, les deux rotations $\overline{OR}$, $\overline{OR''}$ peuvent se composer en une seule, représentée par $\overline{OS}$, ligne nécessairement hors du plan OR″O′R′, car si elle y était, ce plan serait identique à celui du parallélogramme ORSR″, et les deux axes donnés seraient dans un même plan. Quant aux deux rotations $\overline{O'R'}$, $\overline{OR'''}$, elles forment un couple réductible à une translation $\overline{OT}$ perpendiculaire au plan

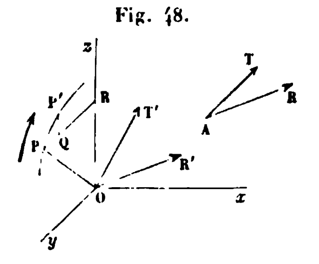
Fig. 47.



$\overline{\text{OR}'}\overline{\text{O}'\text{R}'}$. Il en résulte que $\overline{\text{OT}}$ ne peut pas être perpendiculaire à OS. Dès lors, la combinaison de ces deux mouvements $\overline{\text{OT}}$ et $\overline{\text{OS}}$ ne peut que se ramener à un mouvement hélicoïdal, en employant le moyen ci-dessus indiqué.

38. *Décomposition d'un mouvement élémentaire quelconque en trois translations parallèles à trois axes coordonnés et en trois rotations autour de ces axes.* — Soient Ox, Oy, Oz trois axes de coordonnées, dont l'origine O et les orientations peuvent être choisies comme on voudra. On sait d'abord (nº 25) que le mouvement élémentaire le plus général d'un solide se ramène à une translation accompagnée de rotation. Si $\overline{\text{AR}}$ (*fig.* 48) est l'axe représentatif de cette dernière et AT la translation, nous remplacerons d'abord la rotation $\overline{\text{AR}}$ par une rotation égale autour de l'axe parallèle OR′ (nº 34), et par une translation qui, par sa composition avec $\overline{\text{AT}}$, donnera une translation $\overline{\text{OT}'}$ (nº 32). Il suffira ensuite de substituer à chacun des deux mouvements $\overline{\text{OT}'}$, $\overline{\text{OR}'}$ trois autres mouvements, représentés par les côtés d'un parallélépipède qui aurait ses faces parallèles aux plans coordonnés, avec $\overline{\text{OT}'}$ ou $\overline{\text{OR}'}$ comme diagonale (nºs 32 et 36).

Fig. 48.



39. *Expression analytique de la vitesse d'un point quelconque appartenant à un solide.* — Supposons qu'on effectue la décomposition ci-dessus indiquée (nº 38), en adoptant trois axes rectangulaires; soient a, b, c les trois composantes, suivant les axes Ox, Oy, Oz, de la vitesse de translation $\overline{\text{OT}'} = \text{A}$, et p, q, r les trois composantes de la vitesse angulaire $\overline{\text{OR}'} = \omega$. Dans un temps dt, les translations produiraient sur un point quelconque M, répondant aux coordonnées x, y, z, les déplacements

$$a\,dt,\quad b\,dt,\quad c\,dt,$$

respectivement parallèles aux trois axes. Déterminons aussi ce que produirait chacune des rotations p, q, r considérée

isolément. La rotation p donne au point M un déplacement égal et parallèle à celui de sa projection P sur le plan des yz; ce dernier point décrit un arc de cercle PP' autour de O comme centre, avec $\overline{\text{OP}}$ pour rayon et $p\,dt$ pour angle au centre. La projection de $\overline{\text{PP'}}$ sur Ox est nulle; les projections sur Oy et Oz s'obtiennent au moyen du triangle PP'Q, formé en menant par P la parallèle PQS à Oy, et par P' la parallèle P'Q à Oz. Les triangles PP'Q, POS sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires; de là résultent les égalités

$$\frac{\overline{\text{PP'}}}{\overline{\text{OP}}}=\frac{\overline{\text{QP'}}}{\overline{\text{PS}}}=\frac{\overline{\text{PQ}}}{\overline{\text{OS}}}=p\,dt$$

ou bien

$$\frac{\overline{\text{QP'}}}{y}=\frac{\overline{\text{PQ}}}{z}=p\,dt.$$

La variation de la coordonnée y, ou le déplacement de M en projection sur Oy par l'effet de la rotation p, est

$$-\overline{\text{PQ}}=-pz\,dt;$$

de même le déplacement suivant Oz sera

$$\overline{\text{QP'}}=py\,dt.$$

Nous avons donc

$$0,\quad -pz\,dt,\quad py\,dt$$

comme expressions des déplacements produits par p suivant les axes. Une simple permutation circulaire donnera ceux que produisent q et r, savoir :

$$\begin{array}{ccc} qz\,dt, & 0, & -qx\,dt, \\ -ry\,dt, & rx\,dt, & 0. \end{array}$$

Maintenant, on sait (n°s 28 et 31) que le déplacement élémentaire absolu du point M est la résultante géométrique des déplacements produits par les mouvements composants; sa projection sur chacun des axes est donc la somme algébrique de celles qu'on vient de calculer. En désignant par u, v, w les trois composantes de la vitesse V du point M suivant Ox,

Oy, Oz, et, divisant tous les déplacements par dt, on aura donc

$$(1)\qquad \begin{cases} u = a + qz - ry, \\ v = b + rx - pz, \\ w = c + py - qx, \end{cases}$$

ce qui fait connaître complètement la vitesse V (n° 12).

Remarques. — 1° Lorsque la translation A n'existe pas, ou qu'on veut seulement exprimer les composantes de la vitesse produite par la seule rotation ω autour d'un axe OR′ passant par l'origine des coordonnées, il faut faire $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ dans les équations (1), qui se réduisent dans ce cas à

$$(2)\qquad \begin{cases} u = qz - ry, \\ v = rx - pz, \\ w = py - qx. \end{cases}$$

2° Rien n'oblige à supposer la fixité des axes Ox, Oy, Oz dans l'espace; ils ne sont, en effet, dans les raisonnements et calculs ci-dessus exposés, rien autre chose que trois droites rectangulaires et concourantes, qui servent à faire des projections de lignes et de vitesses à une époque t quelconque, et relativement auxquelles on mesure les coordonnées x, y, z du point dont on s'occupe. Peu importe qu'ils demeurent immobiles ou qu'ils se déplacent suivant une loi quelconque, puisque nous n'en avons considéré qu'une seule position.

Si l'on suppose que les axes restent immobiles, x, y, z varieront en fonction du temps, et les dérivées $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ seront égales (n° 12) aux composantes u, v, w de la vitesse du point M. Si les axes avaient un mouvement quelconque, les mêmes dérivées n'exprimeraient plus que les composantes de la vitesse relative, pour un observateur entraîné avec les axes; elles ne devraient pas être égalées aux seconds membres des équations (1) ou (2), qui expriment toujours, comme on vient de le dire, les composantes de la vitesse absolue.

Souvent on choisit les axes fixes dans le solide; on y trouve cet avantage que x, y, z sont alors, pour chaque point, des quantités ne variant pas avec le temps t, et par suite que u,

v, w ne varient avec t qu'en raison des changements subis par a, b, c, p, q, r.

3° On a supposé, dans les calculs qui ont conduit aux formules (1) et (2), qu'une rotation p (censée positive) autour de l'axe Ox s'effectue dans le sens de Oy vers Oz, et que de même les rotations positives q, r autour de Oy et de Oz s'effectuent respectivement dans les sens de Oz vers Ox et de Ox vers Oy, en suivant toujours le même ordre des lettres

$$x,\ y,\ z,\ x,\ y,\ \ldots.$$

D'un autre côté, les trois grandeurs p, q, r sont obtenues, avec les signes qui leur appartiennent, par la projection, sur chacun des trois axes coordonnés, de l'axe représentatif qui définit la rotation résultante ω; il est donc nécessaire que cette double détermination du signe des rotations composantes conduise à des résultats identiques. Par suite, un spectateur, ayant ses pieds en O et couché successivement sur Ox, Oy, Oz, doit voir s'effectuer dans le sens des aiguilles d'une montre les trois rotations de Oy vers Oz, de Oz vers Ox, de Ox vers Oy. C'est ce qui a lieu quand les axes sont disposés comme dans la *fig.* 48; mais il pourrait en être différemment, et il faut y prendre garde en choisissant les sens positifs des trois coordonnées rectangulaires.

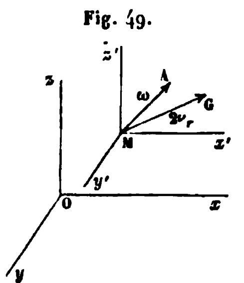
La même observation s'applique aux formules que nous allons démontrer au n° 40 ci-après, en les déduisant des formules (2).

40. *Expressions analytiques des composantes de l'accélération complémentaire d'un point, suivant trois axes rectangulaires fixes dans le système de comparaison.* — Lorsque le mouvement absolu d'un point M résulte de la composition de son mouvement relatif par rapport à un solide ou système de comparaison (S), avec le mouvement d'entraînement de ce système, on a démontré (n° 30) que l'accélération absolue de M est la résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et d'une troisième composante nommée *accélération complémentaire*. En supposant que le mouvement élémentaire de (S) soit décomposé : 1° en une translation identique avec l'arc de trajectoire décrit par son point en

coïncidence avec M à l'époque considérée; 2° en une rotation autour d'un axe passant par ce point, l'accélération complémentaire est égale à la vitesse que prend, en vertu de cette rotation, l'extrémité d'une droite égale au double de la vitesse relative.

Cela posé, soient Ox, Oy, Oz (*fig.* 49) trois axes rectangulaires fixes dans le système de comparaison (S); Mx', My', Mz' des axes parallèles menés par le point de (S), coïncidant avec le point mobile M à l'époque t; $\overline{MG}$ la droite qui représente à cet instant le double de la vitesse relative v_r, et $\overline{MA} = \omega$ l'axe représentatif de la rotation instantanée. Les projections de v_r sur Ox, Oy, Oz, et par conséquent aussi sur les parallèles Mx', My', Mz', s'obtiendront en prenant les dérivées des coordonnées x, y, z du point M relativement au temps; donc les projections de $\overline{MG}$, ou les coordonnées x', y', z' du point G seront

Fig. 49.



$$x' = 2\frac{dx}{dt}, \quad y' = 2\frac{dy}{dt}, \quad z' = 2\frac{dz}{dt}.$$

Si maintenant nous nommons p, q, r les composantes de la vitesse angulaire ω (ou plutôt de son axe représentatif $\overline{MA}$) suivant Mx', My', Mz', les formules (2) du n° 39, où l'on mettra pour x, y, z les valeurs ci-dessus indiquées x', y', z', donneront immédiatement les composantes de la vitesse de G par l'effet de ω, savoir :

$$X' = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$

$$Y' = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),$$

$$Z' = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right);$$

ce sont les composantes de l'accélération complémentaire suivant Mx', My', Mz', ou ses projections sur Ox, Oy, Oz.

Pour l'accélération centrifuge composée (n° 30), il faut prendre les mêmes expressions changées de signe.

De quelque manière qu'on décompose le mouvement d'entraînement de (S) en translation et rotation, cette dernière ne varie pas (n° 25), de sorte que l'axe $\overline{\text{MA}}$ reste constant et conserve les mêmes projections p, q, r sur Ox, Oy, Oz. A ce point de vue, nous pouvons dire qu'il n'y a rien dans les dernières formules qui tienne particulièrement aux axes Mx', My', Mz'; ils nous ont servi pour la démonstration, mais ils deviennent inutiles dans l'application pratique des formules.

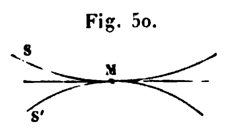
41. *De quelques particularités que peut présenter le mouvement relatif de deux surfaces solides en contact.* — Quand deux surfaces solides se meuvent l'une par rapport à l'autre en restant toujours tangentes, leur mouvement relatif élémentaire peut offrir des particularités auxquelles on a donné divers noms; le sens exact d'une même dénomination varie quelquefois un peu suivant les auteurs, et nous allons en conséquence donner une définition précise de celui que nous adoptons dans chaque cas.

Nous supposerons d'abord un seul point de contact commun aux deux surfaces.

Si le mouvement relatif élémentaire se réduit à une rotation autour d'un axe dirigé suivant la normale commune au point de contact, nous dirons qu'il y a *pivotement*. Le point de contact ne varie ni sur une des deux surfaces ni sur l'autre, et le plan tangent commun conserve la même position; si donc le mouvement relatif se prolonge pendant un temps fini, ce devra être une rotation finie autour d'une droite fixe par rapport à chacune des deux surfaces.

Si le mouvement relatif élémentaire consiste en une rotation autour d'une droite passant par le point de contact et contenue dans le plan tangent commun, nous l'appellerons *roulement simple*. Les deux plans tangents aux surfaces S et S' (*fig.* 50), menés au point de contact M, actuellement confondus en un seul, vont nécessairement, si chacun d'eux reste solidaire avec sa surface, se séparer par l'effet de ce mouvement, après

Fig. 50.



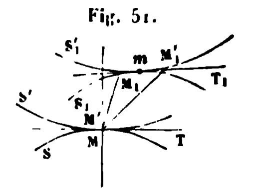
lequel ils feront entre eux un angle égal à celui de la rotation. Les surfaces ne peuvent donc continuer à être tangentes en M, et le point de contact se déplace au moins sur l'une des deux.

Ajoutons tout de suite qu'il se déplace aussi sur l'autre; car, en considérant sur chacune d'elles la courbe lieu des points qui arrivent successivement au contact, on démontrerait, par la répétition exacte des raisonnements du n° 23, que le déplacement du point commun est égal sur les deux courbes, et que celles-ci restent constamment tangentes entre elles. On voit par là que le mouvement relatif de ces courbes présente tous les caractères qui servent ordinairement à définir le roulement en Géométrie; c'est pour cela que nous appliquons le même mot au mouvement relatif des surfaces S, S', en lui ajoutant l'épithète *simple,* pour le distinguer d'un autre, dont nous allons bientôt parler.

Lorsque le mouvement relatif élémentaire se réduit à une translation parallèle au plan tangent commun, nous le nommons *glissement simple.*

Quel que soit le mouvement relatif élémentaire de deux surfaces, on peut toujours le remplacer par une rotation dont l'axe passe au point de contact, accompagné d'une translation (n° 25). Je dis que, si les surfaces doivent continuer à rester tangentes l'une à l'autre, la translation sera nulle ou parallèle au plan tangent. Soient, en effet, S et S' (*fig.* 51) les positions des deux surfaces à une certaine époque, S_1 et S'_1 leurs positions après un temps infiniment petit dt. Les surfaces se touchaient d'abord au point M de S ou M de S'; après le déplacement elles se touchent en m, le point M étant venu en M_1 sur S_1, et le point M' en M'_1 sur S'_1.

Fig. 51.



Ces deux points M_1, M'_1 sont infiniment voisins de m, puisque les trois points se confondent en M à la limite; donc les distances de M_1 et M'_1 au plan tangent en m sont infiniment petites du second ordre, et par conséquent la direction $\overline{M_1M'_1}$ est dans le plan tangent mT_1 (ou bien, à la limite, dans le plan tangent MT en M), à moins que la longueur $\overline{M_1M'_1}$ ne soit aussi du deuxième ordre. Or $\overline{M_1M'_1}$ est le déplacement relatif de M' par rapport à M; c'est aussi le déplacement dû à la

translation dont nous parlions tout à l'heure, car les points M et M′ ne se séparent pas en vertu d'une rotation sur l'axe de laquelle ils sont situés. La translation jouit donc bien de la propriété ci-dessus énoncée; elle s'annule si $\overline{M_1M'_1}$ est du deuxième ordre et, dans le cas contraire, elle a une direction parallèle au plan tangent MT.

La rotation pouvant d'ailleurs se décomposer en deux (n° **36**), l'une autour de la normale commune, l'autre autour d'un axe contenu dans le plan tangent, il en résulte que le mouvement relatif élémentaire des deux surfaces peut toujours être considéré comme composé d'un pivotement, d'un roulement simple et d'un glissement simple. Toutes les fois que ce dernier ne sera pas nul, nous conserverons à l'ensemble le nom *glissement* (sans épithète); ainsi le glissement diffère du glissement simple en ce que ce dernier se réduit à une translation parallèle au plan tangent, tandis que le premier comprend en outre une rotation autour d'un axe passant au point de contact. La translation $\overline{M_1M'_1}$ sera nommée *arc de glissement*, et sa vitesse $\frac{\overline{M_1M'_1}}{dt}$ *vitesse de glissement*. C'est la vitesse relative avec laquelle se séparent les points M et M′, actuellement confondus au point de contact.

Lorsque la translation ou, si l'on veut, le glissement disparaît, mais qu'il reste une rotation autour d'un axe passant par le point de contact et oblique au plan tangent, nous conserverons encore le nom de *roulement* (sans épithète).

Dans ce dernier mouvement, comme dans le roulement simple, on établirait, par la même démonstration, que les courbes, lieux des points des deux surfaces qui arrivent successivement au contact, roulent l'une sur l'autre, en ce sens qu'elles restent toujours tangentes et que le point de contact se déplace également sur chacune d'elles. La démonstration ne suppose effectivement en rien que l'axe de rotation soit une tangente commune aux deux surfaces, mais seulement qu'il passe au point de contact.

Jusqu'à présent nous avons supposé des surfaces qui se touchent en un seul point, et nous n'avons considéré que leur mouvement relatif élémentaire. S'il y avait un nombre quelconque de points de contact, les définitions ci-dessus données

ne s'appliqueraient qu'autant que leurs conditions seraient vérifiées pour chacun de ces points. Il en résulte, par exemple, que le roulement devient impossible quand ces points ne sont pas en ligne droite, car alors aucun axe de rotation ne peut les contenir tous; de même le pivotement ne pourrait se produire simultanément sur plusieurs points, sauf dans le cas où les normales en tous ces points se confondraient toutes en une seule droite.

Enfin, s'il s'agissait d'un déplacement fini, on devrait le considérer comme produit par une suite de mouvements élémentaires, à chacun desquels on donnerait le nom qui lui convient, suivant la classification précédente. Le même nom ne serait conservé pour le mouvement total que si les caractères indiqués par l'une des définitions se rencontraient toujours dans chacun de ces mouvements élémentaires successifs.

CHAPITRE DEUXIÈME.

CINÉMATIQUE APPLIQUÉE.

Nous nous proposons d'étudier dans ce Chapitre :

1° Les dispositions employées pour obliger des pièces solides à prendre soit un mouvement de rotation, soit un mouvement de translation;

2° Les mécanismes au moyen desquels on transforme un mouvement en un autre;

3° Les mécanismes servant à modifier brusquement un mouvement;

4° Les moyens à l'aide desquels on peut soumettre certains mouvements à l'observation, afin d'en découvrir expérimentalement les lois.

Eu égard à l'étendue restreinte que nous voulons donner à cette étude, nos énumérations d'appareils resteront toujours plus ou moins incomplètes. Les procédés de la Mécanique industrielle sont extrêmement nombreux et variés; en outre, ils se modifient sans cesse. Il n'est vraiment pas possible de les résumer tous en quelques Leçons; nous devons par conséquent nous borner à des exemples, en choisissant de préférence les choses qui sont d'un usage fréquent, que l'on retrouve dans presque tous les ateliers, et celles qui se recommandent par un certain intérêt, au point de vue de la théorie pure.

§ I. — Guides du mouvement circulaire et du mouvement rectiligne.

42. *Guides du mouvement circulaire.* — Un corps solide qu'on veut faire tourner autour d'un axe fixe est monté sur un prisme ou cylindre qu'on nomme un *arbre*. L'arbre est con-

struit tantôt en bois, tantôt en métal; dans ce dernier cas, il présente souvent un vide intérieur. Voici diverses dispositions usitées pour l'obliger à tourner autour d'un axe fixe, qu'on cherche à faire coïncider autant que possible avec son axe de figure.

(*a*). *Tourillons et paliers.* — Lorsque l'arbre est horizontal, il se termine ordinairement par des cylindres métalliques pleins, à section circulaire de diamètre plus petit que celui de l'arbre, concentriques à l'axe de rotation, auxquels on donne le nom de *tourillons*. Dans le cas d'arbres métalliques, les tourillons peuvent faire partie de l'arbre ou être rapportés; cette seconde alternative a toujours lieu pour les arbres en bois. Les tourillons présentent des renflements nommés *épaulements,* destinés à les empêcher de glisser sur leurs appuis, dans le sens de l'axe.

Le *coussinet,* servant d'appui fixe à un tourillon, se compose de deux *coquilles* en bronze qui doivent embrasser le tourillon, en laissant entre elles un petit intervalle, afin que l'usure de leur surface intérieure n'empêche pas le tourillon de les toucher. Ces coquilles sont contenues dans le corps du *palier,* qui lui-même repose sur une semelle ou patin fixe. Au-dessus se trouve le *chapeau,* qui maintient les coquilles et les serre contre le tourillon au moyen de boulons.

Le graissage des surfaces frottantes s'opère au moyen d'un godet placé au-dessus du chapeau. Ce godet contient une certaine quantité de graisse, qui fond peu à peu par suite de l'échauffement du métal et vient se répandre sur le tourillon, en suivant d'abord un conduit ménagé dans l'épaisseur de la coquille supérieure, puis des rainures hélicoïdales tracées sur la surface cylindrique.

Dans le palier à graissage continu de M. Decoster, un disque porté par le tourillon traverse, par sa portion inférieure, l'huile contenue dans un réservoir; l'huile entraînée par le frottement se répand sur le tourillon et retombe dans le réservoir, après avoir rempli son office. Le tout est fermé aussi bien que possible, de sorte que l'huile se conserve et n'a besoin d'être renouvelée qu'à de longs intervalles.

(*b*). *Tourillons portés par des roulettes ou galets.* — Quel-

quefois, par exception, les tourillons d'un arbre horizontal reposent chacun sur deux ou trois roulettes ou galets, mobiles chacun autour d'un axe, afin de transformer les glissements qui se produiraient sur des appuis fixes, soit en roulements, soit en glissements de moindre étendue, ce qui a pour effet de diminuer la résistance opposée par les appuis au mouvement de l'arbre. Lorsque celui-ci ne doit prendre qu'un mouvement oscillatoire, on peut remplacer les roulettes par des secteurs dont l'étendue correspond à celle des oscillations. C'est ce qui a été réalisé, par exemple, dans le mode de suspension employé pour la grosse cloche de la cathédrale de Metz.

(*c*). *Pointes d'un tour, œil d'une poulie.* — Un corps qui tourne autour d'un axe horizontal peut être supporté et assujetti par des pointes fixes, qui entrent dans des trous coniques pratiqués dans les corps tournant. Cette disposition s'emploie fréquemment dans l'outil nommé *tour,* qui sert à tailler des surfaces cylindriques convexes.

Quelquefois le corps tournant, roue, poulie ou autre, est percé d'un trou cylindrique nommé *œil,* dans lequel entre, à frottement doux, un essieu ou un arbre, qui peut être fixe, ou avoir un mouvement indépendant de la rotation du premier corps autour de son axe géométrique. Si le trou cylindrique est assez long comparativement à l'épaisseur générale de la poulie ou de la roue, l'espèce de moyeu où il est pratiqué s'appelle *manchon* ou *canon.* L'arbre ou l'essieu porte alors des épaulements pour empêcher le canon de glisser dans le sens de sa longueur.

(*d*). *Pivots et crapaudines.* — Un arbre tournant vertical est ordinairement supporté à sa partie inférieure et assujetti dans sa rotation au moyen d'un pivot, espèce de tourillon, qui fait partie de l'arbre ou lui est invariablement lié. Le pivot entre dans une *crapaudine* qui empêche, au besoin, les écarts de l'arbre dans les sens perpendiculaires à sa direction; la pression du pivot sur la crapaudine s'exerce par l'intermédiaire d'un disque d'acier nommé *grain.* Des agencements convenables permettent de déplacer un peu, soit horizontalement, soit verticalement, la boîte qui contient le grain, afin

de bien maintenir la position de l'arbre en cas d'usure. On remplace le grain quand il est trop usé.

Au lieu du pivot, l'arbre peut porter la crapaudine, et alors le pivot est rendu absolument fixe.

(*e*). *Colliers.* — Pour que la verticalité de l'arbre soit bien assurée, on le fait passer à travers un *collier*. L'arbre, à son passage dans le collier, doit être parfaitement arrondi et centré; le collier le presse par l'intermédiaire d'étoupes graissées, afin de diminuer le frottement.

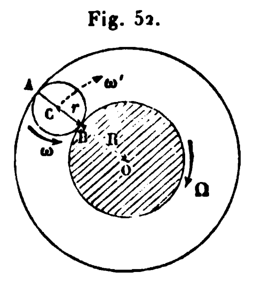
Lorsque la pression réciproque doit atteindre une grande intensité et que l'arbre est d'une certaine grosseur, on ne se sert plus des étoupes, mais on interpose entre l'arbre et les parties fixes du collier une série de roulettes ou galets, dont les essieux sont assujettis à une même couronne mobile. On transforme ainsi le glissement en un roulement, ce qui donne lieu à une résistance moindre, comme on l'a déjà dit.

On peut se rendre compte des rapports qui existent entre les vitesses angulaires de l'arbre, des galets et de la couronne où s'assemblent leurs essieux. Soient

Ω la vitesse angulaire de l'arbre, R son rayon;
ω la vitesse angulaire des galets, r leur rayon;
ω' la vitesse angulaire de la couronne.

Puisque les galets roulent sur la surface fixe du collier, l'axe instantané de rotation de l'un d'eux est la génératrice A (*fig.* 52), suivant laquelle il touche le cylindre fixe extérieur qui lui sert d'appui (n° 41); par suite, la vitesse du point de contact B entre ce galet et l'arbre s'exprime par $2r\omega$. Mais elle s'exprime aussi par $R\Omega$, quand on considère le point B comme appartenant à l'arbre, et il faut que ces deux valeurs soient égales pour que le glissement soit nul en B. Si donc on admet que l'arbre roule effectivement sur le galet, on a

Fig. 52.



$$R\Omega = 2r\omega,$$

ce qui fait connaître le rapport $\frac{\omega}{\Omega}$. Nous remarquerons ensuite que le point C du galet a pour vitesse $r\omega$ ou $\frac{R\Omega}{2}$; cette vitesse est la même pour le point de la couronne en coïncidence avec C, car l'axe du galet reste immobile par rapport à la couronne. La vitesse angulaire ω' de celle-ci dans sa rotation autour de O sera donc

$$\omega' = \frac{R\Omega}{2(R+r)}.$$

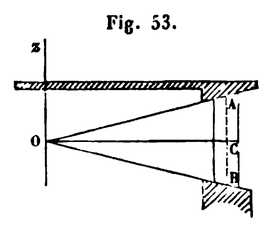
Enfin la rotation relative d'un galet quelconque, par rapport à la couronne, aura pour vitesse angulaire

$$\omega + \omega' = \frac{R\Omega}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R+r}\right) = \frac{\Omega R(R+2r)}{2r(R+r)}.$$

Les deux vitesses ω du galet et ω' de la couronne sont en effet de sens contraires et leurs axes sont parallèles; pour réduire la couronne au repos, on doit appliquer à l'ensemble une vitesse ω' changée de sens, de sorte que le galet possède alors la vitesse angulaire ω, augmentée arithmétiquement de ω'.

(*f*). *Plaques tournantes des chemins de fer.* — Les plaques tournantes des chemins de fer donnent un autre exemple des moyens employés pour assurer le mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe vertical. Outre qu'elle a un pivot cylindrique inférieur qui tourne dans une crapaudine fixe, la plaque repose sur un système de galets coniques tels que AB (*fig.* 53). Pour définir la surface extérieure de AB et celles suivant lesquelles il touche soit le sol fixe, soit la plaque, menons par un point O pris sur l'axe Oz de rotation une horizontale OC et, dans le plan vertical zOC, deux droites OA et OB également inclinées sur cette horizontale. La droite OA tournant autour de OC engendre un cône droit à base circulaire sur lequel on prend la surface du

Fig. 53.



galet AB; la même droite OA, d'une part, et la droite OB, d'autre part, tournant autour de la verticale Oz, engendrent deux autres cônes droits à base circulaire, dont le premier fait corps avec la plaque, le second avec les fondations fixes du système. Les galets roulent sur ces deux cônes à axe vertical. Chaque galet est monté sur un essieu horizontal par rapport auquel il peut tourner comme une roue; l'ensemble des essieux est rendu solidaire par des couronnes réunissant leurs extrémités; l'une de ces couronnes entoure la crapaudine en passant sur elle à frottement doux. Le but qu'on se propose en employant les galets est encore d'éviter les glissements sous une forte pression.

Cherchons, comme dans l'appareil précédent, les rapports entre les diverses vitesses angulaires. Nommons

Ω la vitesse angulaire de la plaque autour de Oz;
ω' celle du système des essieux;
ω celle d'un galet quelconque autour de son axe instantané de rotation;
a l'angle AOC;
x la distance $\overline{OC}$.

On a d'abord

$$\overline{AC} = \overline{CB} = x \operatorname{tang} a,$$

et les distances des points C et A à OB sont égales respectivement à

$$x \sin a \quad \text{et} \quad 2x \sin a.$$

Cela posé, remarquons que, si le galet AB roule sur le cône fixe inférieur, OB est l'axe instantané de rotation de ce galet; donc la vitesse de son point A s'exprime par $2\omega x \sin a$, et ce sera aussi la vitesse du point A de la plaque, dans l'hypothèse où celle-ci ne glisse pas sur le galet (n° 41). Mais la vitesse du point A de la plaque s'exprime aussi par Ωx; donc

$$\Omega = 2\omega \sin a,$$

d'où résulte $\frac{\omega}{\Omega}$. Quant au rapport $\frac{\omega'}{\Omega}$, on le trouve immédiatement en remarquant que le point C, commun à l'essieu

et au galet, va deux fois moins vite que le point A, puisque sa distance à l'axe instantané OB est deux fois plus petite; par suite,

$$\omega' = \tfrac{1}{2}\Omega.$$

Enfin, pour un observateur entraîné avec les essieux, le point A de la plaque aura seulement la vitesse $\frac{\Omega x}{2}$, et le point A du galet une vitesse égale. Comme d'ailleurs ce point est à la distance $x \tang a$ de OC, le galet tournera, relativement à son essieu, avec une vitesse angulaire $\frac{\Omega}{2 \tang a}$ ou $\omega \cos a$, en vertu de la relation trouvée entre Ω et ω.

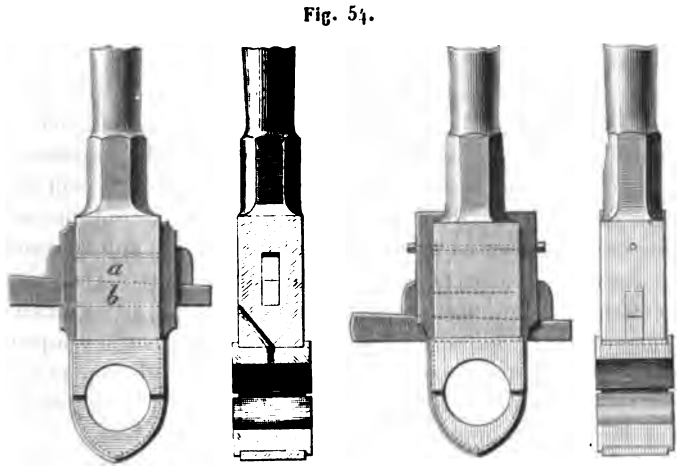
(g). *Articulations mobiles à charnières.* — Il arrive fréquemment que deux corps réunis par une articulation ou charnière sont tous les deux en mouvement. La liaison des deux pièces s'effectue, tout comme si l'une d'elles était fixe, au moyen d'un tourillon qui tourne entre deux coquilles soigneusement polies et graissées; le tourillon est solidaire avec l'un des deux corps et les coquilles avec l'autre. Quant aux pièces dont la fonction est de maintenir les coquilles dans les appareils fixes, elles sont remplacées par diverses dispositions. Voici, comme exemple, celle qu'on emploie pour l'articulation des *bielles*, longues tiges ou barres qui se rencontrent dans divers appareils dont on parlera plus loin.

Les deux coquilles formant coussinet sont portées par la bielle de la manière suivante (*fig.* 54). L'une d'elles est appliquée contre une embase plane terminant le corps de la bielle; la seconde se place ensuite à une petite distance de la première, et la séparation est maintenue par le tourillon qui traverse leur vide intérieur. Une chape en fer entoure extérieurement ces deux coquilles et les fixe à la bielle. Cet ensemble est assujetti à la bielle au moyen de deux coins nommés *clef* et *contre-clef à talons*, ayant le même angle et posés en sens inverse, de manière à rendre parallèles les faces qui ne se touchent pas; ces coins se logent à l'intérieur d'une cavité prismatique pratiquée dans le corps de la bielle. La contre-clef se place la première, puis on enfonce la clef avec force. Les talons de la contre-clef empêchent l'écartement

des deux branches de la chape, et l'enfoncement de la clef produit un serrage convenable entre les diverses pièces.

On distingue deux espèces de tête de bielle : l'une à *chape mobile*, et l'autre à *chape fixe*. Dans la première, la chape n'est liée au corps de la bielle que par la clef et la contre-clef; comme on le voit par la figure, la clef touche seulement la bielle, la contre-clef ne touche que la chape, et les deux corps sont serrés l'un contre l'autre, parce que, en enfonçant la clef, on augmente la distance des faces parallèles *a* et *b*.

Fig. 54.



Chape mobile. Chape fixe.

La contre-clef fait remonter la chape et rapproche le coussinet du corps de la bielle, qui se trouve par là un peu raccourcie. Dans la chape fixe, au contraire, la chape fait un corps pour ainsi dire unique avec la bielle, à laquelle elle est invariablement liée; la clef, en pressant sur le coussinet, l'oblige à s'éloigner de la bielle et allonge par conséquent celle-ci.

Comme la bielle porte toujours des articulations à ses deux extrémités, on établit l'une avec chape mobile et l'autre avec chape fixe, afin que, si l'usure des coussinets oblige de temps à autre à enfoncer les clefs, il ne résulte de là aucune varia-

tion notable dans la longueur totale de la bielle, mesurée entre les deux centres d'articulation.

43. *Guides des mouvements de translation rectilignes.* — Pour guider un corps solide dans un mouvement de translation rectiligne, on emploie :

1° Des rainures et languettes de diverses formes;

2° Des œillets ou douilles glissant le long de tiges fixes, ou inversement des tiges mobiles glissant dans des œillets ou douilles fixes;

3° Des galets cylindriques roulant dans des rainures fixes;

4° Des galets à gorge roulant contre un guide saillant ou entre deux guides saillants;

5° Des roues à rebords, analogues à celles des wagons de chemins de fer, roulant sur des rails.

Nous nous contentons de cette énumération, parce qu'il s'agit ici de dispositions très simples et très connues, dont on a continuellement des exemples sous les yeux.

On pourrait encore faire rentrer dans la même catégorie le parallélogramme de Watt et autres combinaisons de tiges articulées, dont nous aurons à reparler plus loin, en les considérant à un autre point de vue.

§ II. — Classification des transformations de mouvement. Mécanismes de la première classe.

44. *Classification des transformations de mouvement.* — Nous faisons cette classification d'une manière à peu près conforme à celle qui a été adoptée par l'auteur anglais Willis, comme il suit :

Première classe. — Transmission du mouvement d'un corps à un autre, avec un rapport invariable entre les vitesses, et des sens qui soient constants, ou, dans le cas contraire, simultanément variables pour les deux corps.

Deuxième classe. — Elle diffère de la première en ce que le rapport des vitesses est variable.

Troisième classe. — La transmission de mouvement du premier corps au second se fait dans un sens périodiquement

variable pour un des deux et constant pour l'autre; le rapport des vitesses peut être constant ou variable.

Chacune de ces classes sera divisée en trois genres :

Premier genre. — Les deux corps sont en contact immédiat.

Deuxième genre. — Il existe entre les deux corps un lien intermédiaire rigide; par extension, ce lien est supposé pouvoir être remplacé par plusieurs solides articulés entre eux et avec les deux corps à réunir.

Troisième genre. — La transmission a lieu par un lien intermédiaire flexible, tel qu'une corde, une courroie ou une chaîne.

Le tableau suivant, extrait (sauf quelques modifications et retranchements) du *Cours de Mécanique et Machines* de Bour, fait connaître, conformément à la classification ci-dessus, la liste des divers appareils que nous devons passer en revue.

TABLEAU SYNOPTIQUE

DES ORGANES ÉLÉMENTAIRES POUR LES TRANSFORMATIONS DE MOUVEMENT.

	SENS DE LA TRANSMISSION constant ou changeant simultanément pour les deux corps.		SENS DE LA TRANSMISSION périodiquement variable.
	1re CLASSE : Rapport des vitesses constant.	2e CLASSE : Rapport des vitesses variable.	3e CLASSE : Rapport des vitesses constant ou variable.
1er *genre :* Pièces en contact immédiat.	Cylindres et cônes de friction. Engrenages divers. Cames et pilons. Vis et écrous. Vis sans fin.	Cames, courbes roulantes. Roues de Rœmer.	Excentriques à galets, à cadre; cames des marteaux et des pilons.
2e *genre :* Emploi d'un lien rigide ou de plusieurs liens articulés.	Accouplement de roues. Renvois de sonnettes. Tiges et varlets.	Manivelles jointes par une bielle. Joint universel.	Bielles et manivelles. Parallélogramme de Watt et divers autres systèmes articulés. Encliquetages.
3e *genre :* Emploi d'un lien flexible.	Poulies et tambours pour cordes, chaînes et courroies. Treuils et cabestans. Poulies de renvoi, de tension. Moufles et palans.	Tambours coniques réunis par une corde.	

45. *Engrenages cylindriques : théorie générale.* — Dans la première classe et le premier genre, le cas le plus usuel et le plus important est celui de la transmission du mouvement de rotation d'un corps tournant autour d'un axe fixe à un autre corps tournant autour d'un second axe fixe; on peut le subdiviser en trois cas plus particuliers, savoir :

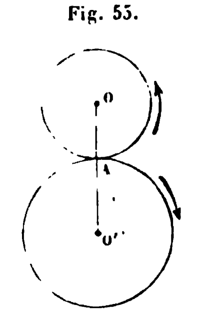
Axes de rotation parallèles;

Axes concourants;

Axes non situés dans un même plan.

Nous allons d'abord supposer les axes parallèles, en nous donnant en outre la condition que les vitesses angulaires sont de sens contraires. Soient O et O′ (*fig.* 55) les intersections des axes par un plan perpendiculaire à leur direction commune, ω et ω′ les deux vitesses angulaires dans les sens marqués par les flèches, vitesses dont le rapport est égal à la quantité donnée $\frac{a}{a'}$. Prenons sur OO′, dans l'intervalle entre O et O′, un point A déterminé par la condition d'avoir

Fig. 55.



$$\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A}} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{a'}{a},$$

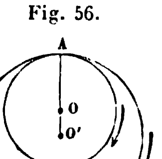
et traçons les circonférences ayant O, O′ pour centres, $\overline{OA}$, $\overline{O'A}$ pour rayons. Ces circonférences rendues solidaires, la première avec l'axe O, la seconde avec l'axe O′, se toucheront constamment au point A de OO′, pendant toute la durée du mouvement. De plus le point A de contact, considéré successivement comme appartenant aux deux circonférences, aura les vitesses $\omega.\overline{OA}$, $\omega'.\overline{O'A}$ égales en vertu de la relation qui définit la position de ce point; ces vitesses ayant de plus une direction commune, suivant la tangente en A aux deux cercles, et le même sens, il en résulte que la vitesse relative des deux points des circonférences actuellement confondus en A est nulle. Donc le point A est, à un instant quelconque, le centre instantané du mouvement relatif élémentaire des deux circonférences, l'une par rapport à l'autre. Par suite, ces circonférences roulent l'une sur l'autre (n° 23) dans leur mouve-

ment relatif. Réciproquement, si les deux circonférences roulent l'une sur l'autre dans leur mouvement relatif, le rapport des vitesses angulaires sera constant; car, pour qu'il y ait roulement, il faut (n° 41) que la vitesse relative des deux points actuellement en contact soit nulle, d'où résulte

$$\omega . \overline{OA} = \omega' . \overline{O'A} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{\overline{O'A}}{\overline{OA}} = \frac{a}{a'}.$$

Si les deux vitesses angulaires étaient de même sens, il faudrait prendre le point A en dehors de l'intervalle $\overline{OO'}$, du côté de la plus grande vitesse angulaire. Soit, par exemple, $\omega > \omega'$; il y aura (*fig.* 56) un point A sur le prolongement de O'O, tel que

Fig. 56.



$$\frac{\overline{OA}}{\overline{O'A}} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{a'}{a}.$$

Si l'on trace ensuite les circonférences ayant O, O' pour centres, $\overline{OA}$, $\overline{O'A}$ pour rayons, et qu'on les rende respectivement solidaires des axes O et O', on voit de la même manière que ces deux circonférences roulent l'une sur l'autre dans leur mouvement relatif, et que, réciproquement, si cette condition du roulement est remplie, les vitesses angulaires demeurent dans un rapport invariable.

Ces considérations conduisent à une première solution du problème consistant à transmettre le mouvement de l'un des axes à l'autre, sous la condition de conserver $\frac{\omega}{\omega'}$ constant. Imaginons, en effet, que les circonférences OA et O'A sont les sections droites de deux cylindres ayant leurs génératrices parallèles aux axes de rotation et respectivement solidaires avec ces axes. Ces deux cylindres roulent l'un sur l'autre, tout comme leurs sections droites; et réciproquement, si ce roulement existe, il y a un rapport constant entre les vitesses angulaires. Il suffit donc, pour résoudre le problème, d'obliger ces cylindres à prendre un mouvement relatif de roulement l'un sur l'autre. On y parvient en établissant entre eux, par des moyens faciles à concevoir, une pression mutuelle suffisante:

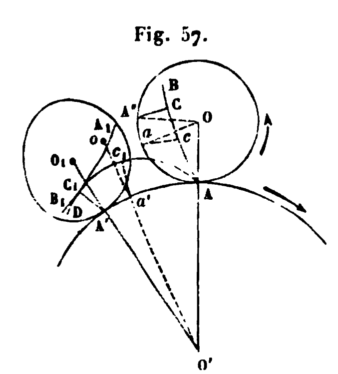
il en résulte un frottement ou adhérence qui empêche les surfaces de glisser l'une sur l'autre. On obtient ainsi l'appareil nommé *cylindres de friction*.

Dans le cas de la *fig.* 55, on aurait deux cylindres convexes; dans le cas de la *fig.* 56, le cylindre convexe OA serait à l'intérieur du cylindre concave O'A. Il faudrait toujours, bien entendu, que ces surfaces cylindriques fussent prises sur des corps matériels d'une certaine épaisseur, de manière à présenter une rigidité suffisante.

Les cylindres de friction n'assurent pas complètement la transmission de mouvement de l'un des deux axes à l'autre, car il y a glissement dès que la résistance à vaincre dépasse une certaine limite; aussi préfère-t-on généralement adapter aux cylindres OA, O'A des parties saillantes et rentrantes, formées par des portions d'autres surfaces cylindriques, ayant encore leurs génératrices parallèles aux axes, et tellement dessinées que la transmission devienne obligatoire. Les cylindres OA, O'A se nomment *cylindres primitifs* et leurs sections droites *circonférences primitives;* les parties ajoutées sont les *dents,* et l'ensemble constitue un *engrenage cylindrique* comprenant deux *roues.* Dans le cas de la *fig.* 55, l'engrenage est dit *extérieur;* il est, au contraire, *intérieur* si l'une des circonférences primitives se trouve renfermée à l'intérieur de l'autre, comme dans la *fig.* 56.

Le rapport des vitesses angulaires devant toujours rester constant, les circonférences primitives doivent encore rouler l'une sur l'autre dans leur mouvement relatif; pendant ce roulement, les profils de deux dents conjuguées sur les deux roues restent en contact, puisqu'il faut que l'un oblige l'autre à se déplacer. Ainsi donc, soient O et O' les deux axes (*fig.* 57), AB le profil des dents sur la roue O, AD le profil conjugué sur la roue O'; si l'on donne à la circonférence primitive OA son mouve-

Fig. 57.



ment relatif de roulement sur la circonférence primitive O'A, supposée immobile, la première circonférence entraînant avec elle la courbe AB, cette courbe devra, dans toutes ses positions, rester tangente à la courbe AD, et par conséquent AD est l'enveloppe des positions prises par AB dans le déplacement relatif dont on vient de parler.

Cela posé, représentons la nouvelle position prise par la circonférence OA, après qu'elle aura roulé de manière que l'arc AA″, de grandeur quelconque, se soit appliqué sur l'arc de même longueur AA′. Dans cette position O_1A_1, le point de contact A′ est le centre instantané de rotation du mouvement relatif, et l'on sait (n° 22, *c*) qu'il se trouve sur la normale commune menée à l'enveloppe et à l'enveloppée, au point correspondant où elles se touchent. Si donc nous traçons dans la circonférence O_1A_1 la courbe A_1B_1, nouvelle position de AB après le roulement, et si nous abaissons de A′ la normale $A'C_1$ sur A_1B_1, le pied C_1 de cette normale sera le point où AD doit toucher A_1B_1. En répétant un certain nombre de fois la même construction, pour diverses positions de la circonférence roulante OA, on aurait autant de points qu'on voudrait de la courbe AD, avec les normales correspondantes; donc on peut déterminer l'un des deux profils conjugués, quand on se donne l'autre.

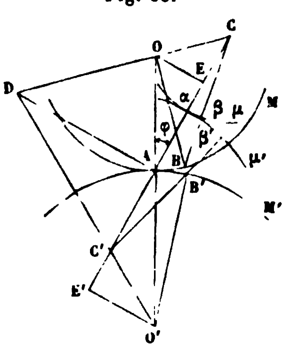
La construction qu'on vient d'indiquer présente l'inconvénient d'exiger le tracé de la courbe AB dans une série de positions différentes; mais il est facile de l'éviter. On peut, en effet, abaisser de A″ la normale A″C sur AB; quand, par l'effet du roulement, A″ sera venu en A′ et que AB coïncidera avec A_1B_1, A″C devra coïncider avec $A'C_1$. Comme, de plus, le rayon OA″ se sera placé dans le prolongement de O′A′, on voit qu'on aura le point C_1 en traçant, à partir de A′, la droite $\overline{A'C_1} = \overline{A''C}$, qui fait, avec le rayon O_1A', l'angle $O_1A'C_1 = OA''C$. On reporterait de même la normale ac abaissée d'un autre point quelconque en $a'c_1$; il faudrait prendre arc $Aa' =$ arc Aa, $\overline{a'c_1} = \overline{ac}$, angle $oa'c_1 =$ angle Oac.

Souvent, dans la pratique, au lieu de construire les normales $A'C_1$, $a'c_1$, ..., on se borne simplement à décrire, des points $A'a'$, ... comme centres, des arcs de cercle ayant pour rayons respectifs $\overline{A''C}$, $\overline{ac}$, ...; l'enveloppe de tous ces cercles

est ensuite tracée approximativement et donne la courbe AD avec une exactitude suffisante.

46. *Théorème et construction de Savary.* — Cet auteur a donné un théorème et une construction géométrique simple, par laquelle on obtient sans peine le rayon de courbure de la courbe enveloppe AD, connaissant les rayons de courbure des circonférences primitives et de la courbe AB.

Fig. 58.



D'une manière générale, supposons une courbe mobile AM (*fig.* 58) qui roule sur une courbe fixe AM', en entraînant une courbe $\alpha\mu$ dont l'enveloppe est $\alpha\mu'$. Actuellement les points de contact sont A et α, et la droite $A\alpha$ est la normale commune aux courbes $\alpha\mu$, $\alpha\mu'$. Soient, en outre, O et O' les centres de courbure répondant au point A de AM et de AM', C et C' les centres de courbure pour le point α de $\alpha\mu$ et $\alpha\mu'$. Désignons par

R, R' les rayons de courbure $\overline{OA}$, $\overline{O'A}$;
ρ, ρ' les rayons de courbure $\overline{C\alpha}$, $\overline{C'\alpha}$;
p la longueur $\overline{A\alpha}$ entre le centre instantané de rotation A et le point α commun à l'enveloppe et à l'enveloppée;
φ l'angle de la normale $A\alpha$ avec OO'.

Il existe entre ces six quantités une relation que nous allons établir. Pour cela, supposons un déplacement infiniment petit de la figure $AM\alpha\mu$, en vertu duquel les points B et B' arriveront à se superposer, les arcs $\overline{AB}$, $\overline{AB'}$ ayant une même longueur ds. Après ce déplacement, la normale OB se placera en prolongement de O'B', et par conséquent l'angle de rotation sera celui de ces deux droites, soit BOA + B'OA, ou enfin

$$ds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right).$$

On peut l'exprimer autrement. En effet, la normale Bβ abais-

sée de B sur $\alpha\mu$ va passer au centre de courbure C, puisqu'elle est infiniment voisine de $A\alpha$; par une raison toute semblable, la normale $B'\beta'$ abaissée de B′ sur $\alpha\mu'$ passe au centre de courbure C′. Ces lignes doivent aussi se confondre quand B arrivera en B′, pour donner la position de la nouvelle normale commune abaissée du centre instantané B′ sur les deux courbes; donc l'angle de rotation est aussi égal à celui des deux droites BC, C′B′ ou à ACB + AC′B′. Or la perpendiculaire abaissée de B ou B′ sur CC′ a pour valeur $ds\cos\varphi$, et son pied est séparé de C et C′ par les distances $\rho + p$, $\rho' - p$, en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve; donc l'angle de rotation s'exprime encore par

$$ds\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho+p}+\frac{1}{\rho'-p}\right).$$

L'égalité des deux expressions qu'on vient de trouver pour une même quantité conduit, en supprimant le facteur ds, à la relation

$$(1)\qquad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\cos\varphi\left(\frac{1}{\rho+p}+\frac{1}{\rho'-p}\right),$$

qui constitue le théorème de Savary, et qui permet de trouver ρ' quand les autres quantités sont données.

Savary a traduit la relation (1) par une propriété géométrique fournissant une construction simple et élégante de la longueur ρ'. Menons en A la perpendiculaire AD à CC′ et joignons CO, C′O′; les trois droites ainsi définies se coupent en un même point D. Pour le prouver, abaissons de O et O′ les perpendiculaires OE, O′E′ sur CC′; puis désignons par D et D′ les points de rencontre de AD avec CO et C′O′, points que nous commençons par ne pas supposer confondus. Nous aurons

$$\overline{OE}=R\sin\varphi,\quad \overline{O'E'}=R'\sin\varphi,$$

$$\overline{AE}=R\cos\varphi,\quad \overline{AE'}=R'\cos\varphi;$$

les triangles semblables COE, CDA, d'une part, C′O′E′,

C′D′A, d'autre part, donnent ensuite

$$\overline{AD} = R\sin\varphi \frac{\overline{CA}}{\overline{CA} - \overline{AE}} = R\sin\varphi \frac{\rho + p}{\rho + p - R\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\frac{1}{R} - \frac{\cos\varphi}{\rho + p}},$$

$$\overline{AD'} = R'\sin\varphi \frac{\overline{C'A}}{\overline{AE'} - \overline{C'A}} = R'\sin\varphi \frac{\rho' - p}{R'\cos\varphi - (\rho' - p)} = \frac{\sin\varphi}{\frac{\cos\varphi}{\rho' - p} - \frac{1}{R'}}.$$

Or la relation (1) peut s'écrire

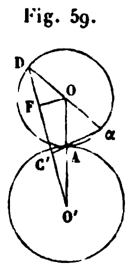
$$\frac{1}{R} - \frac{\cos\varphi}{\rho + p} = \frac{\cos\varphi}{\rho' - p} - \frac{1}{R'};$$

donc $\overline{AD} = \overline{AD'}$ et les points D et D′ n'en font qu'un seul, comme nous l'avions annoncé.

Si maintenant on suppose donnés les centres de courbure O, O′ et C, pour avoir C′ on mènera AD perpendiculaire à la ligne connue AC et l'on joindra CO; puis on joindra O′ avec le point de rencontre D de CO avec AD. La rencontre de O′D avec CA donnera le centre de courbure C′.

La même construction est applicable quand il s'agit de trouver le centre de courbure de la courbe engendrée par un point invariablement relié à la courbe roulante M. La courbe $\alpha\mu$ est alors censée réduite à un cercle de rayon infiniment petit; les points α et C se confondent et l'on doit faire $\rho = 0$ dans les calculs précédents. Si, par exemple, on veut avoir le centre de courbure C′ (*fig.* 59) de l'épicycloïde engendrée par le point α du cercle O roulant sur le cercle O′, il faudra tracer les lignes αA et αO; le point de rencontre de cette dernière avec la perpendiculaire menée en A à Aα sera le point D diamétralement opposé à α. La rencontre de O′D avec le prolongement de αA donnera le point cherché C′.

Fig. 59.



Maintenant menons par O la parallèle OF à αA; on aura

$$\overline{OF} = \tfrac{1}{2}\overline{\alpha C'} = \tfrac{1}{2}\rho';$$

puis les triangles semblables FOO′, C′AO′ donneront

$$\tfrac{1}{2}\rho' = \overline{AC'}\,\frac{\overline{OO'}}{\overline{AO'}}$$

ou, en posant $p = \overline{A\alpha}$, $R = \overline{AO}$, $R' = \overline{AO'}$,

$$\tfrac{1}{2}\rho' = (\rho' - p)\,\frac{R + R'}{R'}.$$

On tire facilement de là

$$\rho' = p\,\frac{2(R + R')}{2R + R'}.$$

On voit par conséquent que le rayon de courbure ρ' est égal à la normale p amplifiée dans le rapport constant $\frac{2(R + R')}{2R + R'}$.

La disposition de la *fig.* 58 pourrait être telle que la relation (1) ne fût plus exacte, à moins de changer les signes d'une ou plusieurs des lignes R, R′, ρ, ρ', p. Nous n'entreprendrons pas la discussion de ces changements.

47. *Du glissement pendant le mouvement relatif élémentaire de deux dents en contact, dans un engrenage cylindrique.* — On vient de voir que l'angle de la rotation relative élémentaire s'exprime, avec les notations du n° 46, par $ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$; il en résulte que le déplacement relatif des deux points actuellement confondus en α (*fig.* 58) sera

$$p\,ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

C'est la valeur de l'arc de glissement (n° 41).

Si les deux courbes qui roulent l'une sur l'autre, au lieu d'avoir leurs convexités opposées comme dans la *fig.* 58, se touchaient intérieurement comme les deux cercles de la *fig.* 56, l'angle de la rotation relative élémentaire ne serait plus la somme, mais bien la différence des angles de contingence $\frac{ds}{R}$

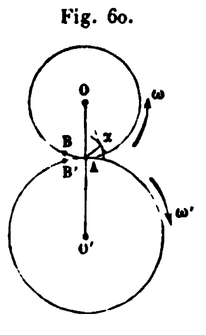
et $\frac{ds}{R'}$, de sorte que l'arc de glissement aurait pour valeur

$$pds\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right),$$

en supposant $R < R'$.

L'arc de glissement de deux dents conjuguées d'un engrenage peut encore s'exprimer autrement. Supposons, par exemple, le cas de deux circonférences primitives extérieures l'une à l'autre, et soient ω et ω' les vitesses angulaires autour des axes O, O' (*fig.* 60). Ces circonférences sont munies de dents qui se touchent actuellement en α et ont pour normale commune la droite αA, joignant α avec le point A commun aux circonférences primitives, sur la ligne des centres. Si, après un temps infiniment petit dt, les points B et B' doivent arriver au contact en A, il faudra faire

Fig. 60.



$$ds = \overline{AB} = \overline{AB'} = R\omega dt = R'\omega' dt;$$

par suite, on aura pour l'arc de glissement

$$pds\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) = p(\omega+\omega')\,dt.$$

On trouverait de même, dans le cas d'un contact intérieur, l'expression

$$p(\omega-\omega')\,dt,$$

ω étant supposée la plus grande des deux vitesses angulaires.

On arriverait aux mêmes résultats en remarquant que le mouvement relatif de la roue O par rapport à O' résulte, à chaque instant, de la composition de la rotation ω avec la rotation ω' changée de sens. Après ce changement, si l'on suppose les circonférences primitives se touchant extérieurement, comme dans la *fig.* 60, les deux rotations ont toutes les deux le sens de ω et donnent une résultante $\omega+\omega'$, de même sens, autour de l'axe parallèle passant au point A, qui divise la distance OO' en parties inversement proportionnelles aux vitesses

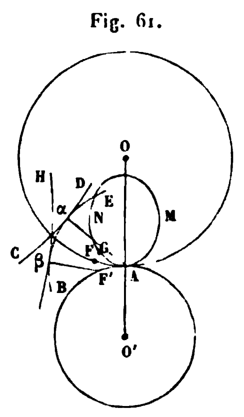
angulaires (nº 33). La vitesse relative avec laquelle le point α du cercle O quitte le point α du cercle O′, c'est-à-dire la vitesse de glissement (nº 41), est donc $\overline{A\alpha}\,(\omega + \omega')$ ou $p\,(\omega + \omega')$, et l'arc de glissement sera par conséquent $p\,(\omega + \omega')\,dt$, comme on l'a déjà trouvé par une autre méthode.

Il n'y aurait aucune difficulté à modifier cette démonstration pour l'adapter au cas du contact intérieur.

48. *Autre méthode pour le tracé des engrenages cylindriques.* — La méthode générale indiquée au nº 45 s'appelle *méthode des enveloppes;* il en est une autre qu'on nomme *méthode des roulettes,* et que nous allons faire connaître maintenant. Elle permet de déterminer les deux profils conjugués des dents par des opérations tout à fait semblables sur les deux roues.

Soient O et O′ (*fig.* 61) les circonférences primitives, se touchant en A sur la ligne des centres et touchées en ce même point par une courbe auxiliaire MAN, arbitrairement choisie. Si l'on fait rouler cette courbe MAN d'abord sur la circonférence O, puis sur la circonférence O′, un point quelconque α invariablement lié à MAN tracera, dans ces deux mouvements successifs, deux courbes CαD, BαE, qui seront des profils conjugués, satisfaisant à la condition essentielle (nº 45) de rester toujours tangents pendant que les circonférences primitives roulent l'une sur l'autre.

Fig. 61.



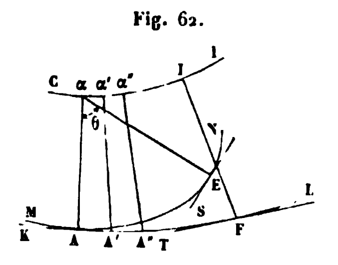
Supposons, en effet, que, le cercle O′ avec son profil de dent BE restant fixe, on fasse rouler le cercle O de manière à amener successivement chacun de ses points, tel que F, en un point correspondant F′ sur le cercle O′, et que simultanément on fasse rouler MAN sur la même circonférence O′, de sorte que G vienne s'appliquer sur F′ en même temps que F; les trois arcs AF, AF′, AG devront être égaux, et il en résulte que MAN roule aussi sur le cercle O, dans son mouvement par rapport à ce cercle. Quand F et G seront sur F′, le point

décrivant α aura pris une position β sur la courbe fixe BE; ce point β appartiendra aussi à la nouvelle position BH prise par la courbe CD entraînée avec O, car, pendant tout le déplacement, MAN a roulé sur la circonférence O, et le point décrivant α n'a pas quitté sa trajectoire relative CD. Donc les deux profils ont toujours un point commun (le point décrivant); de plus, ils sont tangents en ce point; car, lorsque G, F, F′ sont confondus, F′ est centre instantané de rotation dans le mouvement absolu de MAN et dans le mouvement de cette courbe par rapport au cercle O, d'où il suit que F′B est à la fois normale à la trajectoire absolue BE du point α et à sa trajectoire relative βH.

Au fond, les deux méthodes ne sont pas distinctes, et toute solution fournie par l'une d'elles peut également s'obtenir par l'autre. C'est ce qui deviendra évident si nous démontrons que, étant donné un profil arbitraire CD sur le cercle O, nous pouvons toujours trouver une courbe MAN, telle qu'un point α invariablement lié avec elle parcoure la courbe CD, pendant qu'on fait rouler MAN sur la circonférence O; le profil conjugué n'étant pas arbitraire, mais bien déterminé, les deux méthodes devront nécessairement le faire retrouver sans changement et conduire ainsi au même résultat final.

Plus généralement, remplaçons la circonférence O par une courbe quelconque KL (*fig.* 62), à laquelle nous imposerons seulement pour condition d'être rencontrée par les normales de la courbe CD. On remarquera que cette condition doit être remplie par la circonférence O, puisque la normale commune aux deux profils conjugués vient sans cesse passer par le point de contact des deux circonférences primitives (n° 45). Menons les normales à CD en une série de points infiniment voisins α, α', α'', ..., et soient A, A′, A″, ... les points où ces normales coupent la courbe KL; imaginons enfin une figure plane à laquelle α serait invariablement lié. Nous pourrons faire tourner cette figure autour du centre instantané de rotation A, de manière à faire décrire au point

Fig. 62.



α l'élément $\overline{\alpha\alpha'}$ perpendiculaire à la droite $A\alpha$; puis nous ferons tourner autour de A', de manière à faire décrire au même point mobile l'élément $\overline{\alpha'\alpha''}$, et ainsi de suite. Le mouvement que nous aurons donné à la figure plane aura lieu dans son plan, et l'on sait (n° 23) que ce mouvement peut toujours être produit par le roulement d'une certaine courbe liée à la figure mobile, sur le lieu KL des centres instantanés de rotation. L'existence de la courbe roulante, capable d'engendrer la courbe donnée CD par un point α de son plan, se trouve ainsi rigoureusement démontrée.

Soient MN cette courbe et E un quelconque de ses points; nous allons chercher une relation entre la distance $\overline{\alpha E} = r$ et l'angle $E\alpha A = \theta$, ce qui donnera l'équation polaire de la courbe. A cet effet, prenons sur la courbe KL le point F où E doit arriver par l'effet du roulement. Quand cela aura lieu, le point décrivant α sera venu se placer au pied I de la normale abaissée de F sur CD; par conséquent, $\overline{\alpha E}$ se sera superposé à $\overline{IF}$ et l'on a

$$r = \overline{IF}.$$

D'un autre côté, MN devant toucher KL en E, on aura aussi

$$r\frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tang} \alpha ES = \operatorname{tang} IFT.$$

Or, puisque les courbes CD et KL sont données, la longueur IF et l'angle IFT sont fonctions d'une seule variable (par exemple la longueur $\overline{\alpha I}$) qui définirait la position du point I sur CD; il existe donc entre ces deux quantités une relation telle que

$$\operatorname{tang} IFT = f(\overline{IF}),$$

f étant une fonction connue. Par suite, on aura

$$r\frac{d\theta}{dr} = f(r),$$

d'où résulte, en nommant r_0 la valeur $A\alpha$ du rayon vecteur qui répond à $\theta = 0$,

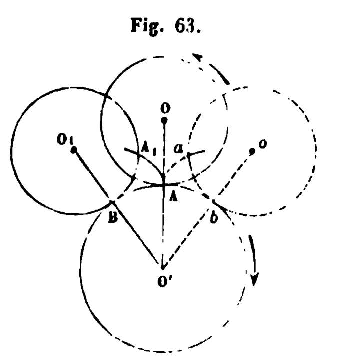
$$\theta = \int_{r_0}^{r} \frac{1}{r} f(r)\,dr;$$

c'est l'équation demandée.

49. *Profils d'engrenages cylindriques usités dans les machines.* — Les profils ordinairement employés pour les roues d'engrenages cylindriques sont compris dans trois types que nous allons faire connaître, en supposant d'abord le cas d'engrenages extérieurs.

(*a*). *Engrenage à lanterne.* — Imaginons fictivement que sur la circonférence primitive O (*fig.* 63) le profil des dents se réduise à un point A. Si l'on veut que ce point soit conduit au delà de la ligne des centres de A vers A', par le profil conjugué appartenant à la circonférence primitive O', il faut remarquer que la suite des positions de O relativement à O' rendue fixe s'obtiendra en faisant rouler O en arrière, vers O_1. Le point A engendre alors une portion d'épicycloïde AA_1, qui est sa propre enveloppe, et fournit par conséquent le profil conjugué. Si l'on avait voulu que ce profil commençât à pousser le point A avant la ligne des centres, il aurait fallu faire rouler la circonférence O à partir d'une position *o* prise de l'autre côté de OO', le point A étant en *a*. Ce point engendre alors la branche d'épicycloïde *a*A, se raccordant avec la première par un rebroussement. On voit par là qu'il est impossible qu'une roue conduise l'autre des deux côtés de la ligne des centres, car on ne peut construire pratiquement des dents qui présenteraient une discontinuité de ce genre.

Fig. 63.

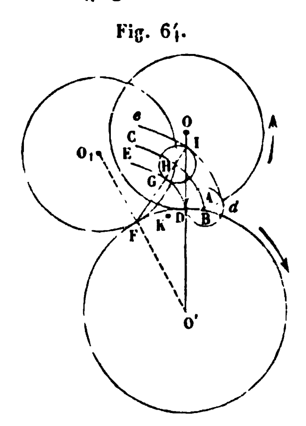


Il y a plus, la branche A*a* ne saurait être adoptée pour conduire la dent A avant la ligne des centres : 1° parce que cette branche presserait le point A par sa concavité et que cette dent concave ne se prêterait pas à être établie pratiquement dans de bonnes conditions ; 2° parce que le point A, une fois arrivé à la ligne des centres, devrait, si l'engrenage continuait à fonctionner régulièrement en vertu de l'action de deux autres dents, se déplacer suivant AA_1 par rapport au cercle O', ce qui ne pourrait se réaliser, puisqu'il faudrait pour cela que

ce même point A pénétrât dans le plein de la dent A *a*. On voit par là que la roue O′ portant les dents épicycloïdales ne devra conduire la roue O, en agissant sur son point A, qu'au delà de la ligne des centres. En changeant le sens du mouvement des deux roues, le point A pousserait l'épicycloïde AA_1 et la roue O mènerait alors la roue O′ avant la ligne des centres.

Revenons maintenant à la réalité en donnant une certaine épaisseur à la dent A, que nous avions réduite à un point, et remplaçant ce point par un cercle de rayon *r* dont A serait le centre (*fig.* 64). La circonférence O roulant sur la circonférence O′ rendue fixe, le point A engendre encore une portion d'épicycloïde AHC; lorsque O sera en O_1 et le point décrivant A en H, si l'on mène FH, cette droite sera tout à la fois la normale en H à l'épicycloïde et la normale abaissée de F sur la circonférence H. Donc les points I et G sont ceux où cette circonférence touche son enveloppe; par suite, cette enveloppe peut s'obtenir en allongeant ou raccourcissant d'une quantité constante $\overline{HI} = \overline{HG} = r$ toutes les normales à l'épicycloïde. On obtient ainsi deux courbes DE, *de*, parallèles à AC et ayant même développée que cette dernière. Comme on sait que la développée d'une épicycloïde est une autre épicycloïde, on peut définir les courbes DE, *de*, en disant que ce sont des développantes d'épicycloïde. Ces deux courbes DE, *de* resteront en contact avec la circonférence A, dans le mouvement réel des roues, au delà de la ligne des centres, si les vitesses angulaires ont les sens indiqués sur la figure; mais la courbe *de* ne peut être conservée, puisqu'elle conduirait à une dent concave. La courbe DE, au contraire, peut pousser la circonférence A.

Fig. 64.



Si l'on renverse les sens des deux rotations, la circonférence A et la courbe DE formeront encore des profils conjugués admissibles; seulement la circonférence poussera la courbe au

lieu d'être poussée par elle. Dans le premier cas, O' était la roue menante et O la roue menée; dans le second, c'est l'inverse.

Dans la position A, la circonférence touche la courbe en D. En cherchant les points de cette courbe qui répondent à l'arc AB de l'épicycloïde, on trouverait qu'à partir de D la courbe ED commence par entrer dans le cercle O'. En effet la construction indiquée au n° 46, pour avoir le centre de courbure de l'épicycloïde répondant au point A, donnerait un point K intérieur au cercle O'; ce point K étant aussi le centre de courbure pour le point D de DE, la courbe DE peut, aux environs de D, se remplacer par un arc de cercle ayant KD pour rayon, lequel arc coupe la circonférence O' et entre dans son intérieur, en continuant à tourner sa convexité du même côté. On voit par là qu'en prolongeant ED il serait possible de faire commencer le contact des dents un peu à gauche de OO'; mais ce serait toujours sur une petite étendue, car le prolongement intérieur de ED ne tarderait pas à présenter un rebroussement qui rendrait son emploi impossible comme profil de dent. On peut donc dire que le contact a lieu presque entièrement d'un seul côté de la ligne des centres, avant ou après, suivant le sens des rotations.

C'est là un inconvénient de ce genre d'engrenages. En effet, quand il est possible de faire commencer le contact avant la ligne des centres et de le terminer au delà, on conçoit que, à égalité de l'angle total décrit par chaque roue pendant le contact de deux dents, ces dents s'écartent le moins possible de la ligne des centres, et par conséquent on diminue autant que possible la plus grande valeur de la normale menée aux deux profils par le point de contact des circonférences primitives. Donc on diminue le glissement (n° 47), et l'on verra plus tard, quand nous étudierons les forces mises en jeu dans les engrenages, que cette circonstance est avantageuse.

Ajoutons encore que, si le contact doit avoir lieu d'un seul côté de la ligne des centres, il vaut mieux que ce soit après qu'avant; nous le prouverons aussi dans la suite. Il faut donc avoir soin de placer les cercles A sur la roue menée.

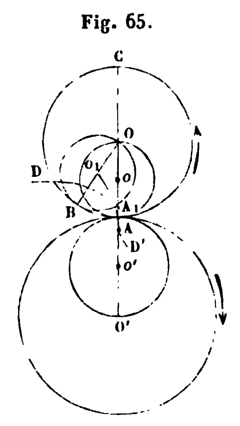
La roue O porte un certain nombre de cercles égaux à A, régulièrement distribués sur son pourtour. Ces cercles sont

les sections droites de cylindres pleins, ordinairement en métal, qu'on nomme des *fuseaux*. Les fuseaux s'assemblent dans deux plateaux circulaires et le tout prend le nom de *lanterne*. Le plus souvent la roue O′ est de diamètre plus grand que la roue O; elle peut être en métal ou en bois. Si les dents sont en bois, il faut les construire en bois dur. Ces dents de bois, implantées dans la jante de la roue O′, se nomment les *alluchons*.

Ce genre d'engrenages est très peu employé aujourd'hui.

(*b*) *Engrenages à flancs*. — On adopte pour profil des dents sur l'une des deux roues, la roue O par exemple (*fig*. 65), un rayon OA. Ce rayon, d'après un théorème connu de Géométrie, peut être considéré comme engendré par le roulement d'un cercle o, de diamètre OA, à l'intérieur du cercle O. En effet, si nous prenons une autre position o_1 de ce cercle, pour laquelle le contact avec le cercle O se produit en B, A_1 étant l'intersection de la circonférence o_1 avec le diamètre AC, nous aurons

Fig. 65.



$$\text{arc}\,AB = \overline{OA} \times \text{angle}\,BOA,$$

$$\text{arc}\,A_1B = \frac{1}{2}OA \times \text{angle}\,Bo_1A_1;$$

comme, d'autre part, $Bo_1A_1 = BOA + OA_1o_1 = 2BOA$, il en résulte que les arcs A_1B et AB sont égaux. Donc, en faisant rouler le cercle o à l'intérieur de O, le point A de o restera toujours sur le diamètre AC.

Maintenant nous pouvons faire usage de la méthode des roulettes (n° 48) pour déterminer le profil conjugué sur la roue O′. Nous n'aurons qu'à faire rouler le cercle o à l'extérieur du cercle O′, le point A décrira l'épicycloïde AD, qui sera le profil cherché. D'après le sens attribué aux mouvements des deux roues, l'épicycloïde AD sera l'enveloppe des positions de AO quand le point A′ ira en s'éloignant de la ligne des centres. On voit par conséquent que l'épicycloïde

peut pousser la droite à partir de la ligne des centres et au delà; en imaginant qu'on change le sens des deux mouvements, on verrait de même que la droite peut pousser l'épicycloïde avant la ligne des centres et jusqu'à cette ligne.

Rien n'empêche de prolonger le profil DA en dedans du cercle O′ par un rayon AO′. Ce rayon peut être décrit par le point A du cercle o' ayant $\overline{AO'}$ pour diamètre, pendant le roulement de ce cercle à l'intérieur de la circonférence O′; le profil conjugué s'obtiendra donc en faisant rouler le même cercle o' à l'extérieur de O, ce qui donnera une épicycloïde AD′. D'après ce qu'on vient de dire de OA et AD, le rayon AO′ pourra pousser la courbe AD′ avant la ligne des centres; par suite le profil composé o'AD sera susceptible de pousser le profil D′Ao des deux côtés de la ligne des centres, ou d'être poussé par lui, également des deux côtés, si l'on change le sens des rotations. Les deux roues ont donc des profils composés de la même manière et jouissent, l'une à l'égard de l'autre, des mêmes propriétés géométriques. On dit alors que l'engrenage est *réciproque*.

Nous avons déjà signalé ci-dessus, à propos de l'engrenage à lanterne, l'avantage que l'on trouve à ce que le contact des dents ait lieu de part et d'autre de la ligne des centres.

Les portions droites Ao, Ao' des profils prennent le nom de *flancs*.

Il y a dans le profil adapté à la roue O′ une partie, l'épicycloïde AD, qui dépend de la circonférence primitive O, puisqu'on l'engendre par le roulement d'un cercle de diamètre $\overline{AO}$. L'engrenage à flancs, tel que l'on vient de le décrire, ne permettrait donc pas de conduire, au moyen d'une même roue O′, diverses roues telles que O, ayant des rayons inégaux. Pour que cela devienne possible, on ne s'astreint pas à prendre pour rayon du cercle auxiliaire o la moitié du rayon $\overline{OA}$; on adopte une valeur constante pour toutes les roues devant engrener avec O′, et alors les flancs droits oA peuvent se trouver remplacés par des arcs d'épicycloïde. D'ailleurs, comme ces arcs n'ont qu'une petite longueur, ils s'écartent assez peu des profils rectilignes indiqués en premier lieu.

(*c*) *Engrenage à développantes de cercle.* — Soient O et O′ (*fig.* 66) les centres des deux circonférences primitives, $\overline{OA}$, $\overline{O'A}$ leurs rayons. Menons par leur point de contact A une ligne TT′ inclinée sur OO′, abaissons des centres O et O′ les perpendiculaires OT, O′T′ sur cette droite et décrivons les circonférences ayant pour rayons $\overline{OT}$, O′T′. Si maintenant nous enroulons la tangente commune TT′ successivement sur ces deux dernières circonférences, le point A de cette tangente décrira les deux développantes de cercle BC, B′C′, qui constituent deux profils conjugués pour les roues O et O′.

Fig. 66.

Nous pourrions d'abord le reconnaître par la méthode générale des enveloppes (n° 45), en nous donnant la courbe BC et cherchant l'enveloppe des positions qu'elle prend quand on fait rouler la circonférence OA sur la circonférence O′A. Les normales communes, telles que la droite $A'C_1$ de la *fig.* 57, devraient être tangentes à la position correspondante du cercle OT; on en conclurait facilement qu'elles passent à la distance $\overline{O'T'}$ du centre O′ et sont tangentes à la circonférence O′T′. Par suite, les normales à l'enveloppe des positions de BC étant toutes tangentes à un même cercle O′T′, cette enveloppe serait une développante de ce cercle.

On peut aussi le vérifier *a posteriori* de la manière suivante. Imaginons que la développante B′C′ pousse BC et produise un certain déplacement du système, qui amène BC en *bc*, B′C′ en *b′c′*. En premier lieu, le point de contact des deux courbes n'aura pas cessé de se trouver sur TT′, car, cette droite étant tangente aux circonférences OT, O′T′ est par là même normale à toutes leurs développantes. Soit *a* le point de contact de *bc* avec *b′c′*; on aura, en vertu de la définition d'une développante de cercle,

$$\overline{Aa} = \overline{Bb} = \overline{B'b'},$$

ce qui prouve que les déplacements sont égaux sur les circon-

férences auxiliaires OT, O′T′. Or, les déplacements angulaires qui correspondent à $\overline{Bb}$ et $\overline{B'b'}$ sont $\frac{\overline{Bb}}{\overline{OT}}$ et $\frac{\overline{B'b'}}{\overline{O'T'}}$; leur rapport est $\frac{\overline{O'T'}}{\overline{OT}}$ ou $\frac{\overline{O'A}}{\overline{OA}}\cdot$ Donc les déplacements angulaires des deux roues (et par suite leurs vitesses de rotation) sont dans un rapport constant, inverse de celui des rayons des circonférences primitives; la condition imposée aux engrenages se trouve ainsi satisfaite.

L'engrenage à développantes est réciproque, car rien ne distingue une des roues de l'autre dans la construction géométrique; le contact a lieu des deux côtés de la ligne des centres, et chaque roue peut être menante ou menée. En outre, l'engrenage en question jouit de trois propriétés spéciales :

1° On peut supposer que la distance des centres O et O′ augmente ou diminue un peu, par suite de l'usure des supports, sans que l'engrenage cesse de fonctionner régulièrement et sans qu'il y ait changement du rapport des vitesses angulaires, car cette variation de la distance $\overline{OO'}$ n'obligerait pas à modifier les circonférences OT, $\overline{O'T'}$ qui déterminent les profils; il suffirait de modifier l'inclinaison de TT′ et de changer les distances $\overline{OA}$, $\overline{O'A}$ dans le même rapport que $\overline{OO'}$.

2° Une même roue O′ peut engrener avec plusieurs autres roues de divers diamètres, sans qu'on soit obligé d'employer pour les dents de ces diverses roues des profils nouveaux, formés avec des courbes qui ne seraient pas des développantes de cercle ; on pourra toujours, en effet, s'arranger pour conserver invariable le rayon $\overline{O'T'}$ dans tous les couples de deux roues dont O′ fait partie, et la développante conjuguée variera seulement de grandeur, en passant d'un couple à un autre.

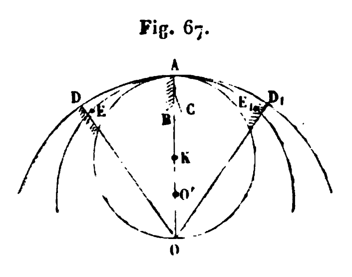
3° Si l'on admet que chaque dent s'use uniformément et perde en tous les points de son profil une même épaisseur mesurée normalement, le profil ne subit par là aucune altération et convient toujours pour une transmission régulière.

(*d*) *Quelques observations sur les engrenages intérieurs.* — Le tracé des engrenages intérieurs est fondé sur les mêmes principes que celui des engrenages extérieurs, et l'on

peut y employer les trois types dont nous venons de parler. Toutefois, il y a quelques observations à faire au sujet de la réalisation matérielle des profils, laquelle est sujette à certaines restrictions spéciales, surtout quand il s'agit d'un engrenage à flancs.

Premièrement, il est impossible d'adapter les flancs droits à la grande roue. Soit en effet AB (*fig.* 67) ce flanc supposé possible; il sera engendré par le point A d'un cercle de rayon $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AO}$, roulant sur la circonférence primitive extérieure, dont O est le centre. Le profil conjugué sera l'épicycloïde AC engendrée par le même point A, quand le cercle OA roulera sur la circonférence primitive intérieure dont le centre est O'. Examinons les positions de ces profils, en donnant à AB successivement deux directions OD, OD_1, symétriques par rapport à la ligne des centres OO'. L'origine A de la courbe AC se placera en deux points symétriques E, E_1, tous deux en dehors ou tous deux en dedans de l'angle DOD_1; par conséquent l'un de ces deux points E, E_1 devrait se trouver dans le plein de la dent profilée par la droite AB, ce qui ne peut avoir lieu. Si donc il arrivait que, d'un côté de la ligne des centres, les profils obligeassent les circonférences primitives à rouler l'une sur l'autre, le même fait ne pourrait se produire de l'autre côté, et l'engrenage ne marcherait pas régulièrement; et même il s'arrêterait tout à fait s'il y avait simultanément deux paires de dents en prise, l'une sur la ligne des centres, l'autre dans le voisinage, puisque ces deux paires de dents tendraient à conduire la roue menée de deux manières différentes, ce qui est irréalisable.

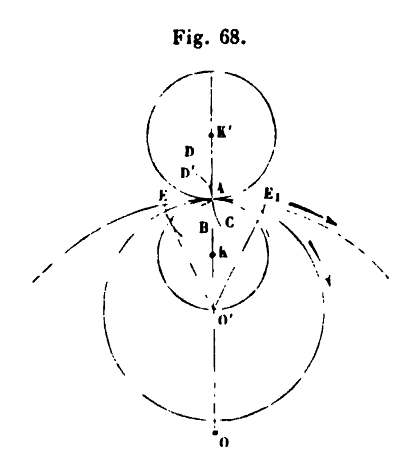
Fig. 67.



Rien n'empêche, au contraire, de placer des flancs sur la petite roue, quand on suppose que son rayon ne dépasse pas une certaine limite, que nous déterminerons tout à l'heure. Les centres des circonférences primitives étant O et O' (*fig.* 68), on ferait rouler le cercle de rayon $\overline{AK} = \frac{1}{2}\overline{AO'}$ suc-

cessivement sur ces deux circonférences, et l'on aurait les profils conjugués AB, AC, le premier droit, le second épicycloïdal. Le flanc conduirait la courbe avant la ligne des centres, ou serait poussé par elle après cette ligne; de l'autre côté, les profils n'auraient pas de point commun.

Fig. 68.



Si l'on voulait que la conduite des roues l'une par l'autre eût lieu des deux côtés de la ligne des centres, on prolongerait les profils que nous venons d'indiquer, par les épicycloïdes AD, AD′, qu'engendre le point A d'un cercle de rayon arbitraire $\overline{AK'}$, roulant successivement sur les deux cercles primitifs.

Cherchons maintenant à déterminer la limite au-dessus de laquelle ne doit pas croître le rayon $\overline{O'A}$, ou plutôt son rapport avec le rayon $\overline{OA}$ supposé connu, pour qu'au delà de la ligne des centres le dégagement des dents puisse s'opérer [1], c'est-à-dire pour que les profils AB, AC ne se coupent pas. Afin d'arriver plus rapidement à résoudre la question, nous regarderons comme démontrées certaines propriétés des épi-

[1] Nous disons au delà de la ligne des centres, en raisonnant dans l'hypothèse où le sens des mouvements de rotation serait conforme à celui qu'indique la *fig.* 68, et où le flanc devrait pousser l'épicycloïde. L'hypothèse inverse conduirait à la même conclusion finale; ce qui a lieu avant la ligne des centres aurait lieu après, et réciproquement.

cycloïdes dont voici l'énoncé : 1° Si l'on fait rouler à l'intérieur du cercle fixe OA une série de cercles tels que le cercle AK, tous tangents en A, le roulement ayant toujours lieu dans le même sens, vers la gauche par exemple, les diverses épicycloïdes engendrées par A, point de contact primitif, seront placées à gauche ou à droite du rayon OA, suivant que le rapport $\frac{\overline{AK}}{\overline{OA}}$ sera inférieur ou supérieur à $\frac{1}{2}$, et s'écarteront d'autant plus de ce même rayon que la différence $\frac{\overline{AK}}{\overline{OA}} - \frac{1}{2}$ aura une plus grande valeur absolue. 2° Lorsqu'on attribue au rayon $\overline{AK}$ deux valeurs dont la somme est égale à $\overline{OA}$, les deux arcs d'épicycloïde engendrés par A sont symétriques relativement au rayon OA et appartiennent à la même épicycloïde complète.

Cela posé, admettons d'abord qu'on fasse $\overline{O'A} = \frac{1}{2}\overline{OA}$. Quand le point de contact des profils sera venu sur la ligne des centres en A, et que le mouvement des roues sera continué au delà de cette position, le point A, extrémité du flanc, décrira, relativement à la grande roue, le rayon OA, puisque le mouvement de la petite roue O'A, par rapport à l'autre, consiste dans le roulement du cercle primitif O'A, à l'intérieur du cercle OA, de rayon double. Cette trajectoire relative OA, emportée avec la grande circonférence, ira toujours passer par la nouvelle position, telle que E_1, prise par l'origine des dents épicycloïdales; celles-ci resteront donc toujours à droite et en dehors du flanc. La même chose a lieu *a fortiori* quand $\overline{O'A}$ prend une valeur moindre que $\frac{1}{2}\overline{OA}$, car la trajectoire relative du point A, au lieu d'être le rayon OA, devient une épicycloïde placée de l'autre côté de ce rayon par rapport au profil AC.

Au contraire, si le rapport $\frac{\overline{O'A}}{\overline{OA}}$ dépassait $\frac{1}{2}$, la trajectoire de l'extrémité du flanc par rapport à la grande roue se trouverait placée du même côté que le profil AC; il y aurait donc tout au moins une réduction du jeu ou espace libre entre les flancs et les épicycloïdes, au delà de la ligne des centres. Et même le jeu serait réduit à zéro quand $\overline{O'A}$ atteindrait la valeur

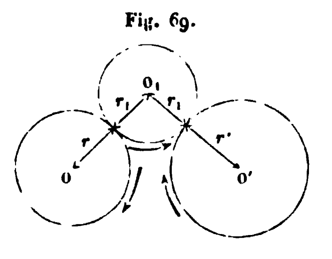
$\frac{2}{3}\overline{OA}$, parce qu'alors la somme des rayons $\overline{OK}$ et $\overline{O'A}$ deviendrait égale à $\overline{OA}$, et que la trajectoire relative parcourue sur la grande roue par le point A de la petite se confondrait avec le profil AC. Un rapport des rayons supérieur à $\frac{2}{3}$ serait rigoureusement impossible, puisque les extrémités des flancs tendraient alors à pénétrer dans l'épaisseur des dents de la grande roue.

Ainsi donc, en résumé, le rapport des rayons $\overline{O'A}$, $\overline{OA}$ ne doit pas dépasser la limite extrême $\frac{2}{3}$, et, pour réserver un jeu suffisant, il convient, même dans la pratique, de rester notablement au-dessous de $\frac{1}{2}$.

La méthode indiquée pour les engrenages extérieurs à développantes conduit, quand on l'applique aux engrenages intérieurs, à construire des dents concaves sur la grande roue. On atténue cet inconvénient en faisant les dents nombreuses et courtes, ce qui fait que les courbes se confondent à peu près avec leurs cordes et rendent les faces latérales assimilables à des plans.

On peut toujours éviter l'emploi des engrenages intérieurs au moyen d'une roue auxiliaire. Soient O et O′ (*fig.* 69) les projections de deux axes parallèles qui doivent prendre des vitesses angulaires ω, ω' dans le même sens. Établissons d'abord la communication de O avec un troisième axe parallèle O_1 par un engrenage extérieur, puis la communication de O_1 avec O′ par un second engrenage extérieur. Le mouvement donné à l'une des roues rendra obligatoire celui des deux autres, et, comme la vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe O_1 est de sens contraire avec ω et ω', il est clair que ces deux dernières sont de même sens. On est donc arrivé au but qu'on se proposait, sans engrenages intérieurs. Quant au rapport $\frac{\omega}{\omega'}$, on

Fig. 69.



le déduit facilement des rapports $\frac{\omega}{\omega_1}$ et $\frac{\omega_1}{\omega'}$, connus eux-mêmes par les rayons primitifs r, r_1, r' des trois roues; on a

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{r_1}{r}, \quad \frac{\omega_1}{\omega'} = \frac{r'}{r_1},$$

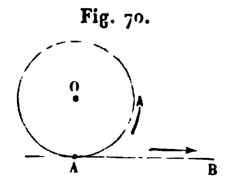
d'où l'on tire, en multipliant membre à membre,

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r}.$$

Le rapport est le même, en valeur absolue, que si les circonférences primitives O et O′ roulaient directement l'une sur l'autre; le seul rôle de la roue intermédiaire O_1 consiste à changer le sens de la rotation reçue par la roue menée.

(*e*) *Engrenage d'une roue avec une crémaillère.* — On peut concevoir que dans un engrenage cylindrique on fasse grandir indéfiniment le rayon de l'une des circonférences primitives, en conservant l'autre circonférence constante. Le corps solidaire avec cette dernière aurait un mouvement de rotation autour d'un axe fixe O (*fig.* 70), pendant que le corps solidaire avec la première aurait une translation (n° 21) parallèle à la droite AB, limite de la circonférence primitive à rayon infini. La droite AB devant rouler sur la circonférence OA, la vitesse est la même sur ces deux lignes; si l'on nomme ω la vitesse angulaire autour de O et v la vitesse de translation, on aura

Fig. 70.



$$v = \omega . \overline{OA}.$$

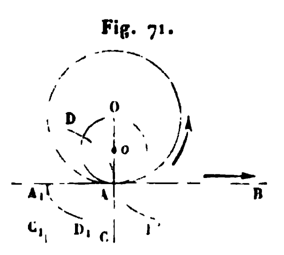
On aura donc ainsi transformé un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne, avec la condition que les vitesses conservent un rapport constant.

La transmission de mouvement entre les deux corps pourrait s'opérer par simple adhérence, comme dans le cas des cylindres de friction (n° 45), mais le plus souvent ils sont tous deux munis de dents; le corps O se nomme alors *roue* ou *pignon*, et AB se nomme *crémaillère*. Dans tous les cas, le

corps AB doit être, bien entendu, assujetti entre des guides qui assurent le mouvement rectiligne.

Les profils des dents se trouvent sans peine, en introduisant l'hypothèse particulière d'un rayon infini dans les propositions ci-dessus établies, au sujet des trois types d'engrenages usités. Nous ne dirons rien du premier, qui s'emploie rarement, surtout quand il s'agit d'une crémaillère. Dans le second, nous pouvons d'abord supposer une circonférence auxiliaire ayant un rayon $\overline{oA}$ moitié du rayon $\overline{OA}$ de la roue (*fig.* 71); en la faisant rouler sur la circonférence primitive OA, le point A engendrera le flanc AO, et, dans son roulement sur la droite primitive AB, le même point A décrira la cycloïde AD, qui sera le profil conjugué de AO. Pour l'autre roue (remplacée ici par la crémaillère), la circonférence primitive a un rayon infini, et il en est de même pour la circonférence auxiliaire, de rayon deux fois moindre; à la limite elles se confondent toutes deux avec la droite AB. Le roulement intérieur de la deuxième de ces circonférences sur la première fait toujours décrire au point A le flanc AC, puisque c'est là un résultat indépendant du rayon des circonférences, pourvu que leur rapport reste celui de 1 à 2. La droite AB roulant ensuite sur le cercle OA engendre par son point A la développante AD′ de ce cercle, laquelle forme le profil conjugué de AC. En résumé, le profil CAD des dents de la crémaillère comprendrait un flanc droit suivi d'une cycloïde; celui des dents du pignon, un flanc droit suivi d'une développante de cercle. Le mouvement étant supposé avoir lieu dans le sens des flèches, la crémaillère conduirait la roue; la développante AD′ serait poussée par le flanc AC, à gauche de OC, et le flanc $\overline{oA}$ serait poussé par la cycloïde AD, à droite de la même ligne. On pourrait aussi changer le sens des deux mouvements, de manière à faire conduire la crémaillère par la roue; ce cas est même plus ordinaire que le premier.

Fig. 71.

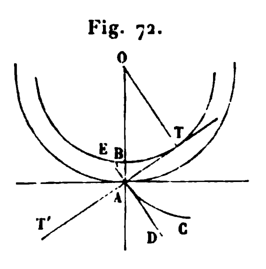


L'emploi du flanc AC sur la crémaillère présente un inconvénient : la perpendiculaire abaissée au point A sur ce profil, dans l'une quelconque de ses positions, A_1C_1 par exemple, est

toujours la droite AB, qui tombe constamment au même point A_1 du profil. Le contact se fait donc continuellement en ce point, ce qui tend à produire une usure rapide des dents. On préfère souvent remplacer les profils AC et AD′ par une cycloïde et une épicycloïde qu'engendrerait le point A d'un cercle de rayon arbitraire, dont le centre serait sur le prolongement de OA, et qu'on ferait rouler successivement sur AB et sur la circonférence OA.

On peut également appliquer au cas de la crémaillère la construction géométrique de l'engrenage à développantes. Soit OA (*fig.* 72) la circonférence primitive de la roue, touchée en A par la droite primitive de la crémaillère. On mènera par ce point la droite inclinée AT et l'on décrira le cercle de rayon OT qui la touche en T. La développante BAC de ce cercle formera le profil des dents de la roue O. Quant au profil conjugué, ce sera la limite de la développante d'un cercle dont le point de contact T′ avec AT s'éloigne indéfiniment; le rayon de courbure de cette développante en A tend vers l'infini et la courbe se confond avec une droite EAD perpendiculaire à TT′.

Fig. 72.



(*f*) *Détails sur les dents d'engrenages.* — On donne ordinairement aux dents une forme symétrique par rapport aux rayons menés en leurs milieux, afin qu'une même roue puisse conduire l'autre dans les deux sens, ou bien pour que la même roue puisse être alternativement menante et menée, sans changer le sens du mouvement.

Toutes les dents d'une même roue sont égales et également espacées; la distance qui sépare deux profils identiques, répétés sur deux dents consécutives, distance mesurée sur la circonférence primitive, se nomme le *pas* de l'engrenage. Après que deux profils en prise se sont avancés chacun d'un pas, sur leurs circonférences respectives, ils sont remplacés par deux autres qui fonctionnent dans les mêmes conditions; les parcours simultanés qui s'effectuent sur les circonférences primitives comprennent donc toujours un même nombre de pas,

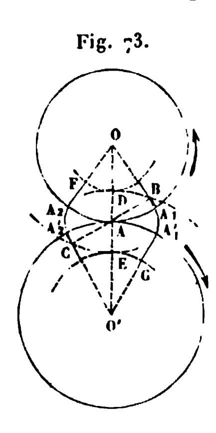
et, comme ces parcours sont égaux, le pas est le même pour les deux roues. Il résulte de là que les deux circonférences primitives ont des longueurs proportionnelles à leurs nombres de dents, et qu'il en est de même pour leurs rayons. Par suite, ces rayons sont toujours dans un rapport commensurable; il faut même que ce rapport puisse s'exprimer par des fractions assez simples, car, sauf des circonstances exceptionnelles, le nombre des dents d'une roue est compris entre 10 et 120. Les nombres trop grands ou trop petits rendraient la construction difficile ou impossible dans de bonnes conditions.

Le pas ne doit avoir qu'une petite longueur. Les dents sont courtes et multipliées, et elles ont peu de saillie au dehors ou au dedans des circonférences primitives, afin que la normale commune aux deux profils en contact reste toujours petite et qu'il y ait peu de glissement (n° 47). Une portion du pas est occupée par l'épaisseur de la dent, l'autre reste libre et sert à loger une dent de l'autre roue. Ces deux portions se nomment le *plein* et le *vide*. Lorsque les dents ont la même épaisseur sur les deux roues (ce qui doit se faire lorsque leur matière est la même), le plein et le vide sont à peu près égaux; cependant, pour que la présence du moindre corps étranger n'empêche pas la marche de l'engrenage, on donne au vide un certain excès sur le plein. Le rapport du premier au second varie de $\frac{11}{10}$ à $\frac{16}{15}$; leur différence constitue le *jeu*.

Les saillies des dents se déterminent assez souvent (quand cela est possible) par la condition que le contact commence un pas avant et finisse un pas après la ligne des centres, de manière à avoir toujours deux paires de dents en prise. Supposons d'abord le cas très ordinaire d'un engrenage à flancs. Soient O et O′ les centres des circonférences primitives (*fig.* 73) et A leur point de contact; supposons le mouvement dans le sens marqué par les flèches. Le flanc OA doit être poussé au delà de la ligne des centres par une épicycloïde dont le contact a lieu actuellement en A. Pour avoir la portion utile de ces deux profils, nous les prendrons dans la position qu'ils occupent après le parcours d'un pas, le flanc étant arrivé en OA_1 et l'épicycloïde en A'_1B; alors le contact se

fera au pied B de la perpendiculaire abaissée de A sur OA_1. Il est évident que le point de contact aura parcouru la longueur $\overline{A_1B}$ sur le flanc, $\overline{A'_1B}$ sur l'épicycloïde, et que ce seront là les portions utiles des deux profils. On aura de la même manière les parties utiles avant la ligne des centres. On prendra sur les circonférences primitives les longueurs $\overline{AA_2}$, $\overline{AA'_2}$ égales à un pas, et l'on abaissera de A sur $O'A'_2$ la perpendiculaire AC; CA'_2 sera la portion utile du flanc de la roue O′, et l'arc CA_2 la portion utile de l'épicycloïde conjuguée, appartenant à l'autre roue. En conséquence, on limite extérieurement les dents de la roue O par un cercle de rayon $\overline{OC}$, et celles de la roue O′ par un cercle de rayon $\overline{O'B}$; E et D sont les intersections de ces deux cercles avec la ligne des centres. Afin d'être certain que les parties extérieures des dents d'une roue pourront toujours se loger dans les creux de l'autre, on limite ces creux par deux cercles de rayon $\overline{OD}$ et $\overline{O'E}$. Il en résulte que le profil complet d'une dent comprend :

Fig. 73.



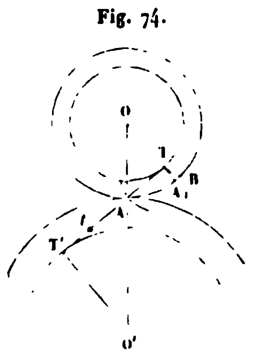
Sur la roue O, le profil FA_2C doublé par un profil symétrique, et, dans l'intervalle, un arc de la circonférence OC, à quoi il faut encore joindre un arc de la circonférence OD, limitant intérieurement le creux;

Sur la roue O′, le profil GA'_1B doublé par un profil symétrique, avec un arc de la circonférence O′B entre les deux et un arc de la circonférence O′E.

Les engrenages à développantes peuvent aussi être établis de manière à faire commencer le contact un pas avant la ligne des centres et à le faire finir un pas après. Il faut pour cela que la moindre des deux distances $\overline{AT}$, $\overline{A'T'}$ (*fig.* 66, p. 132) ne soit pas trop petite, car le contact des dents ne peut aller au delà des points T et T′; cette condition est toujours possible à remplir en disposant convenablement de l'inclinaison de TT′ sur la ligne des centres. Prenons en effet sur la plus petite des deux circonférences primitives, O par exemple (*fig.* 74), un arc AA_1 égal au pas, menons le rayon OA_1 et prenons

pour la normale commune TT′ la perpendiculaire abaissée de A sur ce rayon. Quand les dents se touchent au point T, la développante fixée à la roue O occupe la position TB et coupe la circonférence primitive un peu au delà de A_1, de sorte que le contact à droite de la ligne des centres répond à un arc AB légèrement supérieur au pas. Du côté gauche, on aurait la possibilité de l'étendre encore plus, si l'on voulait; il y a donc des deux côtés une marge suffisante.

Fig. 74.



L'angle AOT étant toujours petit, $\overline{AT}$ diffère très peu du pas; donc, si l'on prend $\overline{At} = AT$, les circonférences de rayons $\overline{Ot}$ et $\overline{O'T}$ pourront servir à limiter extérieurement les dents, comme les circonférences de rayons $\overline{OC}$ et $\overline{O'B}$ dans la *fig.* 73.

Dans la pratique, l'inclinaison de TT′ sur la ligne des centres descend rarement au-dessous de 75°. Si l'on détermine cette inclinaison par le moyen ci-dessus indiqué, on aura, en désignant par n le nombre de dents de la petite roue,

$$\text{angle AOT} = \frac{2\pi}{n}$$

et par suite

$$\text{angle TAO} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{4}{n}\right).$$

Pour que ce dernier angle ne soit pas inférieur à 75° ou à $\frac{5}{6}\frac{\pi}{2}$, il faut que n atteigne ou dépasse 24. La plus petite des deux roues devrait donc alors avoir au moins vingt-quatre dents.

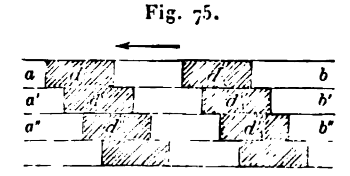
Lorsqu'il s'agit de l'engrenage à lanterne, le contact se fait d'un seul côté de la ligne des centres. Si l'on voulait toujours avoir deux paires de dents en prise, il faudrait donc le terminer (ou le commencer) quand les profils des dents auraient parcouru deux pas à partir de cette ligne. Il en résulterait des glissements plus considérables que dans les cas précédents. Pour les diminuer, on pourra faire que les dents se mènent

pendant un parcours compris entre un et deux pas; mais il arriverait alors qu'on aurait seulement une paire de dents en prise pendant une partie de ce parcours et que l'action mutuelle des roues porterait entièrement sur cette paire, au lieu de se répartir sur deux. Les dents seraient donc plus fortement éprouvées.

Comme on a intérêt à augmenter le nombre des dents d'une roue quelconque d'engrenage (afin de diminuer les glissements), et par conséquent à faire les dents assez minces dans le sens parallèle aux circonférences primitives, on les rend capables d'une résistance suffisante en augmentant leur épaisseur dans le sens parallèle aux axes de rotation.

(*g*) *Engrenage dit sans frottement, de Hooke et de White.* — L'artifice suivant, imaginé par Hooke en 1666, permet de multiplier en quelque sorte indéfiniment le nombre des dents et d'annuler le glissement, tout en conservant aux dents une épaisseur notable dans le sens de la circonférence primitive. Soient plusieurs roues dentées en nombre quelconque n, telles que ab, $a'b'$, $a''b''$, ... (*fig.* 75), juxtaposées et ren-

Fig. 75.



dues solidaires les unes des autres, sur un même axe de rotation. Ces roues sont identiques et en retraite de $\frac{1}{n}$ de pas, chacune par rapport à celle qui la précède. La figure représente le développement de la jante; les parties ombrées sont les pleins, et les parties blanches les vides. On construit d'une manière tout à fait semblable l'ensemble des roues juxtaposées, formant la roue correspondante avec laquelle doit engrener celle qui vient d'être décrite.

Supposons qu'une dent de la roue ab entre en contact et conduise une dent de la roue conjuguée pendant $\frac{1}{n}$ de pas

commençant à la ligne des centres; à partir du point de contact correspondant à la fin de cette période, les profils sont modifiés de manière à ne plus continuer à se toucher par la suite. Mais alors la dent d' vient au contact à son tour et conduit une dent de la roue conjuguée pendant $\frac{1}{n}$ de tour, puis elle cesse de toucher et se trouve remplacée par d'', et ainsi de suite. Après le parcours d'un pas, le contact passe à la série voisine d_1, d'_1, d''_1, ... Chaque dent n'est en prise que pendant $\frac{1}{n}$ de pas, et cependant on peut lui donner la même épaisseur à sa base, suivant la circonférence primitive, que si elle agissait pendant le pas entier.

Maintenant, supposons que n grandisse indéfiniment et qu'en même temps l'épaisseur des roues accolées, dans le sens parallèle à l'axe de rotation, tende vers zéro; l'ensemble des dents échelonnées d, d', d'',.... va se transformer à la limite en une portion de filet de vis, car ce volume est engendré par une aire plane (projection d'une dent telle que d sur un plan perpendiculaire à l'axe) qu'on ferait glisser le long de l'axe, en la faisant tourner simultanément d'une quantité proportionnelle. Les profils des dents ne se toucheront plus alors que par leurs éléments situés infiniment près de la ligne des centres, puisqu'ils ne doivent se conduire mutuellement que pendant une fraction infiniment petite du pas. Il en résulte (n° 47) que le glissement sera constamment nul. Les surfaces des dents rouleront l'une sur l'autre, suivant les hélices qui leur servent de base sur les cylindres primitifs.

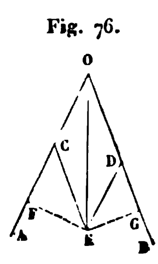
Nous remarquerons cependant avec Bour (*Cours de Mécanique*, p. 225 du premier fascicule) que ce n'est pas là un roulement simple (n° 41), mais un roulement accompagné de pivotement. Le mouvement relatif des deux surfaces consiste en effet en une rotation autour de la génératrice commune aux cylindres primitifs, rotation dont l'axe est oblique aux hélices dont nous venons de parler, ainsi qu'aux surfaces des dents en contact.

L'idée de Hooke a été reproduite beaucoup plus tard par White, en 1808, et l'engrenage est en général désigné par le nom de ce second auteur. Quoique ayant l'inconvénient d'ap-

puyer les arbres sur leurs épaulements, à cause de l'obliquité des surfaces latérales des dents, il fonctionne avec beaucoup de douceur et a été avantageusement employé par M. Breguet dans un cas où il s'agissait d'obtenir pour l'une des roues une vitesse angulaire considérable.

50. *Engrenages coniques.* — Il s'agit d'établir une communication de mouvement entre deux corps tournant autour de deux axes OA et OB qui se rencontrent au point O (*fig.* 76), de telle sorte que la vitesse angulaire ω du premier corps soit dans un rapport constant et donné avec la vitesse angulaire ω' du second.

Fig. 76.



Supposons que OA soit dans le sens de l'axe représentatif de ω et OB en sens contraire de celui de ω'; on peut toujours s'arranger pour qu'il en soit ainsi, puisque chacune des droites OA, OB se compose de deux parties issues du point O et opposées l'une à l'autre. Prenons $\overline{OC}$ et $\overline{OD}$ respectivement égales à ω et à ω', en valeur absolue, et construisons un parallélogramme sur ces droites $\overline{OC}$ et $\overline{OD}$; faisons enfin tourner la diagonale OE de ce parallélogramme successivement autour de OA et autour de OB, de manière à engendrer deux cônes droits à base circulaire. Je dis que ces cônes, liés chacun au corps qui tourne autour de son axe de figure, rouleront l'un sur l'autre dans leur mouvement relatif. En effet, le point E du premier cône a une vitesse dirigée normalement au plan de la figure (plan des deux axes), en arrière de ce plan; la grandeur de cette vitesse est le produit de $\omega = \overline{OC}$ par la distance $\overline{EF}$ du point à l'axe, ce qui donne la surface du parallélogramme. Les mêmes choses ont lieu pour le point E du second cône, dont la vitesse a pour expression le produit $\overline{OD}.\overline{EG}$, et se trouve en outre dans les mêmes direction et sens. La vitesse relative de ces deux points est donc nulle; et il en serait de même pour tout point de OE, car les deux vitesses à comparer seraient dans un même rapport avec celles de E. Les deux génératrices actuellement confondues suivant OE ont donc une vitesse relative nulle, et par conséquent OE est l'axe instantané de rotation

dans le mouvement relatif, ce qui constitue la condition du roulement des deux cônes l'un sur l'autre (n° 41), puisqu'ils se touchent tout le long de OE.

Réciproquement, si les cônes roulent l'un sur l'autre, la génératrice commune coïncide constamment avec l'axe instantané de rotation du mouvement relatif; les vitesses absolues d'un point quelconque E de cette génératrice sont donc égales. On a par suite

$$\omega.\overline{EF} = \omega'.\overline{EG},$$

et, comme on a d'autre part

$$\overline{EF}.\overline{OC} = \overline{EG}.\overline{OD} = \text{aire OCED},$$

on conclut facilement de ces équations

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\overline{EG}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OD}},$$

c'est-à-dire que les vitesses angulaires sont dans le rapport constant $\frac{\overline{OC}}{\overline{OD}}$.

Tout se réduit donc à faire en sorte que ces deux cônes roulent l'un sur l'autre, pendant que chacun tourne autour de son axe de figure. Pour cela, on peut d'abord construire matériellement les parties de ces cônes interceptées dans chacun d'eux par des plans perpendiculaires à leurs axes, ces plans étant menés de manière que les troncs se touchent suivant une même portion de la génératrice commune. On serrera ensuite ces troncs de cône l'un contre l'autre, assez pour que l'adhérence empêche le glissement, et alors, si l'un des deux tourne, l'autre tournera simultanément en remplissant la condition imposée au rapport des vitesses angulaires. On obtient ainsi l'appareil qu'on nomme *cônes de friction*.

Les cônes de friction présentent le même inconvénient que les cylindres de friction (n° 45). La transmission n'a lieu que si la résistance opposée au mouvement du cône mené ne dépasse pas une certaine limite, au delà de laquelle il y aurait

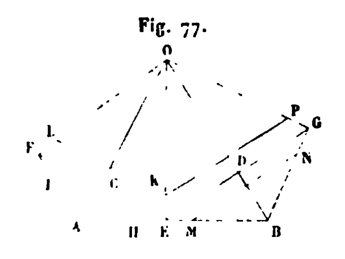
glissement. Afin d'en éviter la possibilité, on prend ordinairement le parti d'armer les deux cônes ci-dessus définis, qu'on nomme *cônes primitifs*, de surfaces ou dents saillantes, assujetties à la condition de rester toujours en contact pendant que ces cônes roulent l'un sur l'autre. On comprend que la surface fixée à l'un des cônes pourrait être choisie à peu près arbitrairement, sauf l'exclusion des formes pratiquement inadmissibles; la surface conjuguée sur l'autre cône serait l'enveloppe des positions prises par la première, pendant que son cône roulerait sur l'autre cône rendu fixe. Mais tout d'abord on diminue l'indétermination en adoptant pour ces surfaces arbitraires la forme de surfaces coniques ayant leur sommet commun avec celui des cônes primitifs, d'où résulte immédiatement cette conséquence que leurs enveloppes sont aussi des surfaces coniques ayant le même sommet.

Imaginons ensuite qu'on coupe les deux cônes primitifs et la surface conique adaptée à l'un d'eux par une sphère de rayon quelconque ayant son centre au sommet commun. Les intersections de cette sphère avec les cônes primitifs seront deux cercles et son intersection avec la surface conique sera une certaine courbe; dans le mouvement relatif des deux corps, ces cercles rouleraient l'un sur l'autre, et la courbe entraînée par l'un des deux devrait toujours toucher le profil conjugué à fixer sur l'autre. On conçoit par conséquent la possibilité de trouver ce profil conjugué, en exécutant sur une sphère des constructions analogues à celles qu'on a dû exécuter sur le plan, quand il s'agissait des engrenages cylindriques. Cela fait, on aurait les surfaces des dents en prenant les lieux géométriques d'une droite mobile assujettie à passer toujours par le centre de la sphère et à s'appuyer sur les profils qu'on vient de déterminer.

Mais on ne peut guère tracer des épures que sur une aire plane, et il n'est pas facile d'y transporter les constructions géométriques qui devraient être exécutées sur une sphère; peut-être aura-t-on pratiquement plus de chances d'exactitude, si l'on adopte une solution moins rigoureuse en théorie, mais plus facile à réaliser. C'est pourquoi l'on se contente universellement d'une méthode approximative, indiquée en 1823 par le mécanicien anglais Tredgold.

Soient OA et OB (*fig.* 77) les deux axes de rotation; FOE, EOG les contours apparents des cônes primitifs, lesquels se touchent le long de la génératrice commune OE. Menons à cette droite la perpendiculaire AEB, qui coupe les axes en A et B, et imaginons les deux cônes droits ayant ces points pour sommets et pour bases les cercles EF, EG.

Fig. 77.



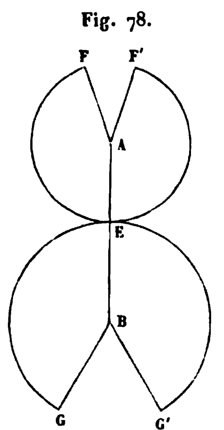
Le problème sera résolu si nous parvenons à définir les surfaces des dents coniques portées par les cônes primitifs, au moyen de leurs intersections avec les cônes FAE et EBG.

A cet effet, nous remarquerons que ces intersections, formant les deux profils conjugués, ne sont en contact qu'à une petite distance du point E, car dans le cas contraire la vitesse relative des deux points en contact (c'est-à-dire la vitesse de glissement) atteindrait une valeur notable, puisque ces points seraient loin de l'axe OE de la rotation à laquelle se réduit le mouvement relatif. Pendant tout le temps que deux profils sont en prise, ils peuvent donc être considérés comme contenus dans le plan tangent commun aux deux cônes FAE, EBG, le long de la génératrice AB, si l'on admet approximativement que deux secteurs coniques de petite étendue, ayant A et B pour sommets, peuvent être assimilés à des plans. Par conséquent ces secteurs se conduisent mutuellement au moyen des profils des dents comme s'ils appartenaient à un engrenage plan dont les circonférences primitives auraient les rayons AE, BE, et se toucheraient en E. Après que ces deux secteurs auront cessé de se conduire, ils seront remplacés par deux autres tout pareils, et la même conclusion subsiste indéfiniment.

Nous arrivons ainsi à la construction suivante. On développe sur un plan les deux cônes FAE, EBG, ce qui donne deux secteurs finis FEF′, GEG′ (*fig.* 78). Considérant ensuite les arcs de ces secteurs comme deux circonférences primitives, et adoptant pour longueur du pas une partie aliquote de ces arcs, on tracera un engrenage plan, dans l'un des systèmes précédemment étudiés; presque toujours on choisit l'engre-

nage à flancs. Cela fait, on enroule les deux secteurs respectivement sur les cônes qui les ont fournis; les profils qu'on avait tracés, maintenant reportés sur les cônes, sont pris pour directrices de surfaces coniques ayant le point O pour sommet. Ce sont les surfaces des dents.

Fig. 78.



Dans la pratique, les divers cônes qui constituent l'engrenage ne se prolongent pas jusqu'à leurs sommets. Chaque roue est comprise entre deux plans perpendiculaires à son axe, savoir : IH et LK (*fig.* 77) pour la roue tournant autour de OA, MN et KP pour la roue tournant autour de OB.

Les roues d'engrenage conique se nomment assez ordinairement *roues d'angle.*

51. *Engrenage entre deux corps tournant autour d'axes non situés dans le même plan.* — Quand deux axes ne sont pas situés dans le même plan, on peut toujours, d'une infinité de manières, tracer une droite qui les rencontre tous les deux. Soient A et A′ les deux axes, D la droite qui les coupe. S'il s'agit de transmettre le mouvement d'un premier corps S tournant autour de A à un second corps S′ tournant autour de A′, on commencera par établir un engrenage conique transmettant le mouvement de S à un corps intermédiaire assujetti à tourner autour de D; puis, au moyen d'un second engrenage conique, on transmettra le mouvement de ce corps intermédiaire au corps S′. La vitesse angulaire autour de D sera dans un rapport constant avec chacune des deux vitesses angulaires autour de A et de A′; donc ces deux dernières seront elles-mêmes dans un rapport constant.

La droite auxiliaire D pourrait être aussi une parallèle à l'un des axes, menée par un point de l'autre. Parmi les deux engrenages qu'on aurait à employer, il y en aurait alors un qui serait cylindrique.

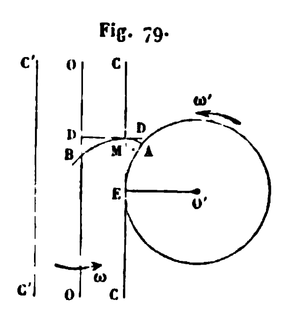
Ces combinaisons ne constituent pas, à proprement parler, un mécanisme du premier genre (n° 44), parce que les deux

corps S et S′ ne sont pas en contact immédiat, mais agissent l'un sur l'autre au moyen d'un corps intermédiaire. Mais ce sont là des combinaisons fort simples de deux mécanismes du premier genre. En tout cas, elles appartiennent à la première classe, en raison du rapport constant des vitesses angulaires.

52. *Vis sans fin.* — Lorsque les axes, sans être concourants, ont des directions perpendiculaires entre elles, on peut employer, pour résoudre la question du n° 51, l'engrenage de la *vis sans fin*.

Prenons pour plan de la figure un plan mené par l'un des axes OO (*fig.* 79) perpendiculairement à l'autre axe O′. Imaginons un cylindre circulaire droit, de rayon $\overline{DM} = r$, ayant OO pour axe et qui coupe le plan de la figure suivant les droites CC, C′C′; lions à ce cylindre une surface de vis à filet carré, dont OO serait la directrice rectiligne et dont l'autre directrice serait une hélice de pas h tracée sur le cylindre. Décrivons enfin de O′ comme centre une circonférence O′E tangente à la droite CC. Il s'agit d'armer cette circonférence de dents ayant une forme telle que, si le mouvement se transmet de l'axe OO à l'axe O′, ou inversement, par la pression réciproque de la surface hélicoïdale et des dents, les vitesses angulaires conservent un rapport invariable.

Fig. 79.



Soit DD une génératrice de l'hélicoïde, se trouvant actuellement dans le plan COC′ de la figure. Si la vis tourne autour de OO avec la vitesse angulaire ω, au bout du temps dt la génératrice DD sera remplacée dans le plan COC′ par une autre, ayant même direction et située à une distance $\dfrac{h\omega dt}{2\pi}$ de la première; après un second intervalle de temps, une troisième génératrice aura de même succédé à la seconde, et ainsi de suite. Toutes ces génératrices figureront les positions successives du flanc d'une crémaillère, animée, parallèlement à OO,

d'une vitesse $\frac{h\omega}{2\pi}$, qui doit se transformer en une vitesse angulaire ω' autour de O', en rapport constant avec ω. Or, si $\frac{\omega'}{\omega}$ est constant, il en est de même de $\frac{h\omega}{2\pi\omega'}$; on se trouve donc ici tout à fait dans les conditions de l'engrenage d'une roue dentée avec une crémaillère à flancs droits (n° 49, *e*). En supposant que le contact des dents doive toujours avoir lieu sur la droite CC, le profil conjugué du flanc DD sera une développante AMB du cercle O'E.

Cette définition de la figure des dents serait complète si la roue O' pouvait se réduire à un plan sans épaisseur; mais, comme cela est impossible, il reste encore à indiquer la surface qui doit les former, surface dont on ne connaît jusqu'à présent que l'intersection AMB avec un plan déterminé. Cette surface doit toujours rester tangente, dans toutes ses positions, à l'hélicoïde de la vis; ainsi, quand le contact se produit en M, le plan tangent commun passe par DD, et fait avec le plan de la figure un angle θ égal à celui sous lequel l'hélice directrice coupe les génératrices de son cylindre, ou, si l'on veut, égal à l'angle complémentaire de celui que la même hélice fait avec les sections droites. La surface enveloppe de tous les plans tangents analogues menés par les divers points de AMB pourra être adoptée pour surface des dents, car elle sera constamment tangente à l'hélicoïde, et, attendu que le contact restera toujours sur la développante AMB, la transmission de mouvement se fera comme si cette développante existait seule, c'est-à-dire suivant la loi voulue. L'enveloppe dont il s'agit est une surface réglée dont toutes les génératrices se projettent sur le plan de la figure suivant les normales à AMB ou les tangentes au cercle O'E, et font l'angle constant θ avec leur projection. On sait que la surface ainsi définie est un hélicoïde développable, lieu des tangentes à une hélice tracée sur le cylindre dont le cercle O'E est la section droite; le pas de cette hélice aurait pour valeur $2\pi r' \tang\theta$, en nommant r' le rayon $\overline{\mathrm{O\,E}}$.

Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des vitesses angulaires est facile à trouver.

La vitesse $\frac{h\omega}{2\pi}$, avec laquelle se déplace la crémaillère idéale dont on a parlé plus haut, se transforme en une vitesse égale sur la circonférence primitive O′E; on a donc

$$\omega' r' = \frac{h\omega}{2\pi} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{h}{2\pi r'},$$

ou encore, attendu que $h = 2\pi r \cot\theta$,

$$(1) \qquad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{r\cot\theta}{r'}.$$

Nous pouvons encore nous rendre compte du glissement. Supposons, pour fixer les idées, que les mouvements aient les sens indiqués sur la *fig.* 79; alors la vitesse v du point M de la vis est dirigée suivant une perpendiculaire au plan de la figure, allant en arrière de ce plan, dans lequel se trouve au contraire la vitesse v' du point M de la roue, dirigée suivant une perpendiculaire à O′M. La vitesse relative ou vitesse de glissement de la roue sur la vis (n° 41) s'obtiendra en composant v' avec v changée de sens (n° 31). Or, si nous posons $\overline{EM} = y$, nous aurons

$$v = \omega r, \quad v' = \omega'.\overline{O'M} = \omega'\sqrt{r'^2 + y^2},$$

et, par suite, la vitesse u de glissement sera

$$u = \sqrt{v^2 + v'^2} = \sqrt{\omega^2 r^2 + \omega'^2 (r'^2 + y^2)},$$

car ses deux composantes v et v' sont rectangulaires. En vertu de l'équation (1), cette valeur se met sous la forme

$$(2) \qquad u = \omega r \sqrt{1 + \cot^2\theta\left(1 + \frac{y^2}{r'^2}\right)}.$$

Dans la pratique, la distance y reste toujours très petite; si on la néglige, on aura simplement

$$(3) \qquad u = \omega r \sqrt{1 + \cot^2\theta} = \frac{\omega r}{\sin\theta}.$$

Cette hypothèse simplificative étant admise, les deux composantes v et v' se trouvent dans le plan tangent mené sui-

vant CC au cylindre de la vis; le rapport $\frac{v'}{v}$ devient $\frac{\omega' r}{\omega r}$ ou $\cot\theta$, d'où l'on déduit immédiatement que la résultante fait l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec v et a même direction que la tangente à l'hélice.

53. *Vis et écrou.* — Le mouvement relatif d'une vis par rapport à son écrou considéré comme fixe est toujours un mouvement hélicoïdal, composé d'une rotation autour de son axe et d'un glissement le long du même axe; ce glissement, toujours proportionnel à la rotation, est égal à un pas de la vis pour chaque tour complet de celle-ci.

On peut concevoir qu'on donne à l'ensemble des deux corps un mouvement commun qui annule un des deux mouvements composants ci-dessus définis. Si, par exemple, on oblige la vis à tourner sur place, on aura supprimé sa translation, et si l'écrou ne tourne pas, il devra prendre, suivant l'axe, une translation d'un pas à chaque tour de la vis. Inversement, si l'écrou tourne sur place et que la vis ne puisse avoir qu'une translation, elle parcourra une longueur d'un pas à chaque tour de l'écrou.

Plus généralement nommons

α l'angle décrit par la vis dans un temps quelconque;
α' l'angle décrit simultanément par l'écrou, compté dans le même sens que α;
x la translation simultanée de la vis parallèlement à son axe;
x' la translation simultanée de l'écrou, comptée dans le même sens que x.

On aura l'équation générale

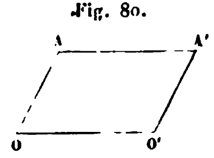
$$x - x' = h\frac{\alpha - \alpha'}{2\pi},$$

en vertu de la définition géométrique de l'appareil, car $x - x'$ et $\alpha - \alpha'$ expriment l'étendue des deux mouvements composants de la vis relativement à l'écrou. On verra plus tard des applications de cette équation.

54. *Mécanisme de la première classe, deuxième genre.* — Il s'agit de transmettre le mouvement d'un corps à un autre, en conservant un rapport invariable entre les vitesses, par l'emploi d'un lieu intermédiaire rigide. Voici quelques appareils employés à cet effet.

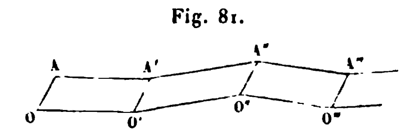
(*a*) *Bielle d'accouplement.* — Soient O et O' (*fig.* 80) les projections de deux axes parallèles. On adapte à ces axes deux manivelles égales $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ dont les extrémités A et A' sont articulées avec une bielle AA' ayant une longueur égale à la distance $\overline{OO'}$. Les choses étant ainsi disposées, quelque situation qu'on attribue aux manivelles, il faudra toujours que le quadrilatère AOO'A' soit un parallélogramme, puisque ses côtés opposés sont égaux. Donc O'A' reste parallèle à OA, et les deux manivelles tournent constamment de la même quantité.

Fig. 80.



(*b*) *Tiges et varlets; renvois de sonnettes.* — Lorsque les lignes OA et O'A' de la *fig.* 80 représentent, non pas des manivelles tournant d'une manière continue autour de leurs axes O et O', mais de simples tiges oscillant autour de ces mêmes axes, elles prennent le nom de *varlets;* AA' est une *tige* qui transporte en A' le mouvement de A. Le point A' pourrait ensuite agir d'une manière semblable sur un autre point A'', qui lui-même agirait sur A''', et ainsi de suite. Le

Fig. 81.



mouvement de A se transmettrait ainsi à distance. Les tiges soutenues par les varlets suivraient les ondulations du terrain (*fig.* 81).

Cette combinaison avait été employée dans l'ancienne machine de Marly. Aujourd'hui elle paraît abandonnée, au moins pour les applications sur une grande échelle.

Les renvois de sonnettes sont des leviers coudés, le plus souvent à angle droit (*fig.* 82). Pendant que l'extrémité A décrit, autour de l'axe fixe O, un petit arc assimilable à une droite perpendiculaire sur OA, le point B décrit de même un petit chemin perpendiculaire à OB, et d'une longueur égale à celle du premier multipliée par $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}$. C'est un moyen de transformer le déplacement de la tige A*a* en un déplacement de la tige B*b*, en changeant tout à la fois, si l'on veut, la direction et la grandeur du déplacement primitif, mais à la condition de ne donner à ces mouvements qu'une étendue assez restreinte.

Fig. 82.

55. *Mécanismes de la première classe, troisième genre.* — Voici divers exemples de l'emploi d'un lien flexible pour transmettre le mouvement d'un corps à un autre, en satisfaisant toujours à la condition commune pour tous les mécanismes de la première classe, celle de ne pas faire varier le rapport des vitesses.

(*a*) *Poulie fixe.* — La *poulie fixe* est une espèce de roue assujettie à tourner autour d'un axe O immobile (*fig.* 83), sur laquelle passe un corps flexible (corde, chaîne, courroie) AB. La poulie étant suffisamment mobile sur ses supports, lorsqu'on tire la corde par un bout pour déplacer un corps M attaché à l'autre bout, on fait tourner en même temps la poulie autour de l'axe O, et la corde se déroule d'un côté pendant qu'elle s'enroule de l'autre. Si, d'ailleurs, elle est supposée inextensible et si elle ne glisse pas sur la poulie, le déplacement du corps sera égal à celui d'un point de la poulie situé à la même distance de O que les brins A*a*, B*b*. On voit donc qu'on aura transformé le mouvement de rotation de la poulie en un mouvement de translation du corps M.

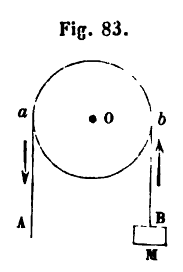


Fig. 83.

La poulie est dite *mobile* quand son axe de rotation se dé-

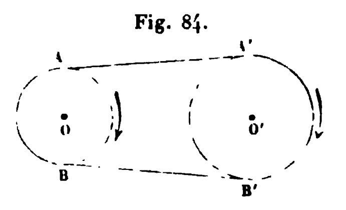
place. Nous indiquerons ultérieurement quelques usages de ce second genre de poulies.

(*b*) *Treuils ou cabestans.* — Le *treuil* est un cylindre à axe horizontal, et le *cabestan* un cylindre à axe vertical; on peut concevoir aussi des axes inclinés. Dans tous les cas, une corde ou chaîne s'enroule sur le cylindre, auquel on communique un mouvement de rotation autour de son axe de figure; en s'enroulant, elle tire et déplace un corps attaché à son extrémité libre, avec une vitesse constamment proportionnelle à la vitesse angulaire du cylindre. Pendant cet enroulement, la corde trace sur la surface du cylindre une hélice à pas très petit, dont chaque spire peut s'assimiler approximativement à une section droite.

(*c*) *Courroies sans fin.* — Considérons deux solides assujettis à tourner autour de deux axes fixes O, O′ (*fig.* 84), que nous supposerons d'abord parallèles. Nous avons déjà indiqué (nº 45) des moyens de transmettre le mouvement de l'un à l'autre, sous la condition d'un rapport constant des vitesses; il y en a un autre, très fréquemment usité, qui consiste dans l'emploi des courroies sans fin.

On établit sur les deux arbres des poulies ou tambours, dont les sections moyennes sont dans un plan perpendiculaire à la direction des axes. Sur les jantes de ces deux poulies se place une courroie sans fin (c'est-à-dire formant un circuit fermé AA′B′B), assez fortement serrée contre elles pour ne pas glisser. Si l'on admet alors que la courroie soit inextensible, tous ses points ont même vitesse, et, puisqu'il n'y a pas glissement, cette vitesse est égale à celle qui existe sur les circonférences des poulies; donc, en nommant

Fig. 84.



ω, ω' les vitesses angulaires autour de O et O′,
r, r' les rayons $\overline{OA}, \overline{O'A'}$,

ces quantités satisfont à la relation

$$(1) \qquad \omega r = \omega' r', \quad \text{d'où} \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{r'}{r}.$$

Le rapport des vitesses angulaires est donc bien constant; de plus, il est égal au rapport inverse des rayons.

La démonstration de ce fait suppose les courroies inextensibles. Si l'on tient compte de la faible extensibilité qui existe réellement, l'équation (1) doit subir une légère correction; nous la supposerons négligeable.

L'expérience fait reconnaître que, pour bien assurer la stabilité de la courroie sur chacune des deux poulies et empêcher son déversement latéral, il faut donner à la jante un profil convexe extérieurement, et non point un profil concave.

La disposition indiquée dans la *fig.* 84 convient au cas où les deux vitesses angulaires ω, ω' sont de même sens. Pour obtenir des sens contraires, on ferait suivre à la courroie sans fin les deux autres tangentes communes aux cercles des poulies, celles qui se croisent dans l'intervalle des centres O, O′ (*fig.* 85).

Fig. 85.

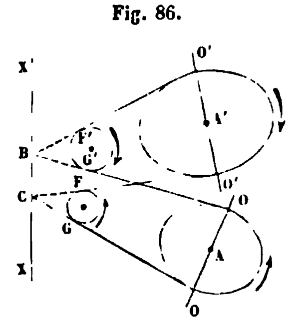
On évite que les deux brins qui se croisent au point C se gênent mutuellement, en tordant chacun d'eux de manière qu'ils se touchent par la face et non par la tranche. De plus, on a soin qu'ils se touchent par celle des deux faces qui est lisse, tandis que la face rugueuse reste en contact avec les deux poulies.

Les courroies sans fin, disposées comme on vient de le dire et représentées par les *fig.* 84 et 85, établissent, entre les deux axes parallèles O et O′, une communication de mouvement qui peut fonctionner, soit dans le sens marqué par les flèches, soit en sens contraire.

Lorsque les axes ne sont pas parallèles et qu'on veut encore pouvoir faire fonctionner la communication dans deux sens opposés, il faut se servir de poulies de renvoi. Sur chaque arbre OO, O′O′ (*fig.* 86), on établit encore une poulie ou tambour, dont le plan moyen est perpendiculaire à l'axe. Soit XX la droite suivant laquelle se coupent les deux plans moyens; prenons sur cette droite deux points B, C et, par chacun d'eux, menons des tangentes aux cercles des deux poulies. Entre les deux tangentes issues de chaque point, on dispose une poulie de renvoi; sur chaque poulie passe l'un des brins

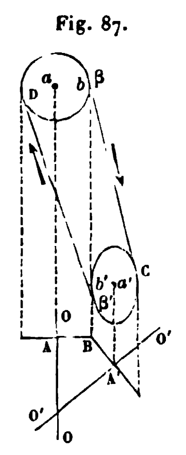
de la courroie sans fin, qui suit alors le contour fermé EGFE'D'F'G'DE. Toutes les portions de ce contour sont composées d'arcs de cercle et de lignes droites contenues dans les deux plans des deux cercles qu'elles touchent, d'où il résulte que la courroie ne tend aucunement à se détacher des poulies, en se déversant par côté.

Fig. 86.



Cet appareil assez compliqué peut se simplifier beaucoup, lorsqu'on n'impose pas aux poulies la condition de marcher dans les deux sens et que les axes ne sont pas trop rapprochés l'un de l'autre. On peut alors supprimer les poulies de renvoi, eu égard à une remarque dont l'expérience démontre l'exactitude; le brin qui arrive sur une poulie doit nécessairement se trouver dans le plan de la poulie, tandis que le brin s'éloignant de la poulie peut sans inconvénient sortir de ce plan. Cela posé, soient OO, O'O' (*fig.* 87) les projections des deux axes sur un plan parallèle à leurs directions; prenons dans ce plan un point B, dont les distances $\overline{BA}$, $\overline{BA'}$ aux axes projetés soient égales aux rayons des poulies, et faisons passer les plans moyens de celles-ci par les droites BA, BA'. En projection sur un plan perpendiculaire à OOO'O', par exemple sur le plan de la poulie AB, cette poulie sera placée en a, l'autre en a', et les deux cercles auront une tangente commune bb', qui sera l'intersection de leurs plans. Si du point b on menait la seconde tangente au cercle a', elle serait dans le plan de ce cercle, mais sécante au cylindre de la poulie a; toutefois, vu l'éloignement des deux poulies, elle n'entre que fort peu dans ce cylindre, parce qu'elle fait un petit angle avec la tangente bb'. En modifiant très légèrement la position de cette droite, on aura la droite $C\beta$ qui, tout en restant tangente au cercle a' et contenue dans

Fig. 87.



son plan, touchera le cylindre de l'autre poulie en un point β très voisin de *b*. On trouvera de même une droite D β′ tangente au cercle *a*, dans son plan et touchant le cylindre de la poulie *a′* dans le voisinage de *b*. La courroie sans fin devra suivre le contour βCβ′D. Si le mouvement a lieu dans le sens des flèches, on a bien rempli la condition que le plan de chaque poulie contienne le brin de courroie arrivant sur elle; mais il ne contient pas celui qui s'éloigne, de sorte que la condition cesse d'être remplie quand on change le sens du mouvement, et alors la courroie ne tarde pas à tomber.

§ III. — Combinaisons diverses de mécanisme de la première classe.

56. *Trains ou équipages de roues dentées.* — On a vu (nº 49, *f*) que les rayons des circonférences primitives d'un engrenage cylindrique sont proportionnels aux nombres des dents qu'elles portent; par suite, les vitesses angulaires sont dans le rapport inverse des nombres de dents. La même chose est vraie aussi pour les engrenages coniques. Les vitesses angulaires sont, en effet, inversement proportionnelles aux rayons des circonférences formant les bases des cônes primitifs (nº 50), et ces circonférences reçoivent chacune un nombre de dents en rapport direct avec sa longueur ou avec son rayon. Il résulte de là que le rapport des vitesses angulaires de deux axes communiquant par engrenage ne peut varier qu'entre certaines limites; car, ainsi que nous l'avons déjà dit, le nombre des dents d'une roue varie presque toujours entre 10 et 120, de sorte que le rapport entre la plus petite et la plus grande des deux vitesses est compris entre 1 et $\frac{1}{12}$.

Lorsqu'on veut obtenir un rapport notablement inférieur à $\frac{1}{2}$, on établit entre les deux arbres d'autres arbres intermédiaires. L'un des deux arbres donnés reçoit directement une rotation et fait tourner, au moyen d'un engrenage, le premier arbre intermédiaire; celui-ci fait tourner de même un second arbre, qui en fait tourner un troisième; et ainsi

de suite, jusqu'à ce qu'on arrive au second arbre primitivement donné. Cette suite d'engrenages constitue ce qu'on nomme un *train* ou *équipage* de roues dentées. Dans chaque engrenage, en particulier, la plus petite roue se nomme un *pignon*.

Si nous supposons, pour fixer les idées, que la vitesse angulaire doive diminuer en passant du premier au second des arbres donnés, le premier portera un pignon engrenant avec une roue placée sur le premier arbre intermédiaire; sur ce même arbre sera monté un pignon engrenant avec une roue, qui appartient à l'arbre intermédiaire suivant. Chacun des arbres intermédiaires porte de même un pignon et une roue, le premier pour mener la roue de l'arbre suivant, la seconde conduite par le pignon de l'arbre qui précède. Le dernier arbre (ou le second des arbres primitivement donnés) ne porte qu'une roue. Nommons :

ω, ω' les vitesses angulaires du premier et du second arbre primitivement donnés;
$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ celles des arbres intermédiaires successifs:
$a, a_1, a_2, \ldots, a_n$ les nombres de dents des pignons;
$A_1, A_2, \ldots, A_n, A'$ les nombres de dents des roues;

on aura les égalités

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{a}{A_1}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a_1}{A_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\omega'}{\omega_n} = \frac{a_n}{A'};$$

d'où l'on tire, par une multiplication membre à membre,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{aa_1\ldots a_n}{A_1A_2\ldots A'}.$$

Ce rapport se nomme la *raison* du train. La raison du train est égale, comme on voit, au produit des nombres de dents des pignons, divisé par le produit des nombres de dents des roues.

Dans le cas d'axes tous parallèles entre eux, on peut convenir de donner le signe + ou le signe — aux rapports tels que $\frac{a}{A_1}$, $\frac{a_1}{A_2}$, ..., suivant que l'engrenage correspondant est intérieur ou extérieur. En passant d'un arbre au suivant, la

vitesse conserve le même sens ou prend le sens contraire, selon qu'on rencontre la première ou la seconde de ces alternatives. Il est facile d'en conclure que les vitesses ω et ω' seront de même sens si la raison est positive, et qu'elles auront des sens opposés si la raison est négative.

57. *Recherche d'un train dont la raison est donnée.* — Si la raison est une fraction commensurable, on décompose ses deux termes en facteurs premiers; on combine ensuite ces facteurs, en multipliant au besoin les deux termes par un même nombre, de manière à obtenir au numérateur et au dénominateur le produit d'un même nombre de facteurs convenables, c'est-à-dire compris (autant que possible) entre 10 et 120.

Soit donnée, par exemple, la raison

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{8393}{7213890} = \frac{7.11.109}{2.3.5.37.67.97};$$

on multipliera les deux termes de la fraction par 200, ce qui permettra de remplacer 7 par 10.10.14 et 2.3.5.37 par 25.74.120. Alors on aura

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{10.10.11.14.109}{25.67.74.97.120}.$$

Le train comprendrait, outre les arbres extrêmes O et O', quatre arbres intermédiaires O_1, O_2, O_3, O_4; les nombres de dents seraient donnés par le Tableau suivant :

Arbre O	Pignon de	10	dents
» O_1	Roue de	25	»
	Pignon de	10	»
» O_2	Roue de	67	»
	Pignon de	11	»
» O_3	Roue de	74	»
	Pignon de	14	»
» O_4	Roue de	97	»
	Pignon de	109	»
» O'	Roue de	120	»

Il est à remarquer que, si l'on faisait les cinq engrenages

extérieurs, les vitesses ω, ω' seraient de sens contraires; si l'on tenait à conserver le même sens, il faudrait, ou faire l'un des engrenages intérieur, ou mettre un arbre intermédiaire de plus.

Si les deux termes ont de trop grands facteurs premiers, la question peut se résoudre par approximation au moyen de la méthode suivante, due à Huygens. On développe la raison donnée en fraction continue; on en calcule toutes les réduites et l'on choisit parmi elles une fraction dont les deux termes puissent se décomposer en facteurs convenables. Cette fraction remplace approximativement la raison donnée. Quelquefois aussi l'on emploie une méthode un peu différente et que voici :

Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux réduites consécutives; l et m étant deux nombres entiers et positifs quelconques, la fraction

$$\frac{la + mc}{lb + mb}$$

sera comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$; il pourra se faire, non seulement qu'elle approche plus de la raison exacte que l'une ou l'autre des réduites $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$, mais aussi que ses termes soient décomposables en facteurs plus simples. Si l'on prend pour ces réduites l'avant-dernière et la dernière, $\frac{c}{d}$ sera alors la raison exacte; d'un autre côté, on a

$$\frac{la + mc}{lb + md} - \frac{c}{d} = \frac{l(ad - bc)}{d(lb + md)} = \pm \frac{l}{d(lb + md)};$$

on voit ainsi qu'on rendra l'erreur petite en prenant l petit et m grand.

Exemple : *horloge lunaire.* — Supposons que la grande aiguille d'une horloge doive faire un tour en douze heures, ou un demi-jour, pendant que la petite fera son tour dans la durée d'une lunaison, soit en $29^{j},5306$. Ici la raison est

$$\frac{0,5}{29,5306} = \frac{2500}{147653} = \frac{2^2.5^4}{11.31.433},$$

et l'on demande un train capable de la produire avec une assez grande exactitude.

D'abord on voit que l'exactitude rigoureuse est impossible, car on ne peut songer à faire une roue de 433 dents. Transformons alors la raison en fraction continue; nous aurons

$$\frac{2500}{147653} = \cfrac{1}{59 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{16 + \frac{1}{3}}}}}},$$

et les réduites seront

$$\frac{1}{59}, \quad \frac{16}{945}, \quad \frac{33}{1949}, \quad \frac{49}{2894}, \quad \frac{817}{48253}, \quad \frac{2500}{147653}.$$

Les dénominateurs des quatre dernières contiennent des facteurs premiers trop grands; on ne peut donc choisir parmi ces fractions que $\frac{16}{945} = \frac{2^4}{3^3.5.7}$. Cette raison approchée se réaliserait avec trois pignons de 10, 10, 16 dents, menant respectivement des roues de 27, 50 et 70 dents, car on vérifie sans peine que $\frac{10.10.16}{27.50.70} = \frac{16}{945}$. L'erreur relative en moins s'exprimerait par

$$\frac{\frac{2500}{147653} - \frac{16}{945}}{\frac{2500}{147653}} = \frac{2500.945 - 16.147653}{2500.945} = \frac{52}{2362500} = \frac{13}{590625},$$

soit environ $\frac{1}{45433}$, ce qui correspond à $0^j,00065$ ou un peu plus de 57^s par lunaison.

On peut encore prendre, pour augmenter l'approximation, une des fractions qui suivent :

$$\frac{49.6 + 33}{2894.6 + 1949} = \frac{327}{19313} = \frac{3.109}{7.31.89} = \frac{10.12.16.109}{20.62.89.112},$$

$$\frac{817.2 + 49}{48253.2 + 2894} = \frac{1683}{99400} = \frac{3^2.11.17}{2^3.5^2.7.71} = \frac{10.11.17.18}{20.21.50.78},$$

les erreurs relatives seraient

Pour la première.... $\frac{31}{48282500} = \frac{1}{1557500}$,

répondant à $0^j,000019$ ou $1^s,64$ par lunaison;

Pour la seconde............ $-\frac{1}{248500000}$,

chiffre tout à fait négligeable, qui produit seulement $0^s,103$ par lunaison.

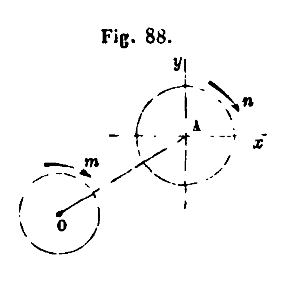
Ces erreurs sont d'ailleurs de même ordre que celle dont est affecté le nombre 29,5306, ci-dessus admis comme représentant la durée d'une lunaison, quand le jour est pris pour unité (¹).

58. *Trains épicycloïdaux.* — Un train de roues dentées est dit *épicycloïdal* quand il est porté par un châssis mobile autour d'un axe fixe; si l'axe de certaines roues n'est pas entraîné par le châssis, c'est qu'alors il coïncide avec celui autour duquel ce châssis tourne lui-même.

Nous distinguerons dans le train trois pièces essentielles : 1° le châssis; 2° la première roue, dont l'axe est toujours commun avec celui du châssis; 3° la dernière roue, tantôt concentrique, tantôt excentrique à la première. Dans le second cas, le centre de la dernière roue décrit un cercle.

Considérons un train épicycloïdal dont O et A (*fig.* 88) sont la première et la dernière roue et OA le châssis; soient m, n, a les vitesses angulaires respectives de ces trois pièces dans leur mouvement absolu, ces vitesses étant évaluées en adoptant un sens positif déterminé, par exemple celui qui est indiqué par la flèche. Il faut prendre garde aussi que m et a sont les vitesses de rotation

Fig. 88.



(¹) D'après l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour l'année 1883, cette durée serait de $29^j 12^h 44^m 2^s,9$, c'est-à-dire de $29^j,530589820$. Le chiffre de $29^j,5306$ est donc trop élevé de $0^j,000010 88$ ou de $0^s,94$ environ

de la première roue et du châssis autour de l'axe fixe O, tandis que n s'évalue relativement à des axes Ax, Ay, menés par le point A de la dernière roue et se déplaçant parallèlement à eux-mêmes.

Le mouvement relatif de la roue O par rapport au châssis sera évidemment une rotation autour de l'axe O avec une vitesse angulaire $m - a$. Le mouvement relatif de la roue A par rapport au même corps sera une rotation autour de l'axe A, car les points de cette droite n'ont aucun déplacement relatif; de plus, la vitesse angulaire sera $n - a$, car le mouvement relatif résulte de la composition d'un premier mouvement comprenant une rotation n autour de A et une translation, avec une rotation $-a$ autour de O, et la règle générale du n° 37 donnera $n - a$ pour vitesse angulaire du mouvement élémentaire résultant. Si donc on nomme ε la raison du train, c'est-à-dire le rapport de la vitesse angulaire de la dernière roue à celle de la première, dans l'hypothèse de la fixité du châssis, on aura la relation générale, donnée par Willis,

$$\varepsilon = \frac{n - a}{m - a}. \tag{1}$$

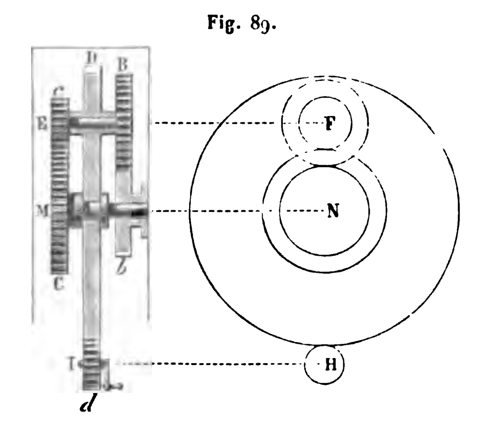
La raison ε dépend uniquement du nombre des dents mises sur chaque roue; pour un train déterminé, c'est une donnée immédiate. L'équation (1) établit alors une relation entre les trois vitesses angulaires m, n, a et permet de calculer l'une d'elles quand les deux autres sont connues.

Les trains épicycloïdaux fournissent de nouvelles ressources pour obtenir des rapports compliqués entre les vitesses angulaires de deux arbres. Nous allons le montrer par deux exemples.

Premier exemple : *Horloge lunaire de Pecqueur.* — L'arbre MN (*fig.* 89), ayant son axe fixe, traverse à frottement doux une roue concentrique D, engrenant avec la roue d qui tourne autour de l'axe fixe HH. La roue D porte un canon ou cylindre creux, traversé aussi à frottement doux par l'arbre EF faisant corps avec deux roues B et c, dont la première engrène avec une roue fixe b concentrique à l'arbre MN, et la seconde avec une roue C calée sur ce même arbre. Pour plus de simplicité, la figure représente les roues par deux lignes parallèles en

projection sur un plan parallèle aux axes. Nous supposerons aussi que les lettres employées pour désigner les roues désignent en même temps leurs nombres de dents.

Fig. 89.



Nous pouvons ici considérer la roue D comme le châssis, b comme la première roue et C comme la dernière. Alors on a

$$\varepsilon = \frac{bc}{BC}, \quad m = 0,$$

et la relation (1) devient

$$\frac{bc}{BC} = -\frac{n}{a} + 1 \quad \text{ou} \quad n = a\,\frac{BC - bc}{BC}.$$

D'ailleurs la vitesse a du châssis est liée à la vitesse ω de l'arbre moteur IH par l'équation

$$-a = \frac{d}{D}\,\omega;$$

donc finalement

$$n = -\omega\,\frac{d}{DBC}\,(BC - bc).$$

Les nombres de dents choisis par Pecqueur étaient

$$d = 31, \quad D = 54, \quad b = 62, \quad B = 85, \quad c = 33, \quad C = 41;$$

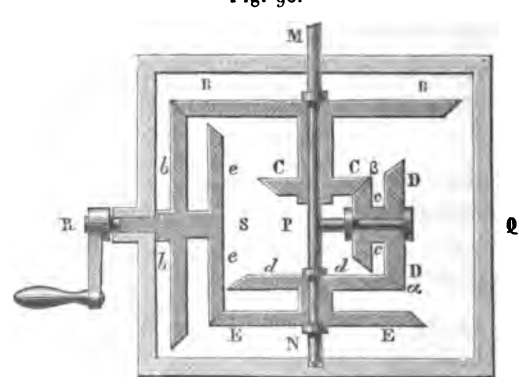
il en résulte

$$-\frac{n}{\omega} = \frac{31(85.41 - 62.33)}{54.85.41} = \frac{31.1439}{54.85.41} = \frac{44609}{188190}.$$

Cette dernière fraction était regardée par Pecqueur comme représentant le rapport de la semaine au mois lunaire, ce qui est en effet très approximativement exact, car cette hypothèse donne pour la durée de la lunaison $29^j 12^h 44^m 28^s,8$, nombre inférieur de $0^s,1$ seulement à celui qu'indique l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* (1883). Le nombre 1439 étant premier, on voit qu'un train ordinaire d'engrenages n'aurait pu réaliser ce rapport, puisqu'il aurait fallu construire une roue de 1439 dents, ce qui est inadmissible; on y arrive au contraire par l'emploi d'un train épicycloïdal, sans mettre plus de 85 dents sur une roue.

Deuxième exemple : *Appareil formé de huit roues invariablement liées deux à deux.* — Le châssis est composé de deux tiges MN, PQ (*fig.* 90) perpendiculaires l'une à l'autre et inva-

Fig. 90.



riablement liées entre elles; il tourne autour de l'axe fixe MN. La tige MN traverse à frottement doux deux autres systèmes solides tournant autour du même axe et formés chacun de deux roues d'angle réunies par un canon, savoir : 1° le système des roues B, C; 2° le système des roues *d*, E. La tige PQ traverse de même à frottement doux un système analogue de deux cônes *c*, D qui engrènent respectivement avec C et *a*. Il est bien entendu que chacun de ces trois systèmes est empêché, par des épaulements convenables, de glisser le long de la tige qui le traverse; les deux premiers tournent sur place

autour de l'axe fixe MN, le troisième a un mouvement composé, et tourne autour de PQ pendant que le châssis tourne autour de MN. Enfin deux roues d'angle b, e, calées sur un même arbre RS tournant sur des coussinets fixes, mettent en mouvement les deux systèmes B, C et E, d.

Dans cet exemple, nous pouvons regarder E comme la première roue et B comme la dernière. Il est d'abord facile de reconnaître que, relativement au châssis supposé fixe, ces deux roues tournent en sens contraires, parce que les points α et β par lesquels se touchent d'une part les roues d et D, d'autre part les roues c et C, sont des deux côtés de l'axe PQ, de sorte que leurs vitesses relatives ont des sens opposés l'un à l'autre. La raison ε sera donc égale à $-\frac{cd}{\text{CD}}$, en convenant toujours de désigner le nombre des dents de chaque roue par la même lettre que cette roue elle-même; par suite, la formule (1) de Willis donne

$$\varepsilon = -\frac{cd}{\text{CD}} = \frac{n-a}{m-a}.$$

Or l'arbre moteur, dont nous appellerons ω la vitesse angulaire, communique à E la vitesse angulaire absolue m et à B la vitesse n; ces vitesses, qui ont des sens opposés, sont données par les équations

$$m = \omega\frac{e}{\text{E}}, \quad n = -\omega\frac{b}{\text{B}}.$$

Par la substitution de ces valeurs dans l'équation précédente, il vient

$$\frac{cd}{\text{CD}} = \frac{\frac{\omega b}{\text{B}} + a}{\frac{\omega e}{\text{E}} - a},$$

d'où l'on tire

$$\frac{a}{\omega} = \frac{\text{B}cde - b\text{CDE}}{\text{BE}(\text{CD} + cd)}.$$

La combinaison de ces huit roues permet d'obtenir pour le

rapport $\frac{a}{\omega}$ des valeurs très variées. Si l'on fait, par exemple,

$$b = 82,\quad c = 83,\quad d = 83,\quad e = 83,$$
$$B = 83,\quad C = 65,\quad D = 84,\quad E = 106,$$

on trouve

$$\frac{a}{\omega} = \frac{1}{108646502}.$$

Le dénominateur est égal au produit $2.53^2.83.233$; on ne pourrait donc obtenir rigoureusement ce rapport, avec un engrenage ordinaire, que par l'emploi d'une roue de 233 dents, nombre inusité. D'ailleurs il faudrait, même en acceptant ce nombre de 233, construire seize roues au lieu de huit; car, pour avoir le même nombre de facteurs convenables, dans les deux termes de la fraction qui exprime $\frac{a}{\omega}$, on devrait la mettre sous la forme

$$\frac{10.10.10.10.10.10.10.10}{53.83.100.100.100.100.106.233}.$$

59. *Équipages de poulies.* — Quand on ne peut pas transmettre directement le mouvement d'un arbre à un autre par une courroie sans fin, on établit un ou plusieurs arbres intermédiaires. Désignons par A et A' les arbres primitifs, par B_1, B_2, ..., B_n les arbres intermédiaires.

Une courroie sans fin transmettra le mouvement de A à B_1, un autre de B_1 à B_2, une troisième de B_2 à B_3, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à A'. Il faudra donc que le premier et le dernier arbre portent chacun une poulie ou un tambour, et qu'il y en ait deux sur chaque arbre intermédiaire. Si l'on nomme

ω, ω', ω_1, ω_2, ..., ω_n les vitesses angulaires respectives des arbres A, A', B_1, B_2, ..., B_n;

r le rayon de la poulie placée sur A, R_1 le rayon de la poulie correspondante sur B_1;

r_1 le rayon de la seconde poulie placée sur B_1, R_2 le rayon de la poulie correspondante sur B_2;

r_2 le rayon de la seconde poulie de B_2, R_3 le rayon de la poulie correspondante sur B_3;

....;

r_n le rayon de la poulie placée sur B_n, qui correspond avec la poulie placée sur le dernier arbre A'; R' le rayon de cette dernière poulie;

on trouve bien facilement

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{r r_1 r_2 \ldots r_n}{R_1 R_2 \ldots R_n R'},$$

formule tout à fait analogue à celle des équipages de roues dentées. Seulement, les rayons des poulies pouvant être quelconques, entre certaines limites, quand on voudra obtenir un rapport $\frac{\omega}{\omega'}$, on ne rencontrera pas les difficultés qui tenaient à ce que les nombres de dents des roues devaient nécessairement être entiers. Les poulies de renvoi, analogues à celles dont on a parlé au n° 55, n'ont d'ailleurs aucune influence dans le calcul que nous venons de faire; elles servent, en quelque sorte, d'appui aux courroies sans fin, mais ne modifient pas les vitesses des arbres mis en communication.

Fig. 91.

B

A

60. *Moufles ou palans.* — Les moufles ou palans se composent de deux groupes de poulies portées par des essieux parallèles. On leur donne diverses dispositions, mais ces variantes n'en changent pas les propriétés essentielles. Dans celle que représente la *fig.* 91, les poulies du groupe supérieur sont placées sur un essieu fixe autour duquel elles tournent librement et qui fait partie d'une chape également fixe; les poulies du groupe inférieur tournent librement aussi autour de leur essieu, qui fait partie d'une chape mobile. Les deux chapes sont munies de crochets, l'un servant à attacher la chape supérieure, l'autre à suspendre un fardeau qu'on veut soulever. Une corde, dont l'extrémité A est libre, entoure d'abord la première poulie supérieure, descend à la première

poulie inférieure, puis remonte à la seconde poulie supérieure, redescend à la seconde poulie inférieure, et ainsi de suite. Les poulies sont en même nombre dans les deux groupes, et la corde, après avoir passé sur la dernière poulie inférieure, remonte pour s'attacher en B à la chape fixe. Lorsqu'on tire la corde en A, il en résulte un raccourcissement pour la portion commençant au contact avec la première poulie supérieure et finissant en B; par suite, la chape mobile et le fardeau qu'elle porte sont obligés de s'élever.

Nous n'avons pas ici à discuter l'appareil au point de vue des forces mises en jeu, mais nous chercherons la relation entre la vitesse v imprimée au point A et la vitesse v' avec laquelle monte la chape mobile. Pour l'obtenir, il suffit d'observer que, si l'on considère comme sensiblement parallèles entre eux les différents brins de corde allant du groupe supérieur au groupe inférieur ou inversement, le raccourcissement produit par le déplacement du point A se partage également entre tous ces brins, qui sont en nombre égal à celui des poulies. En nommant n ce nombre, on aura donc

$$v = nv'.$$

61. *Mouvements différentiels.* — Souvent, lorsqu'on veut communiquer un mouvement très lent à un corps, on s'arrange pour lui donner un mouvement composé de deux mouvements contraires presque égaux, de sorte que son mouvement absolu, égal à la différence de ces mouvements composants, devient presque nul. Voici quelques exemples des combinaisons de ce genre.

(*a*) *Engrenages différentiels de la machine à aléser.* — Quand il s'agit de polir intérieurement ou, suivant le langage technique, d'*aléser* un cylindre circulaire creux, on emploie un outil terminé par un tranchant suivant les génératrices du cylindre, et animé d'une rotation autour de l'axe de celui-ci. Le tranchant enlève les rugosités excédantes; mais, comme il est généralement moins long que le cylindre, il faut faire en sorte que, pendant sa rotation, il se déplace peu à peu dans la direction de l'axe. A cet effet, l'arbre MNL (*fig.* 92), qui porte l'outil, se termine par une vis NL entrant dans un écrou

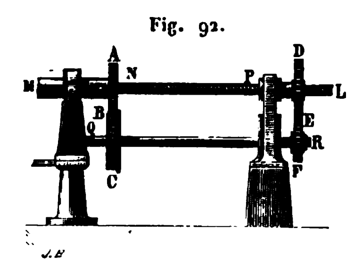
PL. L'écrou n'est pas fixe, mais animé d'un mouvement de rotation dans le même sens que la vis, avec une vitesse angulaire tant soit peu moindre. Cette rotation est produite par un système de quatre roues dentées, savoir :

Une roue AB *faisant corps avec l'arbre* ML *et engrenant avec la roue* BC, *qui peut glisser le long de l'arbre parallèle* QR, *mais détermine toujours sa rotation, parce que l'arbre est carré ;*

Une roue EF *faisant corps avec l'arbre* QR *et engrenant avec une roue* DE *qui fait corps avec l'écrou.*

Les trois roues AB, BC et EF ont un même nombre n de dents; la roue DE en a $n+1$; on peut faire, par exemple,

Fig. 92.



$n=36$. Ajoutons encore que l'arbre ML peut glisser longitudinalement sur les supports; que l'écrou peut seulement tourner sans glisser, qu'il en est de même pour l'arbre QR; et enfin que, pendant le glissement de l'arbre ML, la roue AB ne cesse pas d'engrener avec BC, parce que la première fait glisser la seconde en la pressant sur un rebord saillant.

Les choses étant ainsi disposées, on voit que, si l'on nomme ω la vitesse angulaire de ML, celle de QR sera $-\omega$ et celle de l'écrou $\omega\frac{n}{n+1}$; donc la vitesse relative de rotation de la vis, par rapport à l'écrou, sera la différence

$$\omega-\frac{\omega n}{n+1}=\frac{\omega}{n+1}.$$

Il faudra que la vis fasse $n+1$ tours dans son mouvement absolu, pour en faire un seul relativement à l'écrou, c'est-à-dire pour s'avancer d'un pas. La formule générale du n° 53

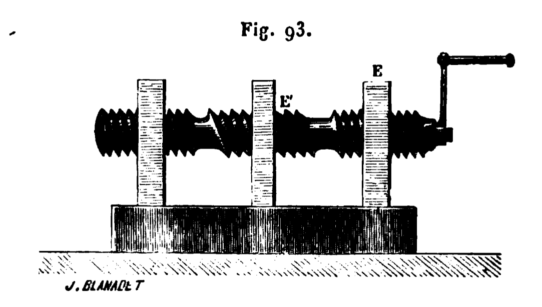
aurait conduit au même résultat; on devrait y faire $x' = 0$, puisque l'écrou ne fait que tourner autour de l'axe MN, et $\alpha' = \frac{n\alpha}{n+1}$, ce qui donnerait

$$x = \frac{h\alpha}{2\pi(n+1)}.$$

Le mouvement de translation de l'arbre ML et de l'outil qu'il porte est donc, en fin de compte, le même que si l'on avait réduit le pas de la vis à la fraction $\frac{1}{n+1}$ de sa longueur. On peut supposer que la vis a été construite avec un pas aussi petit que le comportent les conditions pratiques d'une bonne construction; le rouage différentiel qu'on vient de décrire permet en quelque sorte de pousser la réduction encore beaucoup plus loin.

(*b*) *Vis différentielle de Prony.* — Le cylindre formant le noyau solide de la vis porte deux surfaces de vis, ayant des pas différents h, h'; la première s'engage dans un écrou fixe E (*fig.* 93), et la seconde dans un écrou mobile E', assujetti

Fig. 93.



à prendre une simple translation parallèle à l'axe de la vis. Les deux surfaces de vis sont d'ailleurs dans le même sens, c'est-à-dire engendrées de telle manière, que la génératrice rectiligne de l'hélicoïde gauche parcoure l'axe du cylindre dans le même sens, quand elle tourne dans un sens déterminé.

Supposons maintenant que l'on fasse décrire à la vis une révolution complète autour de son axe et qu'elle avance ainsi

d'une quantité h, vers la gauche par exemple. L'écrou E′ ne tournant pas, la vis doit aussi avancer, relativement à lui, d'une quantité h' vers la gauche; ou, ce qui revient au même, l'écrou E′ doit s'avancer, relativement à la vis, d'une quantité h' vers la droite. Donc, puisque la vis a parcouru la longueur h vers la gauche, l'écrou a parcouru seulement la longueur $h - h'$ dans le même sens. La vis fonctionne donc, pour l'écrou E′, comme une vis de rappel ayant un pas égal à la différence $h - h'$.

Or cette différence peut être rendue aussi petite qu'on veut, tandis que le pas d'une vis ordinaire ne peut descendre au-dessous d'une certaine limite. On a donc encore dans cet exemple une espèce de moyen artificiel pour abaisser cette limite autant qu'on le juge convenable.

La formule générale du n° 53 aurait pu également s'employer ici, pour calculer le déplacement de l'écrou E′. Quand la vis tourne d'un angle α, sa translation x, suivant l'axe, est $\frac{h\alpha}{2\pi}$; considérant ensuite le mouvement relatif de la vis dans E′ et y appliquant la formule, on devra faire $x = \frac{h\alpha}{2\pi}$ et $x' = 0$, d'où résulte la translation de E′, qui est

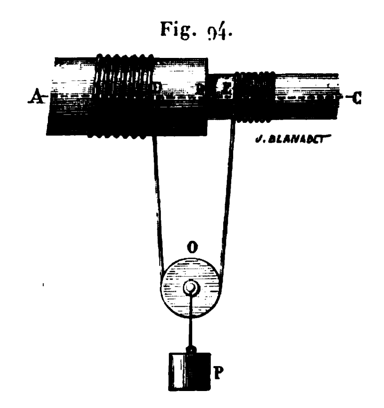
$$x' = x - \frac{h'\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha}{2\pi}(h - h').$$

(*c*) *Treuil différentiel.* — Le treuil différentiel est formé avec deux cylindres de diamètres différents AB, BC (*fig.* 94), invariablement unis l'un à l'autre, et qui peuvent tourner autour de leur axe horizontal commun ABC. Une corde, attachée par un bout au cylindre AB, fait plusieurs tours sur ce cylindre, puis s'en détache à peu près verticalement, descend de manière à faire un demi-tour sur la poulie mobile O, remonte et s'attache par l'autre bout au cylindre BC, après avoir fait plusieurs tours sur lui. On s'arrange pour que les points de contact D et E des brins verticaux avec les deux cylindres se trouvent situés de part et d'autre de l'axe. Au centre de la poulie mobile est suspendu un fardeau P, qu'on veut déplacer verticalement.

Pour cela, on fait tourner les cylindres AB, BC; r et r' étant

leurs rayons, à chaque tour il se déroulera en D une longueur $2\pi r$ de corde et il s'enroulera une longueur $2\pi r'$ en E, ou inversement, suivant le sens de la rotation ; admettons la première hypothèse, pour fixer les idées. La quantité déroulée est alors égale à $2\pi(r - r')$, et, comme elle se partage entre les deux brins verticaux, il en résulte que le fardeau sera

Fig. 94.



descendu de $\pi(r - r')$, absolument comme s'il avait été suspendu à un treuil ordinaire dont le corps cylindrique aurait eu pour rayon $\frac{1}{2}(r - r')$.

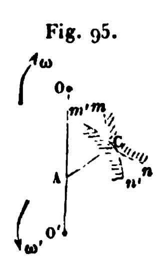
Dans un treuil ordinaire, le rayon du corps cylindrique ne peut pas diminuer indéfiniment, parce que sa solidité diminuerait aussi et qu'il deviendrait incapable de soutenir les poids qu'on veut lui faire porter. Mais rien ne limite la petitesse de $r - r'$, et l'on peut arriver ainsi à faire mouvoir beaucoup plus lentement le poids P, ce qui permet, comme on le verra plus tard, de l'équilibrer par une force plus petite. Néanmoins ce treuil est peu employé, en raison de la grande longueur de corde qu'il exige.

§ IV. — Mécanisme de la deuxième classe.

62. *Transmission de mouvement entre deux axes de rotation parallèles par le contact de deux cames cylindriques.* — Soient O et O′ deux axes fixes parallèles (*fig.* 95), autour des-

quels tournent deux solides; le mouvement peut se transmettre de O à O′ en armant le corps O d'une came limitée d'un côté par une surface cylindrique, à génératrices parallèles aux axes, dont mn représente la section droite, laquelle poussera, par contact immédiat, une autre came limitée par une surface $m'n'$, également cylindrique et parallèle aux axes, invariablement liée au corps O′. Proposons-nous de trouver, pour une position quelconque du système, le rapport des vitesses angulaires ω, ω' des deux corps, ainsi que le glissement élémentaire en C, point de contact des deux profils mn, $m'n'$.

Fig. 95.



Pour y arriver, remarquons d'abord que les courbes mn, $m'n'$ restent toujours tangentes l'une à l'autre dans leur mouvement relatif; le centre instantané de rotation pour ce mouvement se trouve donc, à un instant déterminé, sur la normale commune CA menée au point C où les courbes se touchent actuellement (n° 22, *c*). D'un autre côté, le mouvement relatif de mn, par rapport à $m'n'$, s'obtiendrait aussi par la composition de la rotation ω avec la rotation ω' prise en sens contraire (n° 31); les deux rotations composantes ont lieu autour d'axes parallèles et se réduisent à une rotation unique, dont l'axe perce le plan de la figure en un point de la ligne OO′ (n° 33). Donc le centre instantané se trouve à la fois sur les droites CA et OO′; donc il est à leur point A de rencontre.

On sait, de plus, que le point où l'axe de la rotation résultante perce le plan de la figure détermine sur la ligne OO′ deux segments $\overline{OA}$, $\overline{O'A}$ inversement proportionnels aux vitesses angulaires ω, ω'; donc:

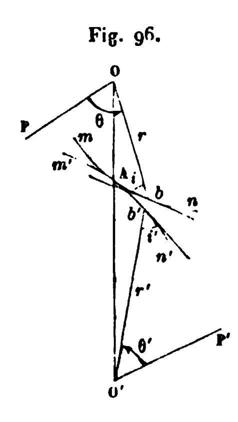
Les vitesses angulaires autour des deux axes sont en raison inverse des distances comprises entre les projections O *et* O′ *de ces axes, et le point de rencontre* A *de la ligne* OO′ *avec la normale commune* CA *aux profils des deux cames.*

Enfin, suivant que l'axe de la rotation résultante est ou n'est pas compris dans l'intervalle des axes O et O′, c'est-à-dire suivant que le point de rencontre A qu'on vient de définir tombe entre les projections O et O′ ou en dehors, les deux

rotations composantes sont de même sens ou de sens contraires. Dans la première hypothèse (qui a été admise en construisant la figure), la vitesse angulaire du mouvement relatif ci-dessus considéré est $\omega + \omega'$; par suite, la vitesse de glissement (nº 41) du point C, de mn sur $m'n'$, aura pour valeur $(\omega + \omega')\,\overline{CA}$. Dans l'hypothèse contraire, cette vitesse serait $\pm(\omega - \omega')\,\overline{CA}$.

63. *Cas particulier des courbes roulantes.* — Dans les engrenages cylindriques, on s'est arrangé pour que le point A (*fig.* 96) soit constant sur OO′, et alors $\frac{\omega}{\omega'}$ reste invariable; mais cela exige que les courbes mn, $m'n'$ aient entre elles une certaine relation, si bien que, l'une étant donnée, l'autre en est une conséquence. Alors la normale commune $\overline{AC}$ n'est pas nulle en général, de sorte qu'un certain glissement existe au point de contact C. En se plaçant à un autre point de vue, on peut se proposer de déterminer la courbe $m'n'$ répondant à la courbe donnée mn, de telle manière que leur contact se produise toujours sur la ligne des centres OO′, ce qui aura pour effet d'annuler constamment la normale $\overline{AC}$ et le glissement qui lui est proportionnel, mais sans conserver la condition d'un rapport invariable entre ω et ω'. Les courbes roulent alors l'une sur l'autre dans leur mouvement relatif et prennent, pour cette raison, le nom de *courbes roulantes*.

Fig. 96.



Voici comment ce problème a été résolu par Euler :

L'équation de la courbe mn peut être donnée en coordonnées polaires sous la forme

$$(1) \qquad f(r, \theta) = 0,$$

en prenant O pour pôle et une droite arbitraire OP pour axe polaire. Cherchons l'équation de la courbe conjuguée $m'n'$ en prenant le pôle O′ et l'axe polaire quelconque O′P′, et convenant en outre de compter les angles θ, θ' dans le même

sens autour de leurs pôles respectifs. Soient b et b' deux points correspondants, qui arriveront simultanément sur OO'; les rayons r, r' seront alors portés bout à bout suivant la même droite, et l'on aura, en désignant par a la distance $\overline{OO'}$,

$$(2) \qquad r + r' = a.$$

Maintenant, si l'on considère les angles i, i' que les tangentes en b et en b' font avec les rayons vecteurs Ob, $O'b'$, on voit que, à l'instant où b et b' coïncident, ces angles deviennent opposés par le sommet, puisque les courbes sont en contact; de là résulte l'égalité

$$\operatorname{tang} i = \operatorname{tang} i' \quad \text{ou} \quad \frac{r\,d\theta}{dr} = \frac{r'\,d\theta'}{dr'}$$

ou encore, eu égard à l'équation (2),

$$(3) \qquad r\,d\theta = -r'\,d\theta'.$$

L'élimination de r et θ entre les équations (1), (2) et (3) conduirait à l'équation différentielle du profil $m'n'$.

Les relations (2) et (3) ont pour conséquence que le point de contact se déplace également sur les deux courbes. Soient en effet ds et ds' les distances séparant b et b' des deux points qui doivent venir en contact après eux; on aura

$$ds' = \sqrt{dr'^2 + r'^2\,d\theta'^2} = \sqrt{(-dr)^2 + (-r\,d\theta)^2} = ds.$$

Les deux courbes roulent donc bien l'une sur l'autre. Nous le savions d'avance, puisque la nullité de la normale commune $\overline{AC}$ (*fig.* 92) entraîne l'absence de glissement; nous retrouvons la même propriété d'une autre manière.

Si l'équation (1) était mise sous la forme $\theta = \varphi(r)$, on tirerait de l'équation (2)

$$r' = a - r;$$

puis, substituant cette valeur, ainsi que celle de $d\theta = \varphi'(r)\,dr$, dans l'équation (3), on aurait

$$d\theta' = -\frac{r}{a-r}\varphi'(r)\,dr \quad \text{ou} \quad \theta' = -\int \frac{r\varphi'(r)\,dr}{a-r}.$$

Les deux coordonnées r', θ' se trouveraient ainsi exprimées,

au moyen d'une seule quadrature, en fonction de la variable auxiliaire r. On arriverait aussi facilement à un résultat semblable, dans le cas où l'équation (1) serait résolue par rapport à r; en posant $r = \psi(\theta)$, on aurait

$$r' = a - \psi(\theta) \quad \text{et} \quad \theta' = -\int \frac{\psi(\theta)\,d\theta}{a - \psi(\theta)}.$$

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que deux courbes puissent être prises comme courbes roulantes conjuguées, c'est que pour chaque point b de l'une il y ait sur l'autre un point correspondant b', variant d'une manière continue avec b, et tel qu'on ait

$$r' = a - r, \quad i' = i.$$

Nous n'avons pas en effet exprimé autre chose dans l'analyse précédente pour arriver aux équations (2) et (3).

Profils dérivés. — Quand on a deux courbes roulantes conjuguées, on peut en déduire une infinité d'autres, qui sont dites *dérivées* des premières. Il suffit pour cela de conserver les mêmes valeurs de r et r', et de réduire les angles θ, θ' dans un rapport constant, le même pour les deux. Les conditions (2) et (3), nécessaires et suffisantes, resteront encore satisfaites après ce changement.

Si, par exemple, on réduit θ et θ' au tiers de leurs valeurs primitives, deux courbes roulantes faisant un tour complet se trouveront transformées en courbes n'occupant qu'un secteur de 120°; en construisant ces courbes trois fois dans trois secteurs égaux adjacents, on pourrait encore faire le tour entier, mais avec cette différence que les rapports de vitesse primitivement existants se produiraient trois fois au lieu d'une dans chaque tour.

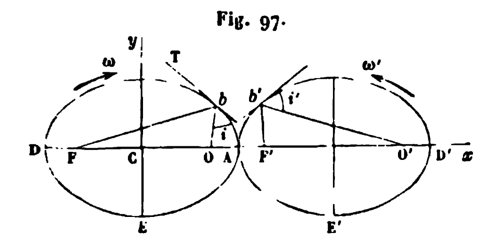
Exemples de courbes roulantes. — On peut adopter pour courbes roulantes deux ellipses égales tournant autour de deux foyers fixes O, O' (*fig.* 97), dont la distance égale le grand axe $2a$. La figure représente les courbes à l'instant où leurs grands axes se trouvent en prolongement l'un de l'autre; F et F' sont les foyers mobiles. Si nous prenons sur les deux ellipses deux points b, b' à égale distance de A, il

est clair, par raison de symétrie, que les triangles F O b, F′O′b sont égaux; donc

$$\overline{Ob} + \overline{O'b'} = \overline{Ob} + \overline{Fb} = 2a = \overline{OO'}.$$

De même, l'angle $i = \mathrm{F}b\mathrm{T}$, par suite des propriétés de l'ellipse, et $\mathrm{F}b\mathrm{T} = i'$ à cause de la symétrie; donc $i = i'$. Les conditions nécessaires et suffisantes sont donc vérifiées.

Fig. 97.



Quand les points b et b' arriveront sur la ligne des centres, celle-ci se trouvera partagée en deux segments égaux à $\overline{Ob}$ et $\overline{O'b'}$; le rapport des vitesses angulaires $\frac{\omega}{\omega'}$ sera donc égal à $\frac{\overline{O'b'}}{\overline{Ob}}$ ou à $\frac{\overline{Fb}}{\overline{Ob}}$. En désignant par x l'abscisse du point b dans le système Cx, Cy, et par c la demi-distance des foyers F et O, on aurait

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{a + \frac{c.x}{a}}{a - \frac{c.x}{a}};$$

lorsque x variera de a à $-a$, ce rapport variera lui-même entre le maximum $\frac{a+c}{a-c}$ et le minimum $\frac{a-c}{a+c}$, puis repassera par les mêmes valeurs en ordre inverse dans la seconde moitié de la révolution autour de l'axe O.

Il est à remarquer que, lorsque le point de contact parcourt l'arc AbD sur l'ellipse de gauche, le rayon vecteur Ob va toujours en croissant et le contact des ellipses a lieu comme dans la *fig.* 98; si l'ellipse de gauche tourne dans le sens indiqué par la flèche, il est clair qu'elle oblige, par sa pression, l'autre

ellipse à tourner autour de O′, sans que les deux courbes puissent glisser l'une sur l'autre ou se séparer. Mais, quand le point de contact a dépassé le sommet D et que la seconde moitié de la révolution a commencé, les rayons vecteurs de l'ellipse de gauche vont en diminuant et le contact offre la

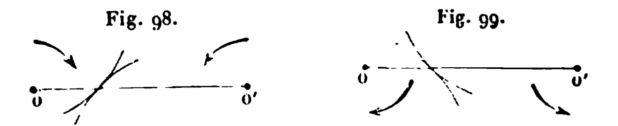


Fig. 98. Fig. 99.

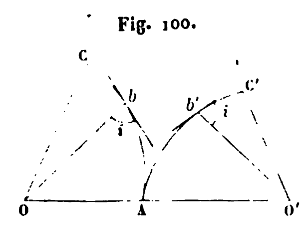
disposition de la *fig.* 99. Le mouvement étant supposé devoir se continuer dans le même sens, on voit que l'ellipse O n'entraînera plus l'ellipse O′, car il faudrait pour cela que la première fût capable d'exercer sur la seconde une traction, au lieu de la pression qu'elle produisait dans le premier cas. Pour rendre la transmission obligatoire, on devra munir les demi-ellipses DEA, D′E′A (*fig.* 97) de dents qui engrèneront les unes dans les autres. Après avôir choisi le profil P de ces dents sur l'ellipse O, on déterminerait le profil conjugué sur l'ellipse O′ en faisant rouler la première sur la seconde et prenant l'enveloppe des positions du profil (P).

Comme second exemple, considérons un arc de spirale logarithmique A*b*C (*fig.* 100) ayant O pour pôle et pour centre de rotation; prenons

$$\overline{AO'} = \overline{OC}, \quad \overline{O'C'} = \overline{OA}, \quad \text{angle } AO'C' = \text{angle } COA,$$

puis construisons la courbe C′A identique à AC. Je dis que les deux arcs AC, AC′, tournant respectivement autour de leurs pôles O et O′, satisfont aux conditions que doivent vérifier les courbes roulantes. En effet, divisons chacun des arcs AC, C′A en un nombre indéfini *n* de parties égales, ayant toutes la longueur infiniment petite ε. L'angle *i* du rayon vecteur avec la tangente étant constant, les rayons aboutissant aux points de division vont former deux progres-

Fig. 100.



sions arithmétiques, l'une croissante, l'autre décroissante, dont la raison sera $\varepsilon \cos i$. Si nous prenons pour points correspondants b, b' ceux qui sont à une même distance $k\varepsilon$ de A (en suivant les courbes), nous aurons

$$\overline{Ob} = \overline{OA} + k\varepsilon \cos i, \quad \overline{O'b'} = \overline{O'A} - k\varepsilon \cos i,$$

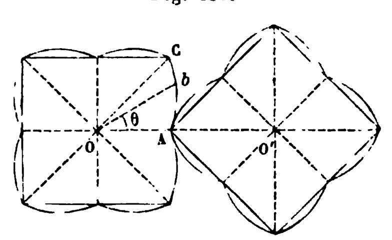
d'où résulte l'une des conditions

$$\overline{Ob} + \overline{O'b'} = \overline{OA} + \overline{O'A};$$

la somme des rayons vecteurs est bien constante pour deux points correspondants quelconques. D'ailleurs, l'angle i est constant sur les deux courbes et a la même valeur de part et d'autre; la seconde condition est donc aussi satisfaite.

Les rayons de la spirale logarithmique vont toujours en variant dans le même sens, et la courbe ne se ferme pas. Pour obtenir un mouvement de rotation indéfini dans le même sens, on peut adopter une disposition analogue à celle de la *fig.* 101. On prend deux carrés égaux ayant les centres O

Fig. 101.



et O'; la droite OO', parallèle à deux côtés de l'un, est dirigée suivant une diagonale de l'autre. Ensuite on remplace chaque côté par deux arcs égaux de spirale logarithmique, ce qui fait huit courbes égales pour chaque carré. L'équation de l'un de ces arcs, $\overline{AbC}$ par exemple, est aisée à trouver. En posant $\overline{OA} = c$, $\overline{Ob} = r$, $bOA = \theta$, l'équation sera de la forme

$$r = ce^{m\theta};$$

pour le point C, l'angle θ sera égal à $\frac{\pi}{4}$ et r à $c\sqrt{2}$, et, par

suite, on a

$$\sqrt{2} = e^{m\frac{\pi}{4}}.$$

Donc

$$m = \frac{2}{\pi} L 2,$$

et l'équation de l'arc AC devient finalement

$$r = ce^{\frac{2\theta L 2}{\pi}} = c \times 2^{\frac{2\theta}{\pi}}.$$

Les équations des autres arcs seraient identiques, pourvu qu'on prît toujours le rayon le plus petit pour axe polaire.

Il est clair qu'on pourrait substituer aux carrés des polygones réguliers convexes de n côtés. Chaque côté se remplacerait encore par deux arcs égaux de spirale logarithmique dont le rayon croîtrait depuis l'apothème du polygone jusqu'au rayon de son cercle circonscrit.

Remarquons enfin que, dans le cas actuel comme dans celui des deux ellipses, quand les rayons de la courbe menante vont en diminuant, la transmission de mouvement ne se ferait plus simplement par son contact avec la courbe menée, et qu'il serait alors nécessaire d'armer ces deux courbes de dents qui engrèneraient les unes avec les autres.

64. *Roues de Roemer.* — Imaginons deux troncs de cône égaux, tangents l'un à l'autre le long d'une génératrice Bb (*fig.* 102), ce qui entraîne comme conséquence le parallélisme de leurs axes SO, S'O'. Les surfaces de ces troncs de cône portent des dents; sur abAB, ce sont des dents analogues à celles d'une roue d'angle, occupant toute la longueur des génératrices; sur $a'b$BA', ce sont de petites dents très courtes et rapprochées, qui sont disposées le long d'une certaine courbe MN, à déterminer d'après la loi que doit suivre le rapport des vitesses angulaires.

Dans la position représentée par la figure, ce rapport est égal au rapport inverse des rayons $\overline{\text{OM}}$, $\overline{\text{O}}'\text{M}$, car la transmission se produit comme par un engrenage ayant ses circonfé-

rences primitives décrites avec ces rayons. Ainsi donc, en nommant

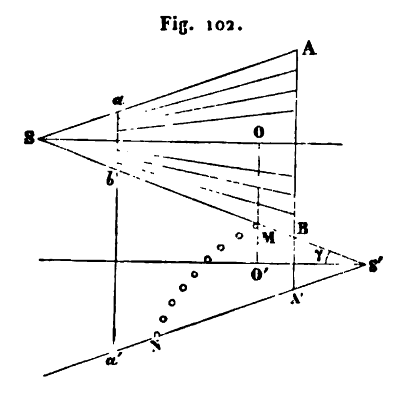
ω, ω' les vitesses angulaires autour des axes SO, S'O';
ρ, ρ' les rayons $\overline{OM}$, $\overline{O'M}$;
a la distance constante des deux axes;

on aura

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\rho'}{\rho} = \frac{\rho'}{a-\rho'}.$$

La même relation se conserve évidemment dans une position quelconque, pourvu qu'on y regarde ρ et ρ' comme des va-

Fig. 102.



riables, dont la dent actuellement en prise sur la courbe MN détermine la valeur.

Supposons maintenant que l'on donne le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ en fonction de l'angle φ décrit par le cône S'O' à partir d'une origine quelconque; on aura

$$\frac{\rho'}{a-\rho'} = f(\varphi),$$

f désignant une fonction donnée. Or, si l'on imagine le cône S'O' développé sur un plan tangent, et qu'on nomme γ l'angle BS'O', le point situé à la distance ρ' de l'axe sera à une distance r du sommet, égale à $\frac{\rho'}{\sin\gamma}$, et l'angle φ se transformera

en un angle θ égal à $\varphi \sin\gamma$. Donc on peut écrire, en vertu de l'équation précédente,

$$\frac{r\sin\gamma}{a - r\sin\gamma} = f\left(\frac{\theta}{\sin\gamma}\right),$$

et l'on aura ainsi l'équation polaire de la courbe MN développée. On suppose que l'on a pris pour pôle le sommet et pour axe polaire la génératrice du cône contenue dans le plan diamétral origine des angles φ.

65. *Transmission de mouvement, au moyen d'un lien rigide, entre deux arbres tournant autour d'axes parallèles.* — Soient O et O′ (*fig.* 103) deux axes parallèles autour desquels tournent respectivement deux arbres; ces arbres portent, dans un même plan perpendiculaire à leurs axes, des manivelles OA, O′B, de longueurs inégales, dont les boutons sont réunis par une bielle rigide AB, articulée en A et B. Le mouvement de rotation du premier arbre, en obligeant le point A à se déplacer, rend par là-même nécessaire le déplacement de B et entraîne par conséquent la rotation du second arbre. On verrait de même que, réciproquement, la rotation autour de l'axe O′ détermine une rotation autour de l'axe O.

Fig. 103.

Sans nous occuper de discuter complètement toutes les particularités que peut présenter l'appareil, suivant les rapports établis entre les longueurs des quatre côtés du quadrilatère OO′BA, nous allons seulement rechercher les conditions auxquelles il faut satisfaire pour avoir là véritablement un mécanisme de la deuxième classe, c'est-à-dire pour qu'une rotation continue et de sens constant autour de l'un des axes soit transformée en un mouvement de même nature autour de l'autre axe.

Pour que cela puisse avoir lieu, il faut qu'en faisant parcourir au bouton A de la plus longue manivelle son cercle complet PAMP, on trouve pour chacune de ses positions un point B du cercle QBNQ, qui en soit éloigné de la longueur

donnée $\overline{AB} = a$. Posons $R = \overline{OA}$, $r = \overline{O'B}$, $e = \overline{OO'}$, et considérons d'abord le cas où le centre O′ serait à l'intérieur du cercle OA, ce qui arrivera si l'on a $e < R$. Le point A étant supposé dans la position M, sa moindre distance au cercle O′B sera $\overline{MN} = R + e - r$, et par conséquent a doit remplir la condition

$$(1) \qquad a > R + e - r.$$

Quand A se trouvera dans la position P, sa distance maximum à la circonférence O′B sera $\overline{PN} = R + r - e$, d'où résulte de même

$$(2) \qquad a < R + r - e.$$

Ces deux inégalités seraient incompatibles si l'on n'avait pas $r > e$; donc la distance des centres est moindre que le plus petit rayon, et par suite le centre de chacun des deux cercles se trouve à l'intérieur de l'autre.

Cette condition nécessaire est d'ailleurs suffisante, pourvu qu'on prenne a dans les limites indiquées par les inégalités (1) et (2). Le triangle OO′A donne en effet

$$\overline{O'A} < R + e, \quad \overline{O'A} > R - e,$$

et par suite

$$\overline{AE} < R + e - r, \quad \overline{AF} > R - e + r.$$

Si donc on prend pour a une valeur intermédiaire entre $R + e - r$ et $R - e + r$, ce qui sera possible dans le cas de $r > e$, à plus forte raison tombera-t-elle entre $\overline{AE}$ et $\overline{AF}$, et cela suffit pour qu'on puisse placer l'extrémité B sur la petite circonférence.

D'un autre côté, on n'aura pas à craindre que le point B reste renfermé, sur cette circonférence, dans certaines régions d'où il ne pourrait pas sortir. On peut en effet reconnaître, par l'emploi d'une méthode semblable, en se servant encore des inégalités (1) et (2) et de l'inégalité $\overline{OB} > r - e$, fournie par le triangle OO′B, qu'à chaque point B de la circonférence O′B répond un point A situé à la distance a sur la circonférence OA.

Si nous considérons enfin le cas où le centre O′ de la petite

circonférence serait placé en dehors de la grande, la même méthode conduirait encore à poser, au lieu des inégalités (1) et (2), les suivantes :

$$(3) \qquad R + e - r < a < -R + e + r,$$

qui sont incompatibles, dans l'hypothèse ci-dessus admise de $R > r$. Le problème, tel qu'il est posé, ne comporte donc pas d'autre solution que celle qu'on a trouvée tout à l'heure.

Il est à remarquer que, si l'on admettait les relations

$$R = r, \quad e = a,$$

les inégalités (1), (2), (3) pourraient être regardées comme satisfaites, et, quelle que fût la position du centre O′ relativement à la circonférence OA, on aurait un appareil capable de fonctionner avec des rotations continues autour des deux centres. Mais on retomberait ainsi sur la bielle d'accouplement dont on a déjà parlé plus haut (n° 54, *a*).

Cherchons encore le rapport des vitesses angulaires ω, ω' autour de O et O′. Pour cela, prolongeons les rayons OA et O′B jusqu'à leur rencontre C; ce point C, situé sur les normales aux trajectoires des points A et B, sera le centre instantané de rotation de la bielle AB (n° 22, *c*). Nommons ω'' la vitesse angulaire autour de ce centre. La vitesse du point A s'exprime par $\omega''.\overline{CA}$ et par $\omega.\overline{OA}$, celle de B par $\omega''.\overline{CB}$ et par $\omega'.\overline{O'B}$; donc

$$\omega''.\overline{CA} = \omega.\overline{OA}, \quad \omega''.\overline{CB} = \omega'.\overline{O'B};$$

d'où l'on déduit, par l'élimination de ω'',

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\overline{CB}.\overline{OA}}{\overline{CA}.\overline{O'B}}.$$

Cette expression peut se simplifier de manière à ne contenir qu'une seule ligne variable. Menons en effet par O une parallèle à O′B jusqu'à sa rencontre I avec la bielle AB; les triangles semblables AOI, ACB donnent

$$\overline{CA} = \frac{\overline{OA}.\overline{CB}}{\overline{OI}},$$

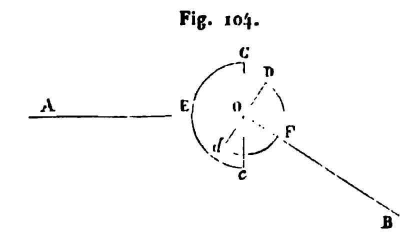
valeur qui, substituée dans l'expression précédente de $\frac{\omega'}{\omega}$, conduit à

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\overline{OI}}{\overline{O'B}}.$$

Dans l'hypothèse de ω constant, on voit que ω' serait proportionnel à $\overline{OI}$; d'une manière générale, ω' est en rapport constant avec $\omega.\overline{OI}$.

66. *Transmission de mouvement entre deux axes concourants par un solide intermédiaire; joint universel.* — Deux arbres qui tournent autour d'axes concourants sont liés l'un à l'autre de la manière suivante : Soit O (*fig.* 104) le point de

Fig. 104.

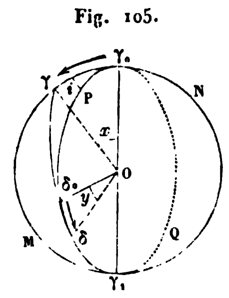


rencontre des deux axes OA, OB; l'arbre tournant autour de OA se termine par une fourchette CEc, dont le plan moyen contient OA; cette fourchette est percée de deux œillets dont les centres C, c sont sur une même perpendiculaire à OA menée par le point O. Le second axe, celui qui tourne autour de OB, se termine par une fourchette DFd construite dans des conditions toutes pareilles. Dans les quatre œillets C, c, D, d passent les quatre tourillons qui terminent un corps solide nommé *croisillon,* formé de deux tiges se coupant à angle droit. L'ensemble de l'appareil ainsi constitué se nomme un *joint universel* ou *joint hollandais.* Le premier nom lui vient de ce que sa construction ne dépend pas de l'angle des axes, le second, de ce qu'il a été fréquemment employé en Hollande.

Afin de nous rendre compte des relations de mouvement entre les deux axes, imaginons une sphère fixe ayant son

centre en O et l'unité pour rayon; soient γ et δ (*fig.* 105) les points d'intersection de cette sphère avec les deux bras OC et OD. Le point γ décrit sur cette sphère un grand cercle MN dont le plan est supposé pris pour plan de la figure; le point δ décrit un autre grand cercle PQ sur la même sphère. Les plans de ces deux cercles sont respectivement perpendiculaires aux axes de rotation; ils se coupent donc suivant un diamètre $\gamma_0\gamma_1$, perpendiculaire au plan des deux axes, et font entre eux un angle i égal à celui de ces axes. De plus, comme les deux bras du croisillon sont à angle droit, l'arc de grand cercle mené par deux positions contemporaines des points γ et δ doit être égal à un quadrant. On voit par là que les déplacements de γ et δ sont ceux des deux extrémités d'un arc de grand cercle de longueur constante qui s'appuie toujours sur deux grands cercles donnés; l'une des extrémités ne peut se déplacer sans entraîner le déplacement de l'autre, et par conséquent aussi le mouvement de rotation se transmet d'un axe à l'autre.

Fig. 105.



Prenons maintenant pour position initiale du point γ le point γ_0 situé sur l'intersection des plans MN, PQ; au même instant le point δ est sur le cercle PQ, en δ_0 sur la perpendiculaire $O\delta_0$ à $O\gamma_0$. Considérons le passage à une autre position quelconque γ, δ, et soient x et y les angles décrits simultanément par les droites $O\gamma$, $O\delta$ dans ce passage, angles qui sont ceux dont les deux arbres ont tourné pendant le même temps. Le triangle sphérique $\gamma_0\gamma\delta$ a pour côtés

$$\overline{\gamma\gamma_0} = x, \quad \overline{\gamma_0\delta} = \frac{\pi}{2} + y, \quad \overline{\gamma\delta} = \frac{\pi}{2},$$

et i pour angle opposé à ce dernier côté; la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique donne donc

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos x \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + y\right)\cos i$$

ou bien

$$o = -\cos x \sin y + \sin x \cos y \cos i;$$

d'où l'on déduit

$$(1) \qquad \operatorname{tang} y = \operatorname{tang} x \cos i.$$

Cette relation entre les angles décrits simultanément par les deux arbres, à partir d'une position déterminée, permet de trouver le rapport des vitesses angulaires ω, ω'. On a effectivement, en prenant les dérivées des deux membres,

$$\frac{1}{\cos^2 y}\frac{dy}{dt} = \frac{\cos i}{\cos^2 x}\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{\omega'}{\cos^2 y} = \frac{\omega \cos i}{\cos^2 x};$$

on tire de là

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos^2 y \cos i}{\cos^2 x} = \frac{\cos i}{\cos^2 x(1 + \operatorname{tang}^2 y)},$$

ou, en substituant la valeur (1) de $\operatorname{tang} y$ et effectuant la multiplication indiquée au dénominateur,

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\cos i}{\cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 i}$$
$$= \frac{\cos i}{1 - \sin^2 x + \sin^2 x \cos^2 i} = \frac{\cos i}{1 - \sin^2 x \sin^2 i}.$$

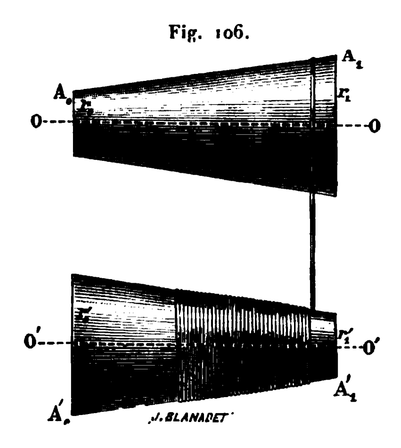
Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ est, comme on le voit, variable avec x; ses valeurs extrêmes répondent à $\sin x = 0$, qui donne le minimum, et $\sin x = 1$, qui donne le maximum; elles sont $\cos i$ et $\frac{1}{\cos i}$, et se reproduisent périodiquement au commencement et à la fin de chaque quadrant.

On remarquera que $\operatorname{tang} x$ et $\operatorname{tang} y$ deviennent nulles et infinies en même temps; les deux arbres tournent donc simultanément du même nombre entier d'angles droits, depuis la position que nous avons prise pour point de départ.

Si les deux axes sont rectangulaires, $\cos i$ est nul, l'angle y reste toujours nul, en vertu de l'équation (1), et par conséquent la transmission devient impossible.

67. *Transmission de mouvement entre deux axes parallèles par une corde et tambours coniques.* — La *fig.* 106 représente deux troncs de cône tournant autour d'axes parallèles OO O'O' et disposés à l'inverse l'un de l'autre. Une corde, enroulée sur le tambour inférieur, s'en détache pour aller s'attacher sur le tambour supérieur; en faisant tourner celui-ci,

Fig. 106.



la corde s'enroulera sur lui pendant qu'elle se déroulera de l'autre. Les longueurs perdues ou reçues par les deux tambours dans un même temps seront toujours égales, si l'on prend les précautions nécessaires pour que la corde, supposée inextensible, reste toujours tendue, et si les tambours sont assez éloignés pour qu'on puisse regarder comme invariable la longueur de corde comprise entre les deux points de contact. Ces hypothèses étant admises, on en déduit facilement le rapport des vitesses angulaires. Désignons par

ω, ω' les vitesses angulaires des arbres OO, O'O';

r, r' les rayons sur lesquels s'enroule ou se déroule la corde dans une position quelconque;

r_0, r_1, r'_0, r'_1 les rayons des bases des troncs de cône;

le rapport des vitesses angulaires $\frac{\omega'}{\omega}$ s'exprimera par $\frac{r}{r'}$, quantité variable entre $\frac{r_1}{r'_1}$ et $\frac{r_0}{r'_0}$, suivant la position de la corde entre $A_1A'_1$ et $A_0A'_0$.

Si l'un des deux corps était animé d'un mouvement uniforme, la vitesse angulaire de l'autre varierait toujours dans le même sens, en augmentant ou en diminuant, suivant les dispositions particulières de l'appareil.

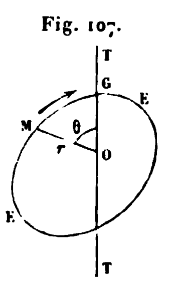
On voit d'ailleurs que la transmission cesse nécessairement de fonctionner dans le même sens quand toute la corde est passée d'un cône à l'autre; il faut alors faire tourner les cônes en sens contraire pour remettre les choses dans l'état primitif.

§ V. — Mécanismes de troisième classe.

68. Premier genre : *Excentriques.* — Les mécanismes appartenant au premier genre de la troisième classe ont ordinairement pour but de transformer un mouvement de rotation continu en un mouvement rectiligne alternatif d'une tige guidée. On peut y arriver par l'emploi des excentriques.

(*a*) *Excentriques à galets.* — Un arbre tournant autour de l'axe O (*fig.* 107) fait corps avec un cylindre dont la courbe EE représente la section droite et dont les génératrices sont parallèles à l'axe de rotation. D'autre part, une tige guidée TT, dont l'axe de figure passe par O et se trouve dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, doit prendre, tantôt dans un sens, tantôt en sens contraire, un mouvement de translation dont la direction est celle de TT. Pour le produire, nous fixons en un point de cette ligne un galet cylindrique, ayant pour profil un cercle que nous supposons d'abord de rayon nul. On a ainsi l'appareil qu'on nomme *excentrique à galets;* le cylindre EE en particulier est l'excentrique, et ce nom lui vient de ce que, dans le cas où il est établi avec un profil circulaire, on le fait tourner autour d'un axe qui ne passe pas par le centre du cercle.

Fig. 107.



Pendant la rotation de EE autour de O, les rayons vecteurs OM arrivent successivement en coïncidence avec la direction OT; par suite, le galet ne pouvant pas entrer dans l'excentrique, le point G de la tige sera obligé de se déplacer

tant que les rayons vecteurs iront en augmentant, et la tige se déplacera aussi, puisque tous ses points ont des mouvements identiques. Quand les rayons vecteurs commenceront à diminuer, il faudra que le galet reste toujours serré contre l'excentrique, soit en vertu du poids de la tige, soit par tout autre moyen; cela étant, la tige se déplacera encore, mais, comme le point G se rapproche de O au lieu de s'en éloigner, le déplacement sera en sens contraire du premier. Enfin, après un tour complet, si la courbe EE est fermée, la tige sera revenue au point de départ, et pendant les tours suivants les mêmes alternatives se reproduiront. On aura donc bien produit un mouvement oscillatoire de la tige au moyen de la rotation continue de l'arbre.

Supposons qu'on donne l'équation polaire de la courbe EE, sous la forme

$$(1) \qquad f(r, \theta) = 0,$$

en prenant O pour pôle et OG pour axe polaire; supposons aussi que le mouvement de rotation soit défini par une équation

$$(2) \qquad \theta = \varphi(t),$$

faisant connaître le temps nécessaire pour qu'un rayon quelconque OM vienne se placer sur la ligne TT. Prenons pour origine du temps l'époque où le rayon $\overline{OG}$ est placé sur cette ligne: à l'époque t, la distance x du galet au point O sera égale à r: on aura donc

$$(3) \qquad x = r.$$

L'élimination de r et θ entre les équations (1), (2), (3) donnera la relation entre x et t, c'est-à-dire l'équation du mouvement du point G de la tige; on peut l'écrire sous la forme

$$(4) \qquad f[x, \varphi(t)] = 0.$$

Réciproquement, étant donnée la relation entre x et t, telle que

$$(5) \qquad F(x, t) = 0,$$

ainsi que la loi du mouvement de rotation représentée par la

relation (2) entre θ et t, on trouverait l'équation polaire de la courbe EE par l'élimination de x et t entre les équations (2), (3) et (5).

Dans la supposition assez ordinairement réalisée d'un mouvement de rotation uniforme, ω désignant la vitesse angulaire, l'équation (2) deviendrait $\theta = \omega t$; par suite, l'équation (4) du mouvement de translation produit par un excentrique de forme donnée serait

$$(6) \qquad f(x, \omega t) = 0,$$

et l'équation polaire de la courbe répondant au mouvement de translation défini par l'équation (5) serait

$$(7) \qquad F\left(r, \frac{\theta}{\omega}\right) = 0.$$

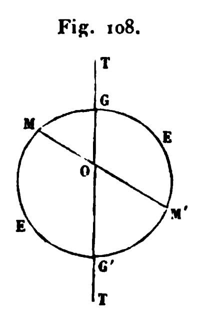
Les mêmes questions se résoudraient tout aussi facilement par la Géométrie, et les méthodes géométriques seraient même les seules à employer si l'on donnait la définition de la courbe EE par un dessin, au lieu de l'équation (1), ou si l'on remplaçait les équations (2) et (5) par des courbes représentatives. Supposons d'abord données la courbe EE et la loi de la rotation; nous construirons une courbe en prenant pour coordonnées rectangulaires : 1° suivant l'axe des abscisses, les valeurs de t répondant à une série d'angles θ; 2° suivant l'axe des ordonnées, les valeurs de r qui correspondent aux mêmes valeurs de θ. Il est clair que la courbe ainsi construite a pour coordonnées x et t : c'est la courbe représentative du mouvement du point G de la tige (n° 5). Si cette courbe est au contraire donnée et qu'il faille déterminer EE, on construira une courbe en prenant pour coordonnées polaires : 1° les angles θ répondant aux diverses valeurs de t; 2° comme rayons vecteurs, les distances x répondant aux mêmes valeurs du temps.

Il y a deux dispositions particulières qu'on peut employer, pour être tout à fait certain que l'excentrique mènera la tige guidée aussi bien quand les rayons vecteurs diminuent que lorsqu'ils allaient en augmentant, sans avoir besoin de faire intervenir une action extérieure, comme celle du poids de la tige ou celle d'un ressort, dont nous parlions tout à l'heure.

1° Au lieu de mettre un seul galet G sur la ligne TT, on en

met deux GG′ en ligne droite avec le centre de rotation O (*fig.* 108). Cela exige évidemment que toutes les lignes MM′ menées par O, et terminées de part et d'autre à la courbe EE, aient une longueur constante $\overline{GG}$, égale à la distance des deux galets; car si ces lignes avaient une longueur variable, il faudrait que la distance des galets fût égale au maximum de cette longueur, sans quoi l'excentrique ne pourrait pas passer dans l'intervalle GG′; il s'ensuivrait que, sauf dans certaines positions particulières, un seul galet toucherait l'excentrique, et qu'ainsi l'addition du galet G′ n'aurait produit aucun résultat. On doit donc assujettir la courbe EE à remplir la condition exprimée par l'équation

Fig. 108.



$$(8) \qquad \overline{OM} + \overline{OM'} = \overline{GG'}.$$

On tire de là, par la différentiation,

$$d.\overline{OM} + d.\overline{O'M} = 0;$$

donc, quand l'un des rayons $\overline{OM}$, $\overline{OM'}$ devient décroissant, l'autre devient, par cela même, croissant; par conséquent, un des deux galets est toujours poussé par l'excentrique, et tous deux sont toujours en contact avec lui. La transmission de mouvement se ferait encore de la même manière, si la rotation changeait de sens; le seul changement consisterait en ce que l'excentrique pousserait le galet G′ au lieu du galet G, et *vice versa*.

Il faut aussi remarquer que, si à une certaine époque le galet G touche l'excentrique en M, il le touchera en M′ après une rotation de 180°; le déplacement élémentaire de la tige, qui était $d.\overline{OM}$ dans la première position, deviendra $d.\overline{O'M}$ ou $-d.\overline{OM}$ dans la seconde. On voit donc qu'une oscillation complète de la tige, aller et retour, se compose de deux moitiés comprenant les mêmes chemins élémentaires, décrits dans le même ordre, mais en sens opposé.

2° La seconde disposition consiste à remplacer le galet G

(*fig.* 107) par une cheville glissant à l'intérieur d'une rainure pratiquée à la surface de l'excentrique; le profil de celui-ci devrait alors, bien entendu, être extérieur à la rainure. Le galet auxiliaire G' n'existerait plus et la condition (8) ne serait pas nécessaire.

Nous avons raisonné jusqu'à présent comme si le profil des galets se réduisait à un point. Si de ce point, comme centre, on décrit un cercle de rayon fini, devant former le profil d'un galet, ce cercle sera tangent, dans toutes ses positions, à une courbe parallèle à EE (*fig.* 107 et 108), qu'on obtiendra en portant sur toutes les normales à EE une longueur égale au rayon ρ du cercle. Ainsi donc on peut facilement passer du cas idéal que nous avons d'abord traité au cas pratique. S'il s'agit de déterminer le mouvement produit par un excentrique donné, conduisant une tige par sa pression sur un ou deux galets de rayon ρ, on fera cette détermination comme si le centre d'un galet était conduit par un excentrique idéal dont la courbe serait extérieure au profil donné, et en serait partout à la distance ρ mesurée suivant la normale. Si, au contraire, on doit déterminer le profil de l'excentrique, on le fera d'abord comme si le galet se réduisait à son axe de figure, puis on portera, intérieurement à ce profil fictif, une distance ρ sur toutes les normales et l'on aura le profil réel.

(*b*) Exemples d'excentriques a galets. Premier exemple : *Courbes en cœur.* — On formera le profil idéal EE de deux moitiés égales, symétriquement disposées par rapport à la droite TT (*fig.* 109); chacune de ces moitiés est un arc de spirale d'Archimède. En nommant a une longueur constante, on a

Fig. 109.

$$\overline{OM} = \overline{OG} + a\theta, \quad \overline{OM'} = \overline{OG'} - a\theta;$$

d'où résulte

$$\overline{OM} + \overline{OM'} = \overline{OG} + \overline{OG'} = \overline{GG'}.$$

La relation (8) étant vérifiée, on peut faire mouvoir l'excentrique entre deux galets.

Puisque le rayon $\overline{OM} = r$ varie uniformément avec θ, on a

aussi

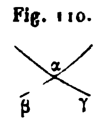
$$\frac{dr}{dt} = a\frac{d\theta}{dt};$$

or le premier membre représente, en vertu de l'équation (3), la vitesse de la tige, et dans le second $\frac{d\theta}{dt}$ exprime la vitesse angulaire de l'arbre O; donc ces deux vitesses sont ici dans un rapport constant. En particulier, si la rotation est uniforme, la translation de la tige le sera aussi.

Le déplacement total de la tige dans un sens est égal à $\overline{OG'} - \overline{OG} = \pi a$; s'il est donné, on en déduit a. On peut alors prendre arbitrairement $\overline{OG}$ et tracer la spirale GMG'.

Quand on tient compte du rayon ρ des galets, il faut porter intérieurement une longueur ρ sur toutes les normales. On obtient alors deux courbes qui présentent une lacune aux environs de G; on la remplit par un arc de cercle décrit de G comme centre, avec ρ pour rayon. Dans le voisinage de G', on obtient, au contraire, deux courbes qui se croisent (*fig.* 110), ce qui donnerait un profil pratiquement inadmissible; alors on supprime les arcs excédants $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, et, de plus, on adoucit un peu la pointe α. Cette circonstance donne une certaine irrégularité à la transmission, vers les points extrêmes qui limitent les oscillations de la tige. De plus, comme la vitesse change brusquement de sens en même temps, il se produit alors un choc nuisible à la conservation de l'appareil.

Fig. 110.



DEUXIÈME EXEMPLE : *Excentrique du général Morin.* — Dans cet excentrique, le général Morin s'est imposé pour condition de faire arriver la tige avec une vitesse nulle aux extrémités de sa course. Il a défini comme il suit la courbe des espaces parcourus par un quelconque de ses points.

Soit $\overline{AB}$ (*fig.* 111) la longueur représentant la durée d'une révolution; après l'avoir divisée en quatre parties égales, on élève au milieu une perpendiculaire $\overline{DF}$ égale à la course totale de la tige dans un sens, et, aux deux points de division intermédiaires, des perpendiculaires $\overline{CG}$, $\overline{EH}$ égales à $\frac{1}{2}\overline{DF}$. On trace ensuite une parabole GFH passant par G et H et ayant

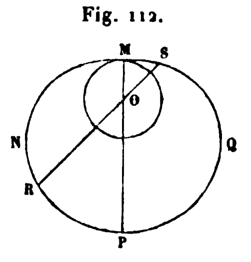
son sommet en F; l'arc GF retourné donnera une parabole AG raccordant GF en G et ayant son sommet en A; de même, on prolongera FH par ce même arc retourné.

Ayant ainsi construit la courbe des espaces, on en déduira la courbe EE de l'excentrique (*fig.* 107), au moyen de la construction géométrique indiquée plus haut. Pour fixer les idées, supposons la rotation uniforme. Nous décrirons un cercle de rayon arbitraire OM (*fig.* 112) et nous le diviserons en parties égales, en ayant soin de prendre leur nombre n multiple de 4; nous diviserons ensuite AB (*fig.* 111) en un même nombre n de parties égales et nous mènerons les ordonnées aux points de division. Ces ordonnées sont les espaces parcourus par la tige lorsque l'angle de la rotation prend les valeurs multiples de $\frac{2\pi}{n}$, et comme ces espaces sont égaux aux accroissements du rayon vecteur, il suffira d'allonger les rayons du cercle OM de quantités égales à ces espaces et qui se succèdent dans le même ordre. On obtient ainsi la courbe cherchée MNPQ, dont il faudrait encore diminuer toutes les normales d'une longueur constante, égale au rayon du galet.

Fig. 111.

On reconnaît bien facilement, d'après la définition de la courbe des espaces AGFHB (*fig.* 111), que deux ordonnées quelconques séparées par la distance $\frac{1}{2}\overline{AB}$ donnent une somme constante $\overline{FD}$; il en résulte que deux rayons vecteurs diamétralement opposés $\overline{OR}$, $\overline{OS}$ de la courbe MNPQ (*fig.* 112) donnent aussi une somme constante, égale à $2\overline{OM} + \overline{FD}$. Donc la condition (8) est satisfaite, ce qui permet de faire marcher l'excentrique entre deux galets. On a vu que dans ce cas la loi du mouvement de la tige est la même pour la marche dans les deux sens. La disposition de la *fig.* 111 montre qu'il y a ici quelque chose

Fig. 112.



de plus; la marche dans un sens, représentée par la courbe AGF, se compose de deux moitiés, pour lesquelles les déplacements élémentaires sont les mêmes et disposés en ordre inverse, symétriquement par rapport au milieu.

L'excentrique du général Morin présente l'inconvénient de donner lieu à un changement brusque d'accélération, à chaque milieu de course dans un sens. Comme le montre la *fig.* 111, la vitesse croît uniformément pendant la première moitié de la course, depuis O jusqu'à un certain maximum, puis décroît uniformément depuis ce maximum jusqu'à O; l'accélération a donc successivement, au même point milieu, deux valeurs égales et de signes contraires. On éviterait ce défaut si l'on remplaçait la courbe parabolique discontinue AGFHB par une sinusoïde. L'équation de cette dernière courbe serait

$$x = \frac{l}{2}(1 - \cos\omega t),$$

l désignant la longueur $\overline{FD}$ et ω le quotient $\frac{2\pi}{T}$ de l'angle d'une révolution complète par le temps $T = \overline{AB}$ employé à le décrire. On aurait, pour la vitesse et l'accélération de la tige,

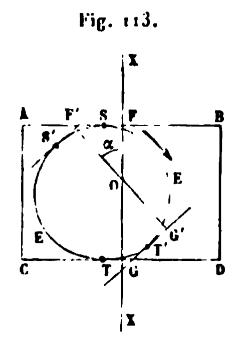
$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega l}{2}\sin\omega t, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\omega^2 l}{2}\cos\omega t;$$

la vitesse, nulle aux extrémités de la course, passerait au milieu par le maximum $\frac{\omega l}{2}$; l'accélération serait au contraire maximum aux extrémités et changerait de sens au milieu, en passant par O.

(*c*) *Excentriques à cadre.* — L'excentrique EE (*fig.* 113) tournant autour de l'axe O est tangent en S et T aux deux côtés parallèles AB, CD d'un cadre rectangulaire ABCD; ce cadre fait corps avec une tige guidée, dont la ligne XX menée par le point O est l'axe géométrique. Le mouvement de translation de la tige est parallèle à XX. Cette ligne est contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe; dans le même plan, que nous supposons être celui de la figure, se trouve aussi le profil moyen du cadre. Menons au profil EE deux tangentes parallèles quelconques S'F', T'G', perpendiculaires à une droite

F'OG' passant par O et faisant l'angle α avec OX. Quand l'excentrique aura tourné d'un angle α, les tangentes S'F', T'G' seront venues se placer dans la direction perpendiculaire à XX et coïncideront avec les nouvelles positions prises par les côtés AB, CD. Pour que cela puisse avoir lieu, il faut que la distance de deux tangentes parallèles soit constante et égale à $\overline{AC}$; on devra choisir la courbe EE de manière à remplir cette condition. On voit d'ailleurs que la distance x du côté AB au point O est constamment égale à la perpendiculaire $\overline{OF'} = p$; si l'on donne la courbe EE,

Fig. 113.



p est une fonction connue de α, qui lui-même doit être défini en fonction du temps, la rotation étant censée se produire suivant une loi connue. On aurait donc

$$x = p, \quad p = f(\alpha), \quad \alpha = \varphi(t);$$

d'où l'on déduit, par l'élimination de p et de α,

$$x = f[\varphi(t)],$$

équation du mouvement de la tige.

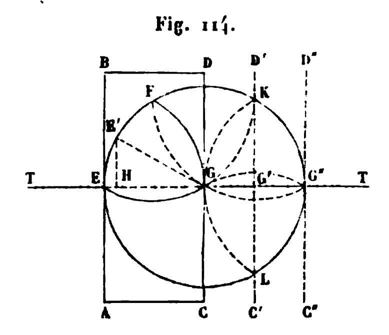
Les valeurs de p, pour deux valeurs de α différentes de 180°, donnent une somme constante; leurs différentielles sont, par suite, égales et de signes contraires. Le tour entier de l'excentrique se décompose donc encore en deux moitiés, et, pendant la seconde, les déplacements élémentaires reprennent la même suite de valeurs absolues que pendant la première; ils se succèdent dans le même ordre, mais avec un sens contraire.

(d) Exemple : *Excentrique triangulaire.* — Soient E, F, G (*fig.* 114) les trois sommets d'un triangle équilatéral; décrivons de ces trois points comme centres, avec un rayon égal au côté du triangle, trois arcs de cercles égaux EF, FG, GE. Nous aurons ainsi formé le profil de l'excentrique, dont le centre de rotation se place en l'un des sommets, G par exemple. Deux tangentes parallèles comprennent une tan-

gente à l'un des trois axes et la parallèle menée par son centre ; elles sont à une distance constante, égale au rayon des arcs. La condition générale ci-dessus indiquée (*c*) est donc bien remplie par ce profil.

Lorsque l'excentrique occupe la position EFG, le cadre est en ABCD ; les deux côtés AB, CD, perpendiculaires à la direction TT de la tige guidée, sont tangents en E et G aux arcs EF, GF. Supposons qu'on fasse tourner d'un angle α ne dépassant pas 60°, de manière que E vienne en E′, entre E et F. Le côté

Fig. 114.



FG restera toujours tangent à la nouvelle position de CD, et par conséquent la position correspondante de AB passe par E′ ; donc l'espace x parcouru par le cadre est égal à EH, et, en nommant r le rayon $\overline{EG}$ des arcs de cercle, on a

$$(1) \qquad x = r(1 - \cos\alpha).$$

Le mouvement est celui de la projection H du point E′ mobile sur l'arc EF ; si la rotation est uniforme, on sait (n° **14**, *a*) que la vitesse de H varie proportionnellement à l'ordonnée $\overline{E'H}$. L'équation (1) s'applique jusqu'à $\alpha = \frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire jusqu'à l'instant où E′ arrive en F et où l'excentrique occupe la position FGK. Le côté CD du cadre est alors venu en C′D′, ayant parcouru une distance GG′ égale à la moitié du rayon.

A partir de là, pendant une nouvelle période de 60°, l'excentrique pousse le côté C′D′ du cadre par la pression de son sommet K ; le mouvement produit est celui de la projection du sommet K sur TT ; il est tout à fait symétrique de celui

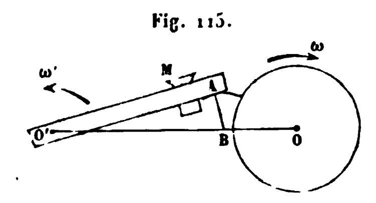
qui a eu lieu pendant la première période. Quand la seconde période est terminée, K est arrivé en G″, C′D′ est en C″D″ et le cadre s'est encore avancé dans le même sens, d'une distance $\overline{G'G''}$ égale à la moitié du rayon; l'excentrique occupe d'ailleurs la position GKG″. En faisant tourner encore de 60°, l'arc KG′, qui est en contact avec le côté C″D″ du cadre, tourne autour de son propre centre; la tangente parallèle à CD reste donc immobile, et il en est de même du cadre. A la fin de cette troisième période, complétant une demi-révolution, l'excentrique se trouve en GG″L.

Cette dernière position est diamétralement opposée à la première EFG. Si la rotation continue toujours, il est clair que, pendant le demi-tour suivant, les mêmes phases vont se reproduire en sens inverse; pendant une suite de tours complets, il est bien évident aussi que les mêmes déplacements auraient lieu périodiquement pour chaque tour.

69. *Cames des marteaux ou pilons.* — Les cames dont il s'agit ici consistent essentiellement en des surfaces cylindriques, tournant autour d'un axe parallèle à leurs génératrices et transmettant le mouvement par contact, soit à un autre corps tournant autour d'un axe parallèle, soit à un corps animé d'une translation perpendiculaire à leur axe de rotation. La came n'agit d'ailleurs que pendant une certaine fraction de tour, après quoi le corps, poussé ou soulevé par elle, reprend sa première position en vertu de son poids, jusqu'à ce qu'une nouvelle came, toute pareille à la première et montée sur le même arbre, vienne le déplacer de nouveau.

Les cames des marteaux (*fig.* 115), régulièrement distri-

Fig. 115.



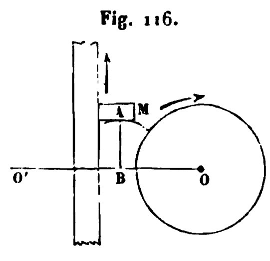
buées sur une roue O, soulèvent un marteau M tournant autour de l'axe O′ et le laissent ensuite retomber. Ces cames

sont tout à fait analogues à celles dont il a été question au n° 62, et l'on pourrait même les ranger dans la seconde classe; car le sens du mouvement du marteau ne change qu'à l'instant où la came n'agit plus sur lui et où la liaison entre les deux axes est supprimée. Le rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ des vitesses angulaires s'obtiendra en menant la normale commune AB aux deux profils en contact; on aura

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\overline{OB}}{\overline{O'B}}.$$

Au lieu d'un marteau, on peut supposer un pilon guidé dans son mouvement vertical; un arbre à cames le soulève et le laisse retomber périodiquement, en agissant sur une partie saillante M (*fig.* 116), appelée *mentonnet*. Théoriquement, on passerait de l'appareil précédent à celui-ci, en imaginant que le centre O' s'éloigne à l'infini sur la droite OO' perpendiculaire au déplacement du pilon. On aurait toujours, en menant la normale commune AB,

Fig. 116.



$$\omega'.\overline{O'B} = \omega.\overline{OB}.$$

Or, quand O' s'éloigne à l'infini, $\omega'.\overline{O'B}$ exprime la vitesse v du point B considéré comme appartenant au pilon et, par suite, celle d'un point quelconque de ce corps; donc

$$v = \omega.\overline{OB}.$$

70. Deuxième genre : *Balancier et manivelle réunis par une bielle.* — Le balancier OA tourne autour d'un axe O (*fig.* 117): la manivelle O'B fait corps avec un arbre tournant autour de O'; la liaison entre les deux arbres est établie au moyen d'une bielle rigide AB, articulée en A et B avec le balancier et la manivelle. On suppose, d'ailleurs, que les trois droites OA, O'B, AB sont dans un même plan perpendiculaire aux axes O

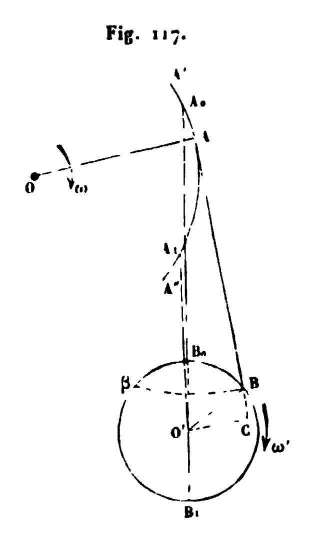
et O'; nous nommerons leurs longueurs r, b, a, savoir

$$\overline{OA} = r, \quad \overline{O'B} = b, \quad \overline{AB} = a.$$

Dans la pratique, on prend généralement le rapport $\frac{a}{b}$ entre 5 et 6 et le rapport $\frac{r}{b}$ aux environs de 3; la distance $\overline{OO'}$ diffère peu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle construit sur $\overline{OA}$ et $\overline{AB}$; les cercles OA et O'B sont extérieurs l'un à l'autre.

Supposons maintenant qu'on décrive de O comme centre avec $a+b$ et $a-b$ pour rayons deux arcs de cercle coupant en A_0 et A_1 (du même côté de OO') l'arc décrit par articulation A; joignons $O'A_0$ et $O'A_1$. Ces droites couperont le cercle O'B en deux points B_0 et B_1 tels que $\overline{A_0B_0}$ et $\overline{A_1B_1}$ auront des longueurs égales à a; ce seront les positions de l'articulation B quand OA occupera les positions OA_0 et OA_1. Les points B_0 et B_1 se nomment les *points morts*, parce que, si B est en B_0 ou en B_1, la bielle se trouve en ligne droite avec la manivelle. Avec une telle disposition des lignes O'B, AB, une force exercée sur le balancier serait incapable de faire sortir le système du repos, car la force transmise par la bielle à la manivelle ne ferait qu'appuyer celle-ci sur le point fixe O'.

Fig. 117.



Un cercle décrit de A_0 comme centre avec a pour rayon sera tangent extérieurement en B_0 au cercle O'B; un cercle de même rayon a décrit de A_1 comme centre touche le même cercle au point B_1, en l'enveloppant. Il résulte de là que l'articulation A ne peut se mouvoir qu'entre A_0 et A_1, et que le balancier oscille nécessairement entre les positions OA_0, OA_1; quand on voudrait faire dépasser au point A les limites de l'arc A_0A_1, on ne trouverait aucune position possible pour la

bielle; le centre d'un cercle de rayon a étant placé en A′ ou A″, ce cercle serait extérieur au cercle O′B dans le premier cas et l'envelopperait dans le second. Au contraire, pour tout point A intermédiaire entre A_0 et A_1, la distance $\overline{O'A}$ sera comprise entre $\overline{O'A_0}$ et $\overline{O'A_1}$, ou $a+b$ et $a-b$, de sorte que le cercle de rayon a, décrit du centre A, coupe le cercle O′B en deux points B et β. La manivelle pourra donc tourner dans le sens de la flèche, de $O'B_0$ à $O'B_1$, en parcourant la suite des points B, pendant que le balancier ira de OA_0 à OA_1; puis elle reviendra de B_1 à B_0 par la suite des points β, en continuant sa rotation dans le même sens, pendant que le balancier reviendra lui-même de OA_1 à OA_0.

On pourrait, sans changer le sens de l'oscillation du balancier, faire tourner la manivelle en sens contraire; elle descendrait de $O'B_0$ à $O'B_1$, en passant par les points β, et remonterait en passant par les points B.

Dans tous les cas, on voit que l'appareil transforme le mouvement circulaire alternatif du balancier en un mouvement circulaire continu de l'arbre O′, ou inversement, qu'il produit le premier mouvement au moyen du second.

Le rapport des vitesses angulaires se trouverait par un moyen tout pareil à celui qu'on a employé au n° 65. Imaginons les lignes OA et O′B prolongées jusqu'à leur rencontre D [1]; ce point sera le centre instantané de rotation de la bielle, et par suite les vitesses des points A et B de ce corps seront dans le rapport $\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}$. Mais A et B font aussi partie, l'un du balancier, l'autre de la manivelle, de sorte que leurs vitesses s'expriment par $\omega.\overline{OA}$ et $\omega'.\overline{O'B}$; donc

$$\frac{\omega.\overline{OA}}{\omega'.\overline{O'B}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}}.$$

Maintenant, si l'on mène O′C parallèle à OA, les triangles

---

(1) En raison du grand éloignement de ce point de rencontre, on ne l'a pas indiqué sur la figure.

semblables O'BC, ABD donneront

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{O'C}}{\overline{O'B}},$$

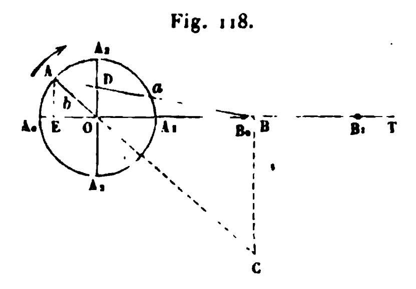
égalité qui, combinée avec la précédente, conduit à

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\overline{O'C}}{\overline{OA}}.$$

Dans l'hypothèse de ω' constant, c'est-à-dire d'une rotation uniforme de la manivelle, la vitesse angulaire du balancier varierait proportionnellement à $\overline{O'C}$.

71. *Tige guidée et manivelle réunies par une bielle.* — La manivelle OA (*fig.* 118) tourne autour d'un axe O perpendi-

Fig. 118.



culaire à sa direction; en A elle s'articule avec une bielle AB, articulée elle-même en B avec une tige guidée. Le mouvement du point B se fait donc nécessairement suivant une droite, et l'on s'arrange pour que cette droite passe en O. Les deux droites $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ se meuvent dans un même plan perpendiculaire à l'axe; la longueur a de la seconde est ordinairement cinq ou six fois la longueur b de la première.

Soient A_0 et A_1 les points où le cercle OA est coupé par la droite OB suivant laquelle le point B se déplace. Lorsque A sera en A_0 ou en A_1, B occupera des positions correspondantes B_0, B_1, qu'on obtient en prenant

$$\overline{A_0B_0} = \overline{A_1B_1} = \overline{AB} = a;$$

ces points B_0 et B_1 sont les limites entre lesquelles oscille le

point B, car tout point de OB pris à gauche de B_0 est à une distance moindre que a de tous les points du cercle OA, et tout point à droite de B_1 est au contraire trop éloigné pour que la bielle puisse y atteindre. Comme dans l'exemple précédent, pendant une rotation complète de la manivelle, comprenant l'aller de A_0 à A_1 et le retour de A_1 à A_0 (dans le sens de la flèche ou en sens contraire), le point B va de B_0 à B_1 et revient de B_1 à B_0. L'étendue totale $\overline{B_0B_1}$ est égale au diamètre $2b$ du cercle OA; on a en effet

$$\overline{OB_0} = a - b, \quad \overline{OB_1} = a + b,$$

d'où résulte

$$\overline{B_0B_1} = \overline{OB_1} - \overline{OB_0} = 2b.$$

Les points A_0, A_1 se nomment *points morts*, parce que, si la manivelle occupe les positions OA_0, OA_1, une force exercée dans la direction de la tige guidée ne pourrait faire sortir l'arbre O du repos et ne ferait que le presser contre ses appuis.

La vitesse v de la tige guidée, c'est-à-dire celle du point B qui lui est commune avec la bielle, se détermine aisément. Menons la perpendiculaire BC à la droite parcourue par ce point et prolongeons le rayon OA, normal à la trajectoire de A, jusqu'à sa rencontre C avec BC. Le point C est le centre instantané de rotation de AB; donc les vitesses de B et A sont dans le rapport $\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$, ce qui s'exprime par l'équation

$$v = \omega . \overline{OA} \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}},$$

en nommant ω la vitesse angulaire de l'arbre O autour de son axe. Si l'on mène par le point O la parallèle OD à BC, les triangles semblables AOD, ACB donneront l'égalité

$$\overline{OD} = \frac{\overline{CB}.\overline{OA}}{\overline{CA}},$$

et par suite la précédente devient

$$v = \omega . \overline{OD}$$

Le point E, projection de A sur le diamètre A_0A_1, a une vitesse exprimée par $\frac{d.\overline{A_0E}}{dt}$; or, si l'on nomme α l'angle A_0OA, on a

$$\overline{A_0E} = b(1 - \cos\alpha),$$

et, en différentiant,

$$\frac{d.A_0E}{dt} = b \sin\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \omega.\overline{AE}.$$

Dans le cas où la bielle serait infinie, les lignes $\overline{AE}$ et $\overline{OD}$ seraient égales; pratiquement elles diffèrent assez peu, et l'on peut dire approximativement que les vitesses des points B et E sont égales, ou bien que les mouvements de ces deux points sont les mêmes. On peut aussi justifier cet énoncé en remarquant que la bielle, vu sa grande longueur, fait toujours un petit angle avec OT, et que par conséquent on peut la regarder comme à peu près égale à sa projection $\overline{BE}$; les points B et E, mobiles tous les deux sur une même droite et séparés par une distance constante, ont alors des mouvements identiques.

Pendant que la manivelle décrit le demi-tour compris entre OA_3 et OA_2, la bielle AB passe d'un côté à l'autre du point O et se trouve coupée entre A et B par l'axe de rotation. Ce passage de la bielle ne serait pas possible, si l'arbre O n'était pas interrompu au droit de l'espace qui renferme toutes les positions de la bielle. On peut, ou placer la manivelle M à l'extrémité de l'arbre, comme dans la *fig.* 119, ou con-

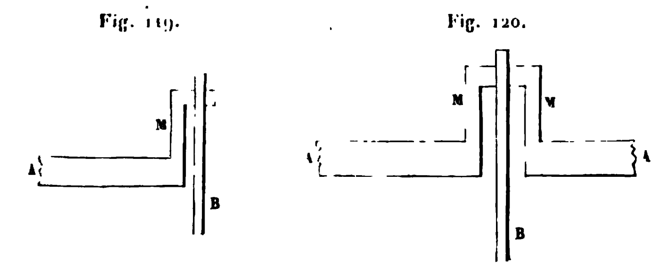


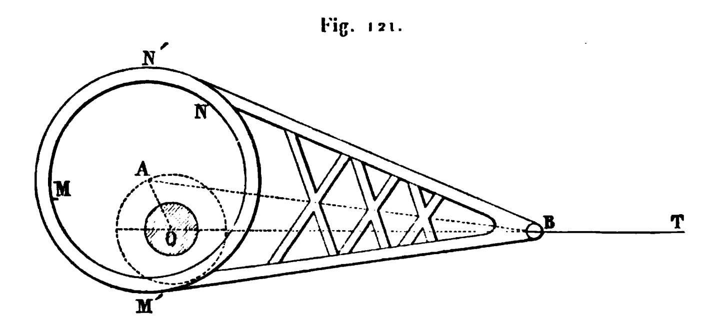
Fig. 119. Fig. 120.

struire un arbre coudé AA, comme l'indique la *fig.* 120. Les deux parties perpendiculaires M remplacent alors la mani-

velle, et l'articulation se trouve sur le corps réunissant les deux extrémités de ces parties perpendiculaires. Des deux manières on laisse toujours le passage libre à la bielle B; la deuxième a l'inconvénient de compliquer la construction de l'arbre et de diminuer sa solidité, mais elle est néanmoins employée dans la pratique.

72. *Excentrique circulaire.* — L'articulation A (*fig.* 118) entre la bielle AB et la manivelle OA se réalise au moyen de deux cylindres à section droite circulaire, ayant tous deux pour axe une même droite menée par le point A parallèlement à l'axe de rotation O; l'un plein, faisant corps avec la manivelle; l'autre creux, de rayon aussi peu différent que possible, enveloppant le premier et faisant corps avec la bielle. La grandeur du rayon commun de ces deux cylindres est absolument indifférente, au point de vue purement géométrique;

Fig. 121.



quelle qu'elle soit, le point A de la manivelle coïncidera toujours avec le point A de la bielle, pendant que les deux corps tourneront l'un par rapport à l'autre autour de l'axe A, et c'est en cela que consiste tout l'effet de l'articulation. Dès lors on peut, sans changer le résultat géométrique de l'appareil précédent, augmenter le rayon des deux cylindres qui constituent l'articulation A, au point qu'ils en arrivent à comprendre l'axe O et la section de l'arbre dans leur intérieur (*fig.* 121). Le cylindre plein MN calé sur l'arbre remplace alors la manivelle; on le nomme *poulie d'excentrique*. Ce cylindre est enveloppé par un anneau M′N′ nommé *collier*

d'excentrique, qui fait corps avec un châssis solide, articulé en B avec la tige guidée; l'ensemble du châssis et du collier remplace la bielle. Souvent on emploie, au lieu du châssis, une simple tige faisant corps avec le collier; on la nomme *barre d'excentrique.*

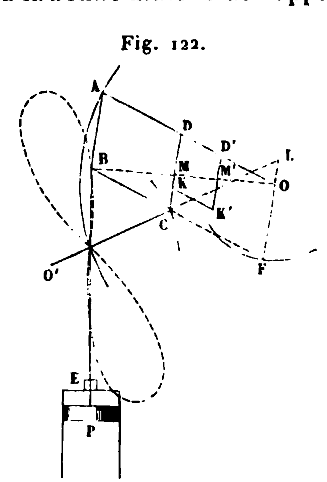
Tout l'appareil prend le nom d'*excentrique,* en raison de ce que la section droite du cylindre MN tourne autour d'un point O différent de son centre A. La distance $\overline{OA}$ se nomme *rayon d'excentricité.*

Il est évident que le mouvement aura lieu comme si la manivelle OA était reliée par la bielle AB à la tige guidée; mais si l'excentrique est géométriquement la même chose que la combinaison de bielle et manivelle, les deux appareils ont entre eux une différence importante. Dans les deux cas, en effet, les deux cylindres formant l'articulation A tournent l'un par rapport à l'autre en décrivant les mêmes angles, puisque les variations de l'angle OAB sont les mêmes; par suite, le glissement qui se produit à la surface de séparation est proportionnel au rayon AM. Il y a donc des glissements plus grands dans l'excentrique, ce qui, comme nous le verrons plus tard, exige une plus grande dépense de puissance motrice. Aussi, malgré l'inconvénient signalé à la fin du n° 71, préfère-t-on construire des arbres coudés, lorsque l'appareil doit se placer entre leurs extrémités et qu'il est destiné à transmettre une force considérable par l'intermédiaire de la bielle; au contraire, on préférera l'excentrique appliqué sur un arbre droit, si la force n'a qu'une assez petite intensité, parce que l'économie possible à réaliser sur cette petite force ne serait pas une compensation suffisante des inconvénients inhérents aux arbres coudés.

73. *Parallélogramme de Watt.* — Watt voulait transmettre le mouvement rectiligne alternatif d'un piston P, mobile verticalement dans un corps de pompe, à un balancier OA oscillant autour d'un axe horizontal fixe (*fig.* 122). Pour cela on pourrait simplement réunir les deux corps par un lien rigide AB articulé en A avec le balancier et en B avec la tige du piston; mais alors cette tige éprouverait de la part du lien une pression oblique qui tendrait à la fléchir et à déformer la

boîte à étoupes E, circonstance nuisible à la conservation et à la bonne marche de l'appareil. Au lieu de cela Watt a cherché une combinaison au moyen de laquelle le point B fût assujetti à décrire la ligne droite PB indépendamment de sa liaison avec la tige du piston et seulement en vertu du mouvement du balancier. Cette condition étant remplie, il est clair que, si l'on attache en B la tige du piston, elle se mouvra sans être entraînée à droite ou à gauche et sans frottement notable.

Fig. 122.



Ayant dessiné un parallélogramme ABCD sur le lien $\overline{AB}$ et sur une portion AD de $\overline{OA}$, Watt remarqua d'abord que, si le point B décrit rigoureusement la ligne droite BP, pendant que le parallélogramme suit, en se déformant, le mouvement du balancier, le lieu des points C est très approximativement un arc de cercle, pourvu cependant que l'amplitude des oscillations du balancier ne soit pas trop grande, et qu'il y ait des rapports de longueur convenables entre les lignes de la figure. Soit O' le centre de cet arc de cercle. Imaginons maintenant qu'on ait fixé au balancier les tiges AB, BC, CD, formant un parallélogramme articulé en ses quatre sommets, et que de plus on ait réuni le point C au point fixe O' par une *bride* ou un lien rigide $\overline{O'C}$ articulé en O' et C; alors le sommet C décrira rigoureusement le cercle qu'il décrivait à très peu près quand le point B se mouvait en ligne droite, et par conséquent ce point B s'écartera très peu de la trajectoire BP qu'on lui avait d'abord assignée. Le problème sera donc approximativement résolu, au moyen d'une combinaison simple et facilement réalisable de tiges articulées.

En réalité, le point B ne décrit pas une droite. Prolongeons en effet $\overline{BC}$ d'une quantité $\overline{CF} = \overline{OD}$, et joignons $\overline{OF}$: la figure DCFO est un parallélogramme et $\overline{OF} = \overline{CD} = \overline{AB}$. Le point C se meut sur un cercle de rayon $\overline{O'C}$, le point F sur

un autre cercle de rayon $\overline{OF}$; donc la trajectoire du point B est engendrée par un point pris sur une droite CF de longueur constante, dont les extrémités glissent sur deux cercles donnés. Cette courbe porte le nom de *courbe à longue inflexion* ou de *courbe de Watt*. On sait que, prise dans toute son étendue, elle présente la forme d'un 8 dont les deux boucles se joignent sur la ligne des centres, en un point qui est justement un point d'inflexion; or la partie utilisée par Watt est voisine de ce point, et pour cette raison elle s'écarte peu d'une ligne droite. Si l'on voulait la construire par points, sa définition géométrique en donne facilement le moyen; on peut aussi tracer les tangentes par le procédé indiqué au n° 22, *c*. Mais on n'arriverait pas à connaître ainsi bien exactement les écarts très petits entre B et l'axe de la tige du piston; nous dirons un peu plus loin comment on les détermine par le calcul.

Le centre instantané de rotation de la droite mobile BCF se trouve à l'intersection L des rayons OF et O'C, prolongés au besoin; en nommant v la vitesse du point B et ω la vitesse angulaire de la droite, on aura

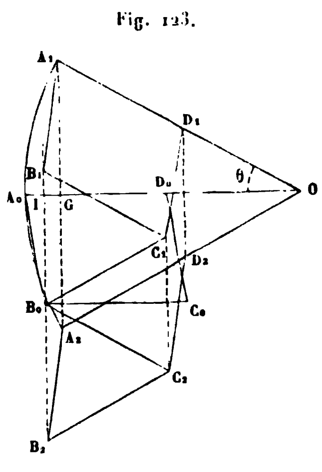
$$v = \omega . \overline{LB}.$$

Or ω est aussi la vitesse angulaire du balancier, puisque OA et BF restent toujours parallèles; l'équation ci-dessus exprime donc la relation entre les mouvements du balancier et du piston.

Voici maintenant les règles établies par Watt pour tracer la figure et limiter les excursions du balancier, de manière à rendre sensiblement droite la trajectoire du point B. Soient OA_0 (*fig.* 123) la position moyenne du balancier, OA_1 et OA_2 ses positions extrêmes, symétriques relativement à OA_0. Pour tracer les trois positions correspondantes du parallélogramme, Watt prend d'abord les côtés $\overline{A_1D_1}$ et $\overline{B_1C_1}$ égaux à $\frac{1}{2}\overline{OA_1}$, le côté $\overline{A_1B_1}$ compris entre la moitié et les trois septièmes de la corde $\overline{A_1A_2}$; puis il place les trois sommets B_0, B_1, B_2 sur une perpendiculaire à OA_0, menée par le milieu I de la flèche $\overline{A G}$. Ces trois points s'obtiennent en décrivant de A_0, A_1, A_2

comme centres, avec $\overline{A_1B_1}$ pour rayon, des arcs de cercle coupant la perpendiculaire IB_2; ils sont en ligne droite et équidistants, car $\overline{B_0G}$, égale à $\overline{A_0B_0}$ pour raison de symétrie, est aussi égale à A_1B_1 et à A_2B_2; les figures $A_0B_1B_0G$, $GB_0B_2A_2$ sont donc des parallélogrammes, de sorte que $\overline{B_1B_0} = \overline{A_1G}$ et $\overline{B_0B_2} = \overline{GA_2}$, comme parallèles comprises entre parallèles. Il en résulte aussi que la course totale de la tige du piston, ou $\overline{B_1B_2}$, est égale à la corde $\overline{A_1A_2}$.

Fig. 123.



L'angle $\theta = A_0OA_1$, qu'on nomme *angle d'ouverture* du balancier et qui mesure l'écart maximum entre la position moyenne et l'une des positions extrêmes de celui-ci, se détermine au moyen de la condition, également posée par Watt, que $\overline{OI}$ soit triple de $\overline{A_1G}$. On a, en effet, en désignant par a le rayon $\overline{OA_1}$ du cercle décrit par l'articulation A_1,

$$\overline{A_1G} = a \sin\theta, \quad \overline{OI} = \frac{1}{2}\, a(1 + \cos\theta);$$

donc

$$1 + \cos\theta = 6 \sin\theta \quad \text{ou} \quad 2\cos^2\frac{1}{2}\theta = 12 \sin\frac{1}{2}\theta \cos\frac{1}{2}\theta,$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{6}, \quad \theta = 18^\circ 55' 28''.$$

L'angle $\frac{1}{2}\theta$ est égal à l'angle inscrit $A_0A_2A_1$; donc

$$\overline{A_0G} = \frac{1}{6}\,\overline{A_1G} = \frac{1}{12}\,\overline{A_1A_2},$$

c'est-à-dire que la flèche de l'arc $A_1A_0A_2$ est $\frac{1}{12}$ de la corde. En outre, le rayon a est égal à $OI + \frac{1}{2}\,\overline{A_0G} = \left(3 + \frac{1}{12}\right)\overline{A_1G}$,

ce qui achève de définir les diverses lignes de la figure au moyen de $\overline{A_1G}$ ou de la course $\overline{B_1B_2}$ qui est double de $\overline{A_1G}$.

Ayant construit les deux positions extrêmes et la position moyenne du parallélogramme, Watt adopte pour cercle à faire décrire au sommet C celui qui passe par les trois positions C_1, C_0, C_2. Nous allons démontrer qu'il a B_0 pour centre et le côté $\overline{B_0C_0}$ du parallélogramme pour rayon. En effet, les deux droites $\overline{B_1C_1}$ et $\overline{B_2C_2}$, égales entre elles, sont menées par deux points B_1, B_2 en faisant le même angle $90° - \theta$ avec B_1B_2; elles sont donc symétriques relativement à la perpendiculaire B_0C_0 au milieu de $\overline{B_1B_2}$, et par suite cette perpendiculaire contient le centre de tout cercle passant par C_1 et C_2. Cela resterait vrai alors même qu'on aurait pris le rapport $\frac{A_1D_1}{\overline{OA_1}}$ différent de $\frac{1}{2}$; le centre du cercle circonscrit au triangle $C_1C_0C_2$ pourrait alors varier sur B_0C_0. Mais supposons que, conformément à la règle habituelle de Watt, on fasse $\overline{A_1D_1} = \frac{1}{2}\,\overline{OA_1}$; alors la corde $\overline{D_1D_2}$, parallèle à $\overline{A_1A_2}$, en est aussi la moitié. Les deux lignes C_1D_1 et C_2D_2 sont égales et parallèles, comme l'étant respectivement à A_1B_1 et à A_1B_2; donc $\overline{C_1C_2}$ est égale et parallèle à $\overline{D_1D_2}$, et par suite à $\overline{B_1B_0}$ et à $\overline{B_0B_2}$. Donc les figures $B_0B_1C_1C_2$, $B_0B_2C_2C_1$ sont des parallélogrammes, comme ayant leurs côtés verticaux égaux et parallèles; donc aussi $\overline{B_0C_2} = \overline{B_1C_1} = \overline{B_0C_0}$, et de même $\overline{B_0C_1} = \overline{B_2C_2} = \overline{B_0C_0}$. Le point B_0 est donc bien le centre du cercle passant par C_1, C_0, C_2, et le rayon est égal au côté $\overline{B_0C_0}$ du parallélogramme, ou à la moitié du rayon du balancier.

Remarquons enfin que l'angle A_0B_0I, c'est-à-dire le maximum d'inclinaison du lien sur B_1B_2, soit d'un côté, soit de l'autre, a pour sinus $\frac{\overline{A_0I}}{\overline{A_0B_0}}$; or on a vu que $\overline{A_0I}$, moitié de la flèche $\overline{A_0G}$, est $\frac{1}{24}\,\overline{A_1A_2}$ ou $\frac{1}{12}\,\overline{A_1G}$, et d'autre part que $\overline{A_0B_0}$ est une fraction k, comprise entre $\frac{6}{7}$ et 1, de la même ligne $\overline{A_1G}$; donc on a

$$\sin A_0B_0I = \frac{1}{12k},$$

et, vu la petitesse de cet angle, on peut sans erreur notable le confondre avec son sinus.

74. *Balancier à bride.* — Le parallélogramme de Watt peut se simplifier par la suppression d'une partie des tiges articulées. Joignons en effet les points O et B (*fig.* 122) et considérons le point M où cette droite coupe le côté CD du parallélogramme; ce point est toujours, dans toutes les positions du système, le même point de la droite CD, car on a, en vertu de la similitude des triangles ODM, OAB,

$$\overline{MD} = \overline{AB}\,\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \text{const.};$$

de plus il décrit une courbe homothétique à celle du point B, puisqu'on a aussi

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = \text{const.}$$

Donc, puisque le point B décrit une trajectoire sensiblement rectiligne, il en sera de même pour le point M.

Le mouvement de ce point M sera déterminé en construisant simplement le *balancier* OD, le *contre-balancier* ou la *bride* O′C, assujettis à tourner respectivement autour des axes fixes O, O′, et articulant à leurs extrémités C et D le *lien* rigide CD, de longueur constante. L'appareil se trouverait réduit à trois tiges.

Mais si l'on a gagné en simplicité sous ce rapport, on est tombé dans un inconvénient assez grave pratiquement; c'est que, à égalité d'espace occupé horizontalement par le balancier et la bride, l'espace parcouru en ligne droite par le point auquel on attache la tige du piston a diminué dans le rapport de $\overline{OD}$ à $\overline{OA}$, c'est-à-dire de moitié, si l'on se conforme aux règles de Watt. Aussi, pour cette raison, préfère-t-on employer le parallélogramme tel qu'il a été décrit au n° 73. Mais Watt a néanmoins utilisé la propriété du point M de décrire une ligne sensiblement droite, dans la construction de la machine à vapeur qui porte son nom; en B il attachait la tige du piston recevant l'action de la vapeur, et en M il attachait la

tige d'un autre piston qui joue un rôle important dans la marche de la machine.

Du reste, on pourrait trouver sur la droite OB autant de points qu'on voudrait, décrivant des trajectoires semblables à celle de B. Si l'on construit, par exemple, le parallélogramme DD'K'K articulé en ses quatre sommets, en ajoutant simplement les deux tiges D'K', K'K à celles qui existaient déjà, on voit que le point M', constant sur la tige D'K', décrit une courbe ayant avec celle du point B le rapport d'homologie

$$\frac{\overline{OD'}}{\overline{OA}}.$$

L'inspection de la *fig.* 123 montre sans peine quels seraient, avec les règles de Watt, les rapports entre les dimensions d'un balancier à bride. Le balancier $\overline{OD_1}$, égal à $\frac{37}{24}$ de la course du piston attaché au milieu du lien $\overline{C_1D_1}$, aurait même longueur que le contrebalancier $\overline{B_0C_1}$; le lien $\overline{C_1D_1}$ serait compris entre la course du piston attaché à son milieu et les $\frac{6}{7}$ de cette course. L'angle θ d'ouverture du balancier et l'inclinaison maximum du lien conserveraient les mêmes valeurs, savoir :

$$\theta = 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad C_1D_1D_2 = \frac{1}{12k},$$

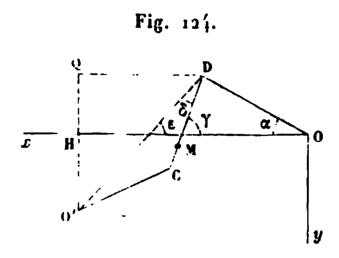
k pouvant être pris entre 1 et $\frac{6}{7}$.

Afin qu'on puisse bien se rendre compte du degré d'exactitude avec lequel les points M et B (*fig.* 122) décrivent des lignes droites, nous allons chercher les coordonnées variables de l'un de ces points, le premier par exemple, quand on fait varier la position du balancier. Soient OD, DC, O'C (*fig.* 124) le balancier, le lien et le contre-balancier; désignons par

r, l, r' leurs longueurs;
α l'angle que OD fait avec la position moyenne Ox;
γ, ε les angles de DC et DO' avec la même droite Ox;
δ l'angle O'DC;

n le rapport entre la distance $\overline{MD}$ du point décrivant M à l'articulation D et la longueur totale $\overline{DC} = l$ du lien;

Fig. 124.



b, c les coordonnées du centre donné O′ relativement à Ox et à la perpendiculaire Oy menée en O, savoir $b = \overline{OH}$, $c = \overline{O'H}$;

x, y celles du point M;

u la distance de O′ à la droite DQ menée en D parallèlement à Ox;

z la distance O′D.

Nous aurons d'abord

$$u = c + r\sin\alpha, \quad \overline{DQ} = b - r\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\overline{O'Q}}{\overline{DQ}} = \frac{c + r\sin\alpha}{b - r\cos\alpha};$$

de u et ε nous déduisons

$$z = \frac{u}{\sin\varepsilon}.$$

Dans le triangle DCO′, le périmètre est $r' + l + z$; en le désignant par $2p$, on a la relation connue

$$\cos\frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{p(p - r')}{lz}};$$

on calcule ensuite l'angle $\gamma = \delta + \varepsilon$, puis les coordonnées x et y, savoir

$$x = \quad r\cos\alpha + nl\cos\gamma,$$
$$y = - r\sin\alpha + nl\sin\gamma.$$

La valeur de x serait seule utile pour constater l'écart entre la courbe réellement parcourue par le point M et la droite

qu'on suppose pouvoir lui être substituée. Après avoir calculé x pour une suite de valeurs de α suffisamment rapprochées, sans dépasser la limite des oscillations du balancier, on prendrait les différences entre les valeurs obtenues pour x et la valeur particulière qui répond à $\alpha = 0$.

Quand les dimensions sont prises conformément aux règles de Watt (n° 73), l'écart maximum varie un peu avec le rapport $\frac{l}{r \sin\theta}$ que Watt n'a pas déterminé d'une manière absolue, mais pour lequel il a seulement indiqué des limites. Ce maximum est atteint pour $\alpha = 14°40'$ environ et a une valeur à peu près égale, en moyenne, à $\frac{1}{2150}$ de la course du point M.

Dans l'hypothèse dont nous parlons, de dispositions conformes aux règles de Watt, le calcul ci-dessus peut être remplacé par un autre qui conduit approximativement au but d'une manière beaucoup plus rapide et donne l'expression de l'écart maximum, ainsi que l'équation de la courbe lieu des points M dans sa partie utile. Conservons en effet les notations précédentes, et nommons en outre

α' l'angle de O'C avec sa position moyenne, parallèle à Ox;
φ le complément de l'angle γ, φ_0 la valeur de φ quand OD et O'C font avec Ox leur angle maximum θ;
m, m' les rapports $\frac{\alpha}{\theta}$, $\frac{\alpha'}{\theta}$, tous deux variables de -1 à $+1$, dans l'étendue complète d'une oscillation du balancier.

En observant qu'on a $r = r'$, nous pourrons d'abord poser les relations

$$b = r(\cos m\theta + \cos m'\theta) + l\sin\varphi,$$
$$c = r(\sin m'\theta - \sin m\theta) + l\cos\varphi;$$

et, attendu que les seconds membres doivent rester les mêmes dans la position moyenne pour laquelle on a $m = m' = 0$, $\varphi = -\varphi_0$, il vient

$$(1) \qquad r(2 - \cos m\theta - \cos m'\theta) = l(\sin\varphi + \sin\varphi_0),$$
$$(2) \qquad r(\sin m\theta - \sin m'\theta) = l(\cos\varphi - \cos\varphi_0).$$

Si maintenant on compte les x à gauche d'une parallèle à Oy

menée par le milieu de l'abscisse b, l'abscisse du point M, moyenne arithmétique entre celles de C et D, aura pour expression

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\left(r\cos m'\theta - \frac{b}{2} + \frac{b}{2} - r\cos m\theta\right) \\ = \frac{1}{2} r(\cos m'\theta - \cos m\theta). \end{cases}$$

La valeur de l satisfait de plus à la relation

$$(4)\qquad l\sin\varphi_0 = r(1 - \cos\theta),$$

dont chaque membre représente la flèche de l'arc décrit par le point D dans son déplacement complet; en éliminant l au moyen de cette relation, les équations (1) et (2) deviennent

$$(5)\quad \sin\varphi_0(2 - \cos m\theta - \cos m'\theta) = (\sin\varphi + \sin\varphi_0)(1 - \cos\theta),$$

$$(6)\quad \sin\varphi_0(\sin m\theta - \sin m'\theta) = (\cos\varphi - \cos\varphi_0)(1 - \cos\theta).$$

La dernière équation montre que $(m - m')\theta$ est une quantité du troisième ordre relativement aux angles θ, φ, φ_0; nous poserons donc

$$m' = m - \mu,$$

μ étant du deuxième ordre. Si l'on développe alors les équations (3), (5) et (6) suivant les puissances entières de θ, φ, φ_0 et μ, en négligeant les termes du cinquième ordre et au-dessus, ce qui est justifié par la petitesse de ces quantités, on trouvera, toutes simplifications et réductions faites,

$$x = \frac{1}{2}\mu m r,\quad m^2\varphi_0 = \frac{1}{2}(\varphi + \varphi_0),\quad \mu\varphi_0 = \frac{1}{4}(\varphi_0^2 - \varphi^2)\theta;$$

de là résulte, par l'élimination de μ et de φ,

$$(7)\qquad x = \frac{1}{2} r\varphi_0\theta^3 m^3(1 - m^2),$$

formule qui fait connaître approximativement l'écart cherché x, en fonction du rayon r donné, des angles également donnés φ_0 et θ, et de l'angle variable α défini par le rapport m.

Si l'on veut l'équation de la courbe décrite par M quand m varie de -1 à $+1$, on remarquera que l'ordonnée de D au-

dessus de Ox est $r\sin\alpha$ ou à peu près $rm\theta$; cette ordonnée est aussi celle de M au-dessus de sa position moyenne, car la petitesse de l'angle φ fait que la projection de DM sur Oy est sensiblement constante. Donc, en comptant les ordonnées y de M en dessus de la parallèle à Ox menée par la position moyenne dont on vient de parler, on aura

$$(8)\qquad y = rm\theta,$$

et, par élimination de m entre les équations (7) et (8),

$$(9)\qquad x = \frac{\varphi_0}{2r^2}\cdot y^3\left(1 - \frac{y^2}{\theta^2 r^2}\right).$$

Comme on le voit, l'écart est nul pour $y = 0$ et $y = \pm\theta r$, c'est-à-dire pour la position moyenne et les deux positions extrêmes du point décrivant. Le maximum de cet écart se produit pour

$$\frac{dx}{dy} = 0 \quad \text{ou} \quad 3y^2 - \frac{5y^4}{\theta^2 r^2} = 0;$$

en écartant la solution $y = 0$ qui annulerait x, il reste les solutions

$$y = \pm r\theta\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm 0,7746 r\theta,$$

auxquelles répondent les plus grands écarts absolus

$$(10)\qquad x' = \pm 0,09295\,\varphi_0\theta^3 r.$$

Ces écarts se produisent quand m a les valeurs $\pm 0,7746$, c'est-à-dire quand le balancier est un peu plus qu'aux trois quarts de sa demi-oscillation à partir de Ox.

Afin de réduire en nombres, autant que possible, la formule (10), nous y remplacerons θ et φ_0 par leurs valeurs

$$\theta = 2\,\text{arc tang}\,\frac{1}{6} = 0,330297, \quad \varphi_0 = \frac{1}{12k};$$

de plus, nommant L la course du point M, nous ferons

$$r = \frac{37}{24}\,\text{L}.$$

La formule (10) devient alors

$$x' = 0{,}000430\,\frac{L}{k} = \frac{L}{2324\,k};$$

si $k = 1$, l'écart maximum est inférieur à $\frac{1}{2300}$ de la course, et il s'élève à $\frac{1}{1992}$ de la même ligne pour $k = \frac{6}{7}$. La moyenne entre ces extrêmes est bien $\frac{1}{2150}$ environ, comme on l'a déjà dit.

La dérivée seconde $\frac{d^2x}{dy^2}$ a pour expression, d'après l'équation (9),

$$\frac{\varphi_0}{r^2}\left(3y - \frac{10\,y^3}{\theta^2 r^2}\right);$$

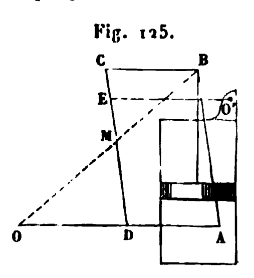
elle s'annule, et la courbe présente des inflexions, pour les points définis par les valeurs particulières

$$y = 0, \quad y = \pm r\theta\sqrt{\frac{3}{10}} = 0{,}5477\,r\theta,$$
$$m = 0, \quad m = 0{,}5477,$$

c'est-à-dire pour la position moyenne du point décrivant **M** et celles qui répondent à peu près aux 0,55 de la demi-oscillation du balancier, de chaque côté de Ox.

75. *Parallélogramme de bateaux.* — Pour les machines employées sur les bateaux à vapeur, on modifie un peu les dispositions du parallélogramme de Watt ci-dessus décrites (n° 73). Dans le but d'arriver à une réduction de la hauteur totale occupée par la machine, on place le balancier OA (*fig.* 125) à la partie inférieure, et l'on relie à un point fixe O′, pris sur le cylindre à vapeur, le point E du parallélogramme ABCD. La tige du piston est attachée en B. Si l'on joint OB, on voit encore que le point M où cette droite coupe CD ne varie pas sur ce

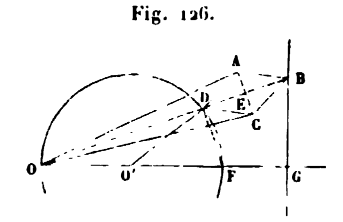
Fig. 125.



côté du parallélogramme, et que les points B et M décrivent des courbes semblables. Or, si l'on s'arrange pour que M soit voisin du milieu de DE, ce point décrit une courbe sensiblement droite dans une certaine étendue, car les trois droites OD, DE, EO' constituent la combinaison du balancier à bride (n° 74). Donc B se meut aussi à peu près en ligne droite.

76. *Parallélogramme de Peaucellier.* — M. le général du Génie Peaucellier a imaginé une combinaison de pièces articulées, qui, sans présenter beaucoup plus de complications que le parallélogramme de Watt, permet de transformer le mouvement circulaire d'un balancier en un mouvement rigoureusement rectiligne. Le balancier OA (*fig.* 126), oscillant autour du point fixe O, s'articule en A avec un losange articulé lui-même en ses quatre sommets; le sommet D est relié par une bride $\overline{O'D}$ au point fixe O', tellement situé que O se trouve sur le cercle O'D, décrit de O' comme centre avec $\overline{O'D}$ pour rayon; la bride est articulée en D et O'. Enfin une seconde bride OC, de même longueur que OA, articulée en C et O, relie le point C au point fixe O. Le point B se trouve alors assujetti à se mouvoir sur une perpendiculaire à OO'.

Fig. 126.



Pour le démontrer, remarquons d'abord que, vu l'égalité $\overline{OA} = \overline{OC}$, la diagonale BD du losange est une perpendiculaire au milieu de la corde AC du cercle AO et passe par le centre O de ce cercle. Les triangles rectangles OAE, DAE donnent ensuite

$$\overline{OA}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{AE}^2, \quad \overline{AD}^2 = \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2;$$

d'où l'on tire

$$\overline{OE}^2 - \overline{DE}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AD}^2,$$

ou encore

$$(\overline{OE} + \overline{DE})(\overline{OE} - \overline{DE}) = \overline{OB}.\overline{OD} = \overline{OA}^2 - \overline{AD}^2 = \text{const}.$$

Cela posé, joignons D au second point F où le rayon OO'

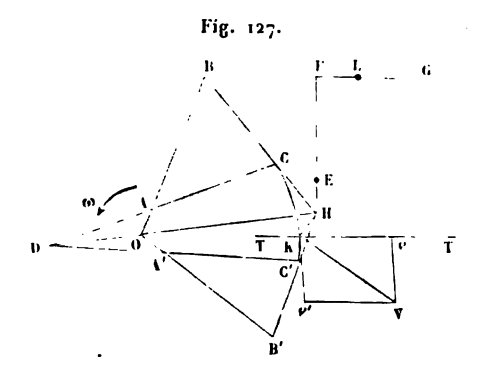
prolongé coupe la circonférence décrite par ce point D; abaissons de B la perpendiculaire BG sur OO′; nous formons ainsi deux triangles rectangles ODF, OGB, qui sont semblables, comme équiangles. Nous aurons donc

$$\overline{OG} = \frac{\overline{OD}.\overline{OB}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OA}^2 - \overline{AD}^2}{\overline{OF}} = \text{const.};$$

donc le point G est constant, et par conséquent le point B se meut bien sur une perpendiculaire à OO′.

77. *Coulisse de Stephenson.* — La coulisse de Stephenson est employée dans certaines machines à vapeur, pour produire des effets dont nous parlerons dans une autre partie du Cours. Elle consiste essentiellement en une pièce solide portant une rainure circulaire CC′ (*fig.* 127); cette pièce, suspendue au point fixe F par une tige FE articulée à ses deux

Fig. 127.



bouts, est articulée en C et C′ avec deux barres d'excentrique AC, A′C′, dont les rayons d'excentricité OA, OA′, solidaires l'un avec l'autre et égaux entre eux, tournent autour d'un même axe O. Un petit cylindre K nommé *coulisseau*, appartenant à une tige guidée TT, est engagé dans la rainure ou coulisse CC′. La rotation autour de O détermine le mouvement de la coulisse; ce mouvement produit celui du coulisseau et, par suite, celui de la tige. On comprend que ce dernier dépend de la position initiale du point K sur CC′; on la fait

varier quand on le veut, en agissant sur une combinaison de tiges articulées, que nous réduisons, pour simplifier le dessin, à un levier FG mobile autour du point fixe L et articulé en F avec la tige de suspension FE.

Proposons-nous d'abord de trouver, à un instant donné, le centre instantané de rotation de la coulisse. Le point E de cette pièce ne pouvant se mouvoir que sur un cercle ayant F pour centre, le centre instantané dont il s'agit sera nécessairement un certain point H de la droite FE. Joignons HC, HC′ et prolongeons ces droites jusqu'à leurs rencontres B, B′ avec les rayons d'excentricité OA, OA′; ces points B, B′ seront les centres instantanés de rotation respectifs des barres d'excentrique AC, A′C′, comme étant obtenus, pour chacune d'elles, par la rencontre des normales aux trajectoires de deux points (nº 22, *c*).

Désignons par $d\alpha$, $d\beta$ les rotations infiniment petites qui ont lieu simultanément autour de O et H; les déplacements élémentaires de A et C s'expriment par $\overline{OA}\cdot d\alpha$ et $\overline{HC}\cdot d\beta$, et, comme ils sont proportionnels à $\overline{AB}$ et $\overline{CB}$, on a

$$\overline{OA}\cdot d\alpha = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{HC}}{\overline{CB}}\,d\beta.$$

En vertu d'un raisonnement semblable sur les déplacements de A′ et C′, on a aussi

$$\overline{OA'}\cdot d\alpha = \frac{\overline{A'B'}\cdot\overline{HC'}}{\overline{C'B'}}\,d\beta.$$

La combinaison de ces deux équations donne la suivante :

$$(1)\qquad \frac{\overline{AB}\cdot\overline{HC}}{\overline{OA}\cdot\overline{CB}} = \frac{\overline{A'B'}\cdot\overline{HC'}}{\overline{OA'}\cdot\overline{C'B'}},$$

qui va nous conduire à la détermination du point H. Considérons en effet le triangle OBH comme coupé par la transversale AC, qui rencontre le prolongement de OH au point D; l'application d'un théorème connu de Géométrie donne

$$\overline{AB}\cdot\overline{OD}\cdot\overline{HC} = \overline{OA}\cdot\overline{DH}\cdot\overline{CB};$$

d'où résulte

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{DO}} = \frac{\overline{AB}.\overline{HC}}{\overline{OA}.\overline{CB}}.$$

Pareillement, si l'on nomme D' l'intersection de A'C' prolongé avec OH, la considération du triangle OB'H coupé par la transversale A'C' donnera

$$\frac{\overline{D'H}}{\overline{OD'}} = \frac{\overline{A'B'}.\overline{HC'}}{\overline{OA'}.\overline{C'B'}};$$

on a donc, en vertu de l'équation (1),

$$\frac{\overline{DH}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{D'H}}{\overline{OD'}},$$

ce qui entraîne nécessairement la coïncidence du point D' avec le point D. On arrive ainsi au théorème suivant, dû à M. Phillips :

Le centre instantané de rotation de la coulisse est au point de rencontre de la tige de suspension FE *avec une droite* OD, *joignant le centre de rotation des excentriques et l'intersection* D *des barres d'excentrique* AC, A'C'.

Le rapport des vitesses angulaires ω, ω' de l'arbre O et de la coulisse est égal à celui des angles $d\alpha$, $d\beta$; donc

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{\overline{AB}.\overline{HC}}{\overline{OA}.\overline{CB}} = \frac{\overline{DH}}{\overline{OD}}$$

et par suite

$$\omega' = \frac{\omega.\overline{OD}}{\overline{DH}}.$$

Après avoir ainsi calculé ω', on en déduira la vitesse V du point K de la coulisse, qui est dirigée suivant la perpendiculaire KV à HK et a pour valeur ω'.HK. On peut regarder V comme la résultante de la vitesse v du coulisseau, dirigée suivant TT, et d'une vitesse relative v', en vertu de laquelle la coulisse glisse sur le coulisseau et qui, par conséquent, ne peut avoir que la direction Kv' de la tangente en K à la courbe CC'.

La construction du parallélogramme $K v V v'$, dont on connaît la diagonale $\overline{KV} = V$ et les directions des côtés, donnera donc la vitesse v du coulisseau et de la tige, et accessoirement la vitesse de glissement v'.

Lorsque, à certains instants, on fait mouvoir le levier GF, pour donner une autre position à la coulisse relativement aux deux rayons OA, OA′ et à la droite TT, les points A et A′ restant fixes dans ce mouvement relatif, C et C′ tournent respectivement autour d'eux, en sorte que D est le centre instantané de rotation de la coulisse dans ce mouvement de relevage.

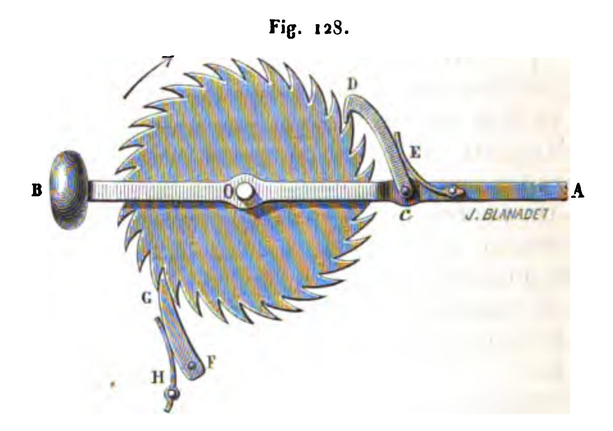
La solution de toutes les questions qui concernent la coulisse de Stephenson exigerait des développements trop étendus pour trouver place ici; on peut consulter sur ce sujet le Mémoire de M. Phillips, inséré aux *Annales des Mines,* année 1854. Nous ajouterons seulement à ce qui précède : 1° que si le coulisseau est à l'une des extrémités de la coulisse, le mouvement de la tige est celui qui lui serait communiqué par l'un des excentriques agissant seul, à l'exclusion de l'autre; 2° que le mouvement de la tige s'annule à peu près, quand le coulisseau se place au milieu de la coulisse; 3° que si le coulisseau est mis successivement dans une série de positions entre le milieu et l'une des extrémités de la coulisse, les mouvements oscillatoires de la tige, correspondant à chacune de ces positions, ont des amplitudes variables entre o et $2\overline{OA}$ ou $2\overline{OA'}$.

78. *Encliquetages.* — Les appareils connus sous ce nom donnent un moyen de transformer un mouvement de rotation alternatif en un mouvement de rotation continu. Ils peuvent se diviser en deux espèces : ceux de la première comportent l'emploi d'une roue dite *à rochet;* dans la seconde, leur jeu se fonde sur l'impossibilité du glissement de deux pièces solides l'une sur l'autre, dans un certain sens, tandis que la possibilité existe pour le sens contraire.

La roue à rochet présente des saillies de forme analogue à celle des dents d'une scie, et toutes inclinées dans le même sens sur la circonférence extérieure (*fig.* 128). La figure donne en même temps l'emploi de cette roue dans un treuil destiné au montage des matériaux de construction. Un ma-

nœuvre abaisse un levier AB mobile autour de l'axe O, en exerçant un effort descendant du côté A; une pièce CD, articulée en C et toujours pressée contre la roue par un ressort E, l'oblige à tourner dans le sens de la flèche. Pendant ce mouvement, le *cliquet* GF, mobile autour de l'axe fixe F, est écarté par la roue, malgré la pression du ressort H, puis il vient se loger dans le creux suivant. Le passage d'une dent étant alors effectué, l'ouvrier cesse de presser sur le levier pour abaisser la partie OA et la laisse remonter sous l'action d'un

Fig. 128.

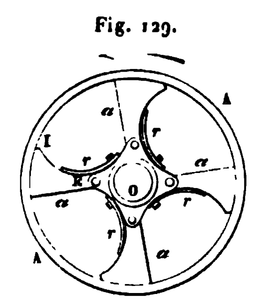


contrepoids B; ce mouvement inverse du levier ne fait pas marcher la roue, qui est alors arrêtée par le cliquet, et il n'est pas empêché par la pièce CD, qui tourne tant soit peu autour de C et glisse par son extrémité D sur une dent, pour se mettre en prise sur la dent suivante. On recommence indéfiniment cette oscillation du levier et à chaque fois la roue avance d'une dent, toujours dans le même sens; cette roue est solidaire avec l'arbre du treuil.

Le levier de *la Garousse,* ainsi appelé du nom de son inventeur, offre une disposition analogue à celle du levier AB. Cependant il en diffère : 1° en ce que le levier et la roue ne tournent pas autour du même axe; 2° en ce que le contrepoids B est supprimé et qu'il y a une seconde pièce comme CD, de manière à faire avancer la roue d'une dent à chaque oscillation du levier, dans un sens ou dans l'autre.

Nous ne donnerons qu'un seul exemple des encliquetages du second genre : c'est l'encliquetage *Dobo*. Dans le creux d'un anneau cylindrique AA (*fig.* 129) se trouve un arbre concentrique O, sur lequel sont articulées quatre cames *a*, *a*, *a*, *a*, pressées par des ressorts assez flexibles *r*, *r*, *r*, *r* contre la surface intérieure de l'anneau.

Fig. 129.



Si l'on fait tourner l'anneau dans le sens de la flèche, il ne peut glisser sur les cames et détermine alors la rotation de l'arbre O, absolument comme si le système se trouvait solidifié. Au contraire, si l'on veut faire tourner l'anneau en sens inverse, il fera fléchir les ressorts et glissera sur les cames sans entraîner l'arbre O, pour peu que celui-ci éprouve une résistance à la rotation. On pourra donc transformer un mouvement alternatif de l'anneau en une rotation continue de l'arbre O.

On peut aussi transmettre le mouvement de l'arbre O à l'anneau; la transmission aurait ou n'aurait pas lieu, suivant que l'arbre tournerait contrairement à la flèche ou dans le même sens.

Nous donnerons plus tard la théorie de cet encliquetage et nous verrons alors la condition nécessaire pour qu'il fonctionne comme nous venons de le dire. Il présente le grand avantage de marcher avec beaucoup de douceur, en supprimant tous les petits chocs des cliquets et des pièces C, D contre la roue à rochet (*fig.* 128), lesquels produisent un bruit fatigant et augmentent la dépense de force.

§ VI. — Organes servant à produire la modification brusque d'un mouvement.

79. *Manchons d'embrayage.* — Le manchon d'embrayage est une pièce calée sur un arbre tournant, de manière à tourner nécessairement avec lui, mais qu'on peut, à certains instants, amener dans une autre position, en la faisant glisser le ong de l'arbre, parallèlement à l'axe de rotation. Cette

pièce reçoit différentes formes et s'emploie dans diverses circonstances, dont nous allons donner une idée.

(*a*) *Embrayage par manchon mobile, pour deux arbres en prolongement l'un de l'autre.* — L'un des arbres porte, vers l'extrémité voisine de l'autre arbre, un manchon calé sur lui, mais pouvant glisser longitudinalement, comme on vient de le dire; ce manchon est muni d'un certain nombre de saillies ou dents qui, par l'effet du glissement, entreront dans les creux correspondants d'un autre manchon faisant corps avec le second arbre. De cette manière, l'un des arbres ne peut tourner sans entraîner l'autre. En séparant, au contraire, les deux manchons, les arbres redeviennent indépendants.

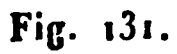
Le glissement du manchon mobile se produit au moyen d'un levier terminé par une fourche dont les branches en demi-cercle entrent dans une gorge pratiquée sur le manchon; on agit sur ce levier, soit à la main, soit par une vis de rappel si la force à exercer est un peu considérable.

Si la transmission de mouvement ne doit se faire que dans un sens, les dents sont souvent profilées, sur la surface développée du cylindre qui limite les manchons, par une suite de lignes telles que *ab* (*fig.* 130), parallèles à l'axe, et d'autres lignes inclinées, telles que *bc*. En enveloppant ce profil sur le cylindre et le faisant parcourir par une droite qui s'appuierait toujours sur lui et sur l'axe et qui resterait toujours perpendiculaire à cette dernière ligne, la droite dont il s'agit engendrerait les surfaces des dents; les lignes *ab* donneraient lieu à des plans diamétraux et les lignes *bc* à des hélicoïdes gauches. La pression mutuelle des dents, pour la transmission de mouvement, s'exercerait sur les parties planes. La figure représente les profils des manchons quand ils ne se touchent pas encore; il est clair, d'après cette figure, que, si le manchon inférieur devait entraîner l'autre, il ne pourrait le faire sûrement que dans le sens de la flèche; dans l'autre sens, les deux pièces pourraient glisser l'une sur l'autre.

Fig. 130.

Si chaque manchon doit être capable d'entraîner l'autre dans les deux sens, les dents sont limitées seulement par des

plans diamétraux et par des sections droites du cylindre; le profil développé de l'un des deux manchons est alors indiqué par la *fig.* 131.

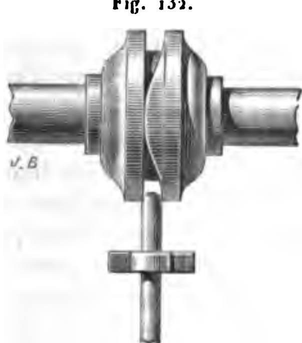

Fig. 131.



Dans l'embrayage à cônes de friction, l'un des manchons porte un tronc de cône creux, à angle au sommet suffisamment aigu, et l'autre un tronc de cône convexe de même angle au sommet, pouvant entrer incomplètement dans la surface creuse. Lorsque ces deux surfaces sont rapprochées et suffisamment serrées l'une contre l'autre par la fourche d'embrayage, elles ne glissent pas et s'entraînent au contraire réciproquement, dans un sens comme dans l'autre. Toutefois, le glissement se produit et la solidarité cesse quand la résistance opposée à l'un des arbres devient accidentellement trop grande. Mais cela peut être parfois avantageux; des manchons dentés se briseraient sous une trop grande pression mutuelle des dents, tandis que les cônes glisseront jusqu'à ce que la résistance anormale ait disparu.

La fourche d'embrayage qui sert à rapprocher les deux

Fig. 132.

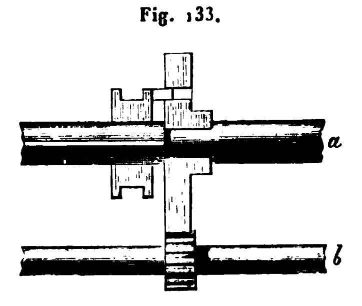


manchons peut également servir à les séparer. Quand on veut, en cas d'accident, avoir la faculté de désembrayer pour ainsi dire instantanément, on fait en sorte que les deux manchons rapprochés laissent encore entre eux, dans une partie exté-

rieure à leurs dents, une espèce de fente à largeur variable (*fig.* 132). Sur la plus grande partie du pourtour, cette largeur excède la longueur des dents, et sur le reste elle diminue progressivement jusqu'à devenir nulle. Sur l'un des manchons, la fente est d'ailleurs limitée par le plan d'une section droite, la réduction de largeur s'opère par une surface inclinée adhérente à l'autre manchon. A l'instant où l'on veut désembrayer, on pousse dans la fente une forte tige de fer maintenue entre des guides fixes; par l'effet même de la rotation, la surface inclinée vient presser sur cet obstacle, ce qui opère la séparation voulue, en un temps moindre que celui d'un tour entier.

(*b*) *Combinaisons d'un manchon d'embrayage avec une ou deux roues dentées folles sur leur axe.* — Une roue dentée folle sur son arbre, ou deux roues dentées voisines portées

Fig. 133.

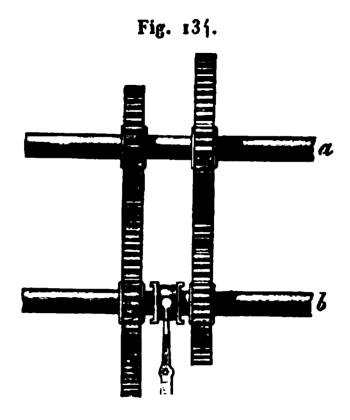


par le même arbre, peuvent être calées quand on le veut, au moyen d'un manchon d'embrayage calé lui-même sur l'arbre, mais susceptible de glisser longitudinalement, de manière à faire entrer ses dents saillantes dans des creux pratiqués sur le corps des roues dentées. S'il y a une seule roue dentée qui puisse devenir solidaire avec le manchon, comme dans la *fig.* 133, on aura ainsi le moyen d'établir ou de faire cesser alternativement la communication du mouvement entre deux arbres *a* et *b*. Le second porte une roue calée qui engrène avec une roue folle sur l'arbre *a*; cette seconde roue tourne indépendamment de son arbre quand le manchon n'établit pas

la solidarité; et, dans le cas contraire, elle l'entraîne ou est entraînée par lui.

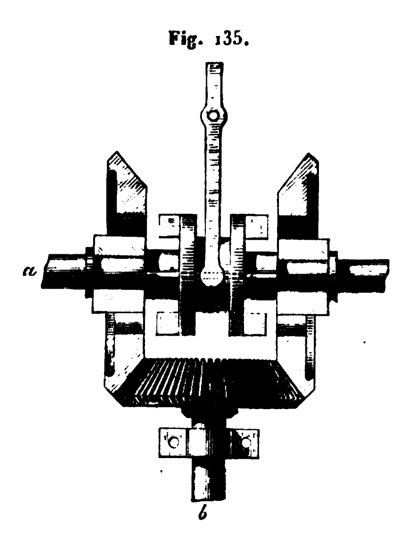
Dans la *fig.* 134 on a supposé sur l'arbre *a* deux roues folles

Fig. 134.



et dans leur intervalle un manchon calé, mais pouvant toujours glisser dans le sens longitudinal. Suivant qu'on le pousse

Fig. 135.

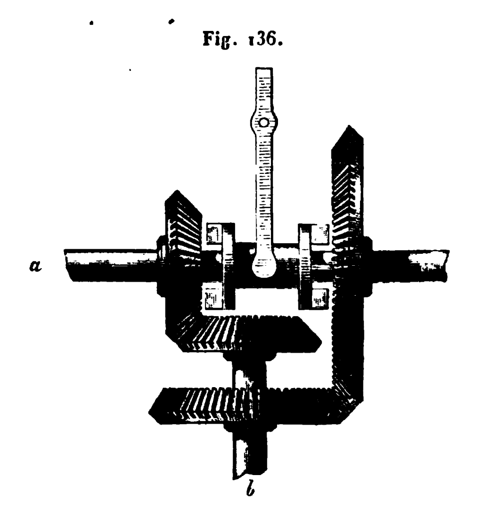


à droite ou à gauche, il cale l'une ou l'autre des deux roues sur l'arbre; dans une position intermédiaire, il les laisse toutes

deux non calées. On voit par conséquent qu'on a la faculté, ou de ne pas établir la communication de mouvement entre les arbres *a* et *b*, ou, si on l'établit, d'avoir deux rapports différents entre les vitesses angulaires, suivant celle des deux roues qu'on aura calée sur l'arbre *a*. D'ailleurs cette combinaison ne change pas le sens de la vitesse angulaire pour l'arbre mené, quand l'arbre conducteur tourne toujours dans le même sens.

Les *fig.* 135 et 136 représentent des combinaisons dans lesquelles, au contraire, l'arbre mené tourne alternativement

Fig. 136.

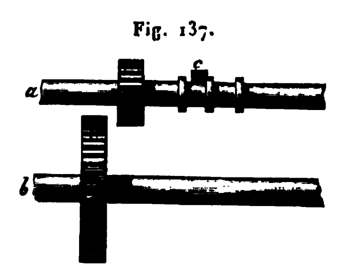


dans les deux sens opposés, suivant la position du manchon, la rotation restant toujours dans le même sens pour la roue menante. Dans l'appareil de la *fig.* 135 la roue conique de l'arbre *b* détermine, pour les deux roues avec lesquelles elle engrène, deux rotations égales entre elles et de sens contraires. L'arbre *a* participe à l'une des deux ou à aucune, d'après la situation du manchon. La même chose a lieu dans l'appareil de la *fig.* 136, sauf cette différence que les deux roues de l'arbre *a* ont des vitesses angulaires inégales, mais toujours de sens opposés.

80. *Embrayage d'une roue dentée par le glissement longitudinal de son axe.* — L'arbre glissant *a* (*fig.* 137) porte deux

gorges dans l'une desquelles s'engage un levier d'arrêt *c*. Dans le cas de la figure, il n'y a pas communication entre les deux arbres *a*, *b*; si l'on veut embrayer, on soulève le levier d'arrêt, on pousse l'arbre *a* vers la gauche et l'on fait retomber

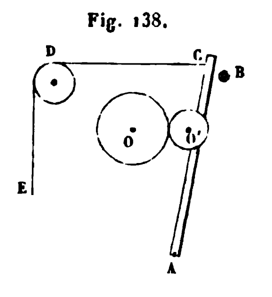
Fig. 137.



le levier d'arrêt dans la seconde gorge, dont l'emplacement est tel que les roues dentées, toutes deux calées sur leurs arbres, se trouvent alors en prise.

81. *Embrayage des rouleaux de friction.* — Quand un rouleau de friction doit mener un autre rouleau ou une tige guidée, on a un moyen bien simple d'établir ou de faire cesser la communication de mouvement; il suffit de faire naître ou cesser la pression mutuelle, moyennant laquelle le glissement est empêché. Pour cela, on se sert d'un levier qu'on manœuvre à la main. Par exemple, dans la *fig.* 138, l'un des rouleaux est mobile autour d'un axe fixe O, l'autre mobile autour d'un axe O', faisant corps avec un levier pouvant tourner autour de l'axe fixe A. On serre les rouleaux l'un contre l'autre en tirant une corde EDC qui passe sur une poulie de renvoi; alors le mouvement de l'arbre O se communique à O'. Quand on veut laisser O' immobile, on abandonne la corde, le levier retombe sur l'arrêt B et le contact des rouleaux cesse.

Fig. 138.



82. *Embrayage de poulies avec courroies sans fin.* — Lorsqu'un arbre est mis en mouvement par une courroie sans

fin passant sur une poulie ou sur un tambour, on peut employer deux moyens pour embrayer ou désembrayer.

Le premier moyen consiste à tendre ou détendre la courroie. Pour y arriver, on peut, par exemple, éloigner ou rapprocher l'arbre de celui qui lui communique le mouvement, en agissant sur un levier. Ou bien encore on exercera, pour embrayer, une pression vers le milieu d'un des brins de la courroie, par l'intermédiaire d'un rouleau dit *tendeur*, placé au bout d'un levier (*fig.* 139). On désembraye en faisant cesser la pression.

Fig. 139.

Le second moyen consiste à faire passer la courroie sur la poulie ou à l'en faire sortir, en poussant la première avec un levier terminé par une fourche, entre les branches de laquelle elle doit passer. Pour que la courroie ne cesse pas d'être tendue quand on la fait sortir de la poulie et qu'on puisse aisément la remettre en place, on la fait alors passer sur une poulie d'égale dimension, placée à côté de la première sur le même arbre, mais folle sur celui-ci, de manière qu'elle tourne sans l'entraîner.

La fourche d'embrayage doit se placer près de l'une des deux poulies soutenant la courroie et sur celui des deux brins qui va s'enrouler; l'expérience montre que cette précaution est nécessaire pour que la courroie ne sorte pas des poulies,

83. *Changement de la vitesse angulaire d'un arbre mu par une courroie sans fin.* — Nous nous bornerons à citer deux exemples par lesquels on peut atteindre ce but. Supposons d'abord les arbres a, a' parallèles (*fig.* 140); l'arbre a porte un certain nombre de poulies calées, trois par exemple, ayant les rayons r_0, r_1, r_2; l'arbre a' porte trois poulies correspondantes, également calées, ayant des rayons r'_0, r'_1, r'_2, tels qu'on ait

$$r_0 + r'_0 = r_1 + r'_1 = r_2 + r'_2.$$

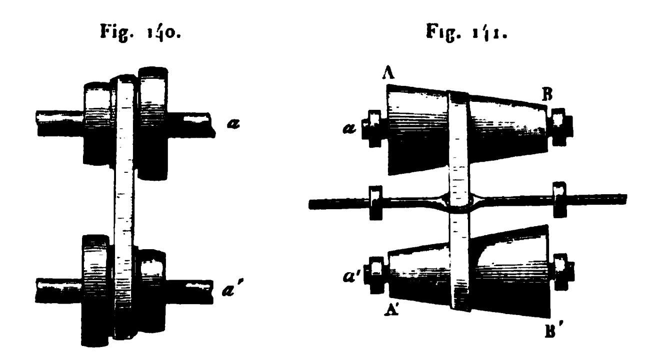
Une courroie sans fin passe sur deux poulies correspondantes, et, au moyen d'une fourche ou autre système équiva-

lent, on peut employer l'une ou l'autre des trois paires de poulies. On obtient ainsi successivement, pour le rapport entre la vitesse angulaire de a et celle de a', les valeurs

$$\frac{r'_0}{r_0}, \quad \frac{r'_1}{r_1}, \quad \frac{r'_2}{r_2}.$$

La précaution qu'on a prise, d'avoir toujours la même somme pour les rayons des deux poulies correspondantes, fait que le développement total de la courroie qui les embrasse ne change pas, et de cette manière la courroie demeure toujours convenablement tendue, pourvu cependant que les arbres soient assez éloignés l'un de l'autre et qu'on puisse regarder les brins comme sensiblement parallèles dans l'intervalle de leurs points de contact avec les poulies. Ce système prend le nom de *poulies alternes*.

Fig. 140. Fig. 141.



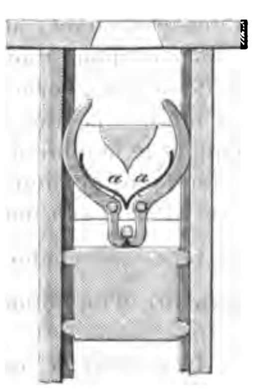
Le système suivant réunit, en quelque sorte, une infinité de poulies alternes. Les arbres parallèles a, a' (*fig.* 141) portent deux troncs de cônes égaux, dont les bases sont dans les mêmes plans, mais qui sont disposés à l'inverse l'un de l'autre. D'après cela les droites AB, A'B' font avec les axes des angles alternes internes égaux et sont par conséquent parallèles, de sorte que la condition ci-dessus posée pour la somme des rayons se trouve remplie. La courroie passe dans un œillet pratiqué sur une tige guidée; en poussant cette tige, on amènera la courroie dans une position quelconque entre les plans

AA′ et BB′. Si l'on nomme r_0 et r_1 les rayons des bases des troncs de cône, le rapport des vitesses angulaires pourra varier entre les limites $\frac{r_0}{r_1}$ et $\frac{r_1}{r_0}$.

84. *Déclics.* — On donne ce nom à certaines combinaisons de pièces solides et de ressorts, au moyen desquels on produit un mouvement ou un arrêt brusque. Nous nous contenterons d'en donner un exemple : c'est celui de la machine connue sous le nom de *sonnette à déclic,* qui sert à enfoncer les pilotis dans le sol.

Un corps pesant, qu'on nomme le *mouton,* assujetti à glisser verticalement entre des guides, est élevé à une certaine hauteur par une corde passant sur une poulie; cette corde est tirée par un moyen quelconque, par exemple en l'enroulant sur un treuil que des hommes font tourner. Quand le mouton arrive à son maximum d'élévation, il s'agit de le faire retomber sans que le treuil revienne en arrière, car ce retour serait dangereux pour la machine et pour les hommes chargés de la manœuvrer. A cet effet, le mouton est suspendu à la corde par une pince à deux branches (*fig.* 142), qui entrent dans une boucle. Deux ressorts *a, a,* pressant sur ces branches, les tiennent ouvertes à leur partie supérieure et empêchent leurs extrémités inférieures de sortir de la boucle. Mais, à l'instant où ce système atteint la hauteur limite où il doit monter, les parties supérieures des branches de la pince entrent dans une ouverture fixe progressivement rétrécie, qui les oblige à se rapprocher malgré l'action des ressorts; les extrémités qui entrent dans la boucle fixée au mouton s'écartent alors et laissent retomber celui-ci. On déroule ensuite la corde du treuil; la pince, arrivant sur le mouton, entre de nouveau dans la boucle, et l'on recommence l'opération autant de fois que cela est nécessaire.

Fig. 142.



§ VII. — Appareils destinés à l'observation d'un mouvement.

85. *Observation directe de certains mouvements particuliers.* — Lorsqu'un point se meut en décrivant une trajectoire connue, on peut, si son mouvement est suffisamment lent, observer directement les époques auxquelles il atteint un certain nombre de repères établis d'avance sur cette trajectoire. Un premier observateur signalera le passage, un autre pourra compter à haute voix les battements d'un pendule, un troisième inscrira les numéros répondant au passage devant chaque repère. On aura ainsi les valeurs corrélatives du temps et de l'espace parcouru; on pourra ensuite chercher une formule analytique donnant le mieux possible l'un en fonction de l'autre, ou bien on construira par points la courbe représentative du mouvement (n° 5), d'où l'on déduira ses propriétés essentielles.

S'il s'agit d'un mouvement rapide, mais qu'on puisse regarder comme uniforme pendant un temps suffisamment long, il est toujours facile d'obtenir sa vitesse moyenne pour un parcours donné. C'est ainsi qu'on connaît la vitesse d'une voiture ou d'un train de chemin de fer, en constatant, au moyen d'une montre à secondes, le temps écoulé pour franchir une distance connue, par exemple celle de deux bornes kilométriques consécutives. De même on mesure la vitesse moyenne de la rotation d'un arbre en comptant le nombre de tours qu'il a faits pendant un temps déterminé, plus ou moins long; si N est ce nombre et T le temps correspondant exprimé en secondes, la vitesse angulaire moyenne sera $\frac{2\pi N}{T}$, conformément à la définition de la vitesse angulaire d'un solide tournant (n° 21).

Pour faire commodément le comptage du nombre N, on emploie un instrument nommé *compteur*, dont voici la disposition générale. L'arbre dont il s'agit de compter les tours est muni d'une pièce saillante ou doigt qui, à chaque révolution, fait avancer d'une seule dent une roue d'engrenage montée sur un arbre parallèle; de même cette roue fait avancer d'une dent, à chaque tour, une seconde roue; celle-ci fait avancer

une troisième, et ainsi de suite. Toutes ces roues ont chacune dix dents; en outre, chaque roue porte sur un cadran, mobile avec elle, les dix chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, également espacés, et, chaque fois que la roue avance d'une division, un de ces chiffres remplace le précédent en face d'une fenêtre qui permet de le lire seul, tous les autres restant couverts par une plaque métallique. Au commencement de l'opération, le chiffre 0 paraît à toutes les fenêtres; pour moins de dix tours de l'arbre principal, la première roue seule a marché, et elle montre un chiffre significatif qui en donne le nombre; pour un nombre compris entre dix et cent, la seconde roue indiquera le nombre des dizaines et la première les unités excédantes; les centaines apparaîtront ensuite à la fenêtre de la troisième roue, les mille à celle de la quatrième, etc. Les fenêtres forment une ligne horizontale, sur laquelle les unités des divers ordres se succèdent avec la même disposition que dans l'écriture ou l'impression; il suffit par conséquent de lire le nombre écrit ou imprimé par les chiffres visibles aux fenêtres pour avoir le nombre de tours demandé, autant du moins qu'il ne dépassera pas le nombre maximum pour lequel le compteur a été construit, c'est-à-dire $10^n - 1$, si n représente le nombre de roues à dix divisions qu'on y a fait entrer.

86. *Appareil de Grosbert et Mattei, pour mesurer la vitesse d'une balle de fusil.* — Cet appareil consiste en un tambour cylindrique horizontal, à fonds de papier, animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de son axe de figure. Une balle lancée parallèlement à cet axe avec une vitesse v met un temps $\frac{l}{v}$ à parcourir la distance l entre les deux fonds. D'un autre côté, si ω désigne la vitesse angulaire du tambour et α l'angle entre les deux rayons aboutissant aux trous laissés par la balle dans les fonds de papier, ce même temps s'exprimera aussi par $\frac{\alpha}{\omega}$; donc

$$\frac{l}{v} = \frac{\alpha}{\omega}, \quad \text{d'où} \quad v = \frac{\omega l}{\alpha}.$$

Si l'on connaît ω et l par des mesures préalables, l'observa-

tion de l'angle α suffira pour calculer la vitesse v du projectile.

87. *Pendule électrobalistique du commandant Martin de Brettes.* — L'appareil comprend : 1° un pendule terminé par une pointe de fer qui se meut dans un plan très voisin d'une feuille de papier recouvrant une feuille de cuivre; 2° deux cibles parallèles, formées chacune d'un fil métallique très fin dessinant un réseau qui sera nécessairement coupé par une balle, dans son passage à travers la cible, de manière à intercepter en même temps un courant d'induction produit dans ce fil.

Au commencement de l'expérience, le pendule est maintenu hors de sa position naturelle d'équilibre par un électro-aimant contre lequel il est appliqué au moyen d'une petite armature en fer doux. Quand le chien du fusil s'abat, on s'arrange pour qu'il interrompe le courant de l'électro-aimant; alors le pendule commence à se mouvoir, et en même temps une étincelle partant de la pointe laisse sur la feuille de papier une trace nettement visible, qui indique son point de départ. La balle traverse ensuite successivement les deux cibles; à son passage, elle brise le fil de la cible traversée, coupe le courant électrique de ce fil et détermine encore une étincelle qui imprime sur la feuille de papier la position contemporaine de la pointe du pendule.

Connaissant le point de départ du pendule, on peut déterminer son mouvement comme nous le verrons plus tard; on peut donc connaître le temps employé par la pointe à parcourir l'intervalle entre les étincelles produites lors de la traversée des deux cibles, c'est-à-dire le temps que la balle a mis pour franchir la distance de la première cible à la seconde, d'où l'on déduit sa vitesse moyenne pendant ce trajet.

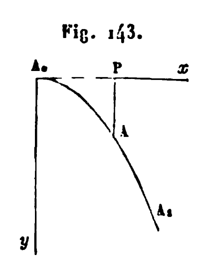
Nous parlerons encore, dans la quatrième Partie du Cours, d'un autre moyen pour mesurer la vitesse des projectiles.

88. *Appareil du général Morin pour observer la chute des corps pesants.* — Nous allons maintenant décrire divers appareils au moyen desquels on fait tracer par le corps mobile une courbe, qui sert ensuite à déterminer les lois du mouvement de ce corps. Le premier dont nous avons à parler a été imaginé

par le général Morin pour établir expérimentalement les lois de la chute verticale des corps pesants.

Le corps abandonné à l'action de la gravité est guidé de manière à prendre une translation verticale, avec aussi peu de frottement que possible. Il porte un crayon ou un pinceau qui, pendant la chute, laisse une trace sur une feuille de papier enroulée autour d'un cylindre vertical. Si ce cylindre était immobile, la pointe du crayon parcourrait la génératrice en regard de laquelle elle se trouve quand la chute commence; mais, comme on a communiqué une rotation uniforme au cylindre, à l'aide d'un mouvement d'horlogerie, les génératrices qui viennent successivement se placer sous la pointe traçante sont à des distances de la génératrice initiale uniformément variables avec le temps. Si donc on développe la feuille de papier sur un plan, à la fin de l'opération, la pointe aura marqué une courbe A_0AA_1 (*fig.* 143) qui, en prenant pour axes des x et des y le développement de la section droite et la génératrice passant par la position initiale A_0, aura ses abscisses $\overline{A_0P}$ proportionnelles au temps et ses ordonnées $\overline{AP}$ égales aux espaces parcourus depuis A_0. Ce sera la courbe représentative du mouvement, conformément à la définition du n° 5.

Fig. 143.



Désignons par

ω la vitesse angulaire du cylindre;

r son rayon, y compris l'épaisseur de la feuille de papier qu'il porte;

x, y les coordonnées du point A;

t le temps employé par la pointe traçante à venir de A_0 en A sur sa trajectoire relative.

L'expérience prouve que la courbe A_0AA_1 est une parabole. Si le corps a été abandonné sans vitesse initiale, le sommet de cette parabole sera en A_0, et son équation pourra se mettre sous la forme

$$y = \frac{x^2}{2p},$$

en nommant p une longueur constante. D'un autre côté, la

vitesse à la surface du papier étant ωr, la longueur $\overline{A_0P} = x$ de papier qui a passé devant la pointe pendant le temps t s'exprime par

$$x = \omega r t.$$

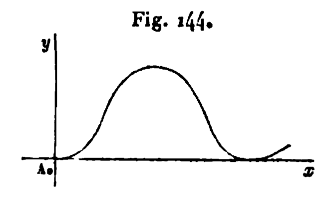
De ces deux équations on déduit celle du mouvement rectiligne du corps

$$y = \frac{\omega^2 r^2}{2p} t^2,$$

ce qui montre que ce mouvement est uniformément varié et que son accélération a pour valeur $\frac{\omega^2 r^2}{p}$ (n° 6).

89. *Appareil à bande de papier d'Eytelwein.* — Cet appareil a été employé par son auteur pour mettre en évidence la loi d'un mouvement rectiligne oscillatoire. Le corps en mouvement est, comme dans l'appareil du général Morin, muni d'un crayon ou d'un pinceau, dont la pointe laisse une trace sur une feuille de papier animée d'un mouvement de translation uniforme, dans une direction perpendiculaire au déplacement à observer. Supposons qu'au commencement de l'expérience la pointe soit en A_0 (*fig.* 144); si le papier était immobile, elle tracerait la ligne droite A_0y qu'elle parcourt; mais, comme le papier se déplace, la distance de la pointe à cette droite varie uniformément avec le temps. Nous prendrons cette droite pour axe des ordonnées et nous compterons les abscisses suivant une perpendiculaire A_0x menée par la position initiale : on voit alors que la courbe tracée sur le papier sera une courbe représentative du mouvement, suivant les conventions du n° 5. Cette courbe fera connaître l'espace parcouru à une époque quelconque; elle permettra aussi d'avoir la vitesse et l'accélération du corps mobile, pourvu qu'on donne, bien entendu, la vitesse v du papier, qui représente l'unité de temps comptée suivant l'axe des abscisses.

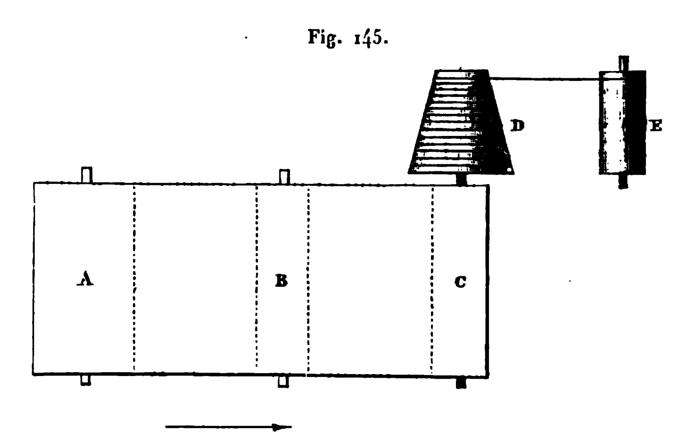
Fig. 144.



Voici maintenant comment on s'y prend pour donner au

papier qui passe sous la pointe traçante une vitesse invariable en grandeur et direction. Le papier, primitivement enroulé sur un cylindre A (*fig.* 145), se déroule pour passer sur un cylindre C, auquel on donne un mouvement de rotation dans le sens de la flèche. Dans l'intervalle, le papier touche simplement un cylindre B qui lui sert d'appui, en regard de la pointe, afin d'obtenir une trace suffisamment nette. Il faut remarquer que le rayon du cylindre C va sans cesse en augmentant, à cause des épaisseurs de papier qui se superposent successivement; si donc la rotation de ce cylindre était uniforme, on n'aurait pas atteint le but, car la vitesse à sa circonférence, égale à celle que possède le papier, varierait proportionnellement au rayon et prendrait, par conséquent, des valeurs croissantes. Il faut donc s'arranger pour faire décroître la vitesse angulaire de C en raison inverse, afin que son produit par le rayon ne change pas. A cet effet, C se prolonge par un tronc de cône D, qu'on nomme *fusée,* faisant corps avec lui et tournant autour de leur axe commun; sur ce tronc de cône est enroulé un fil attaché vers la grande base, faisant un nombre de tours égal à celui des épaisseurs de papier qui doivent se placer sur le cylindre C et venant enfin se détacher vers la petite base, pour s'enrouler sur un cylindre E, auquel un mouvement d'horlogerie donne une rotation uni-

Fig. 145.



forme. Il faut en outre placer ce dernier cylindre assez loin de la fusée, pour que la longueur de cordon comprise entre ses deux points de contact avec E et D reste sensiblement invariable. La vitesse angulaire du système CD est alors en raison inverse du rayon sur lequel s'opère à chaque instant le déroulement du fil, et cette observation conduit sans peine à la solution du problème.

Soient en effet

v la vitesse constante et donnée du fil, égale au produit de la vitesse angulaire du cylindre E par son rayon, si le rayon du fil est supposé négligeable;

V la vitesse du papier;

r le rayon sur lequel se fait le déroulement du fil quittant la fusée quand celle-ci a fait i tours;

r_0 la valeur initiale de r quand la fusée commence à tourner;

R le rayon correspondant à r, sur lequel s'enroule le papier;

R_0 sa valeur initiale répondant à r_0;

n le nombre total de tours quand l'enroulement du papier sur le cylindre C et le déroulement du fil de la fusée sont terminés;

r_1, R_1 les valeurs correspondantes de r et de R.

Puisque n épaisseurs de papier superposées ont produit l'accroissement $R_1 - R_0$ du rayon R, on aura, après i tours seulement,

$$R = R_0 + \frac{i}{n}(R_1 - R_0).$$

Le rayon r augmente de même d'une quantité constante à chaque tour, et l'on a

$$r = r_0 + \frac{i}{n}(r_1 - r).$$

Ces deux équations font d'abord connaître $\frac{R}{r}$ en fonction de $\frac{i}{n}$, quand les rayons extrêmes sont donnés, et l'on en conclurait sans peine la vitesse V du papier, car la vitesse angulaire de la fusée et du cylindre C est $\frac{v}{r}$, d'où résulte

$$V = \frac{vR}{r}.$$

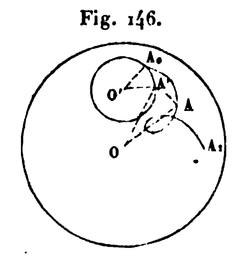
Il suffit donc de s'arranger pour rendre constant le rapport $\frac{R}{r}$; or si, en établissant l'appareil, on choisit les rayons extrêmes R_1, R_0, r_1, r_0, de manière à vérifier l'égalité

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{r_1}{r_0},$$

alors $\frac{R}{r}$ devient indépendant de $\frac{i}{n}$ et conserve la valeur constante $\frac{R_0}{r_0}$; par suite, la vitesse V du papier reste toujours égale au produit de v par ce rapport.

90. *Appareil à disque tournant de Poncelet.* — L'appareil de Poncelet peut servir à déterminer expérimentalement la loi du mouvement de rotation d'un arbre tournant. Il consiste en un plateau circulaire, perpendiculaire et concentrique à l'axe de rotation O (*fig.* 146), et solidaire avec l'arbre, dont il partage le mouvement. Un crayon ou un pinceau reçoit, par l'action d'un mouvement d'horlogerie, une rotation uniforme autour d'un axe parallèle O', et sa pointe tracerait sur le plateau le cercle $O'A_0$, si le plateau restait immobile. Mais, cette immobilité n'existant pas, la pointe tracera une autre courbe telle que A_0AA_1, dont on peut déduire la loi de rotation de l'arbre. Considérons, en effet, l'instant où la pointe occupe la position A' sur sa trajectoire absolue. Tous les points du plateau qui ont pu se trouver sous la pointe, à cet instant, sont sur une circonférence décrite de O comme centre avec $\overline{OA'}$ pour rayon; si donc on décrit cette circonférence, le point A où elle coupe la trajectoire relative A_0AA_1 sera celui que la pointe a marqué sur le plateau lorsqu'elle était réellement en A'. Supposons encore qu'on prenne pour origine du temps l'époque où la pointe était en A_0, point commun à ces trajectoires absolue et relative. Alors le temps t, employé par elle pour aller de A_0 en A', sera indiqué par l'angle $A_0O'A'$, qui lui est proportionnel, puisqu'elle tourne uni-

Fig. 146.



formément autour de O'; pendant ce temps le plateau a dû tourner de l'angle A'OA, puisque le point A s'est substitué au point A' sous la pointe.

En répétant un certain nombre de fois la même construction, on connaîtra les angles décrits par le plateau pour autant de valeurs de t qu'on le voudra.

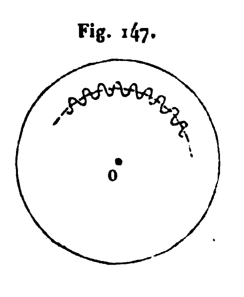
La courbe A_0AA_1 permet aussi de trouver, par une construction géométrique, la vitesse angulaire du plateau à l'époque t. On connaît la vitesse absolue v de la pointe; on connaît aussi sa direction, qui est perpendiculaire à O'A'. Or la vitesse relative v' en A est dirigée suivant la tangente à la courbe, et la vitesse d'entraînement v'' suivant la perpendiculaire à OA; donc si, après avoir ramené ces deux droites à passer en A' par une rotation AOA' autour de O, on décompose la vitesse v suivant leurs deux directions, on aura v' et v'', d'où l'on déduira la vitesse angulaire en prenant le quotient $\frac{v''}{OA}$.

Au lieu de faire tourner uniformément le pinceau ou crayon, on aurait pu tout aussi bien le rendre solidaire avec l'arbre dont on veut étudier la rotation et donner au plateau un mouvement uniforme. L'angle AOA' ferait alors connaître le temps t pendant lequel la pointe aurait tourné de l'angle $A_0O'A'$. La construction géométrique de la vitesse angulaire devrait aussi subir une légère modification, bien facile à voir; on connaîtrait, pour le point A' de l'arbre, la direction des vitesses absolue, relative et d'entraînement, mais ce serait la dernière (au lieu de la première) qui serait donnée en grandeur.

91. *Emploi du diapason pour contrôler l'uniformité d'un mouvement de rotation.* — Les mouvements d'horlogerie ne donnent pas des rotations parfaitement uniformes; pour reconnaître et corriger les erreurs qui en résulteraient, Wertheim a employé le procédé suivant. Un plateau métallique, mû par le mouvement d'horlogerie, est recouvert d'une légère couche de noir de fumée; un diapason exécute ses vibrations dans un plan parallèle au plan du plateau, et une pointe fixée à l'une des branches marque sa trace sur celui-ci. Le diapason est placé de manière que la pointe oscille suivant un rayon

du plateau quand il est en repos; mais, quand il est en mouvement, la pointe trace une courbe ondulée (*fig.* 147). Les maxima et minima des rayons vecteurs de cette courbe, issus du centre O, répondent au commencement et à la fin des oscillations; vu l'isochronisme du mouvement vibratoire, il faut toujours le même temps pour aller d'un maximum au suivant. Ce temps est d'ailleurs très petit, $\frac{1}{250}$ de seconde, par exemple. En mesurant les angles compris entre ces rayons maxima, on connaîtra donc le déplacement angulaire du plateau pendant une série d'intervalles égaux chacun à $\frac{1}{250}$ de seconde; et si l'on admet que le mouvement du plateau puisse être considéré comme uniforme dans un de ces intervalles, on pourra diviser l'angle correspondant en dix parties égales, et avoir les déplacements du plateau pour des temps égaux à $\frac{1}{2500}$ de seconde. La subdivision a même été poussée plus loin par le commandant Schultz, à l'aide d'un micromètre et d'un microscope.

Fig. 147.



Il faut avoir soin de donner au plateau une vitesse suffisante pour que l'angle décrit pendant une vibration du diapason ne descende pas à un degré de petitesse qui en rendrait la mesure trop difficile.

DEUXIÈME PARTIE.

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES SUR LES FORCES ET LEUR MODE D'ACTION.

§ I. — Principes fondamentaux et conséquences immédiates qui s'en déduisent.

92. *Définition d'un point matériel.* — On donne le nom de *point matériel* à un corps de dimensions assez petites pour qu'on puisse regarder comme confondues entre elles toutes les trajectoires des points géométriques renfermés dans son volume. Tous les corps sont décomposables par la pensée en éléments infiniment petits, dont chacun peut être assimilé à un point matériel.

Cette définition semble faire du point matériel un être de raison, car on sait bien que les corps de la nature, quoique décomposables en particules extrêmement ténues, ne sont pas susceptibles de se diviser à l'infini. Mais nous démontrerons plus tard qu'il existe dans un système matériel quelconque un point dont le mouvement est le même que si toute la matière du système y était condensée; en ne considérant que ce point, un corps de dimensions quelconques, fût-ce le Soleil ou un astre encore beaucoup plus volumineux, devient un simple point matériel. La notion du point matériel perdra ainsi ce qu'elle paraît avoir d'un peu abstrait au premier abord. Elle est d'ailleurs fort utile en ce qu'elle permet de simplifier le problème, très compliqué, consistant à trouver

le mouvement d'un corps sous l'action de causes données; après avoir négligé les dimensions du corps et s'être ainsi fait une idée de son déplacement dans son ensemble, on pourra reprendre la question pour voir comment se meuvent individuellement les diverses parties qui composent le tout.

Cette définition étant donnée, nous pouvons aborder l'étude des principes fondamentaux sur lesquels repose la Dynamique, non seulement du point matériel, mais aussi celle des systèmes de points et, par conséquent, des corps absolument quelconques. Ces principes, au nombre de trois, ne sont pas actuellement susceptibles de se démontrer par le raisonnement et ils ne se prêtent guère à une vérification expérimentale immédiate : ce sont des *postulata* admis *a priori*, et que l'on regarde comme suffisamment justifiés par l'exactitude des conséquences plus ou moins éloignées qu'on en déduit par des raisonnements rigoureux.

93. Premier principe : *Inertie de la matière.* — Ce principe consiste en ce qu'un point matériel libre ne peut, de lui-même et sans l'intervention d'une cause extérieure, passer du repos au mouvement ou changer le mouvement qu'il aurait précédemment reçu. Si aucune cause extérieure n'agit sur un point, ce point, supposé d'abord immobile, persiste indéfiniment dans son immobilité; si, par l'effet d'une cause extérieure, il a pris un mouvement et qu'à partir d'un certain instant cette cause cesse d'agir, le mouvement ne se modifiera plus à partir du même instant et conservera toujours la même vitesse en grandeur, direction et sens, de sorte qu'il sera rectiligne et uniforme.

On nomme *force* la cause dont il s'agit, en vertu de laquelle un point matériel libre cesse de persister dans l'immobilité ou dans le mouvement rectiligne et uniforme.

94. *Des forces et de leur mesure.* — L'expérience de tous les jours nous rend familière la notion de diverses forces. Ainsi, nous savons que les corps abandonnés à eux-mêmes au-dessus du sol tombent en obéissant à l'action de leur poids; que l'homme et les animaux développent des forces et communiquent le mouvement par la contraction de leurs muscles;

nous connaissons aussi les forces produites par les courants liquides ou gazeux, par l'électricité, le magnétisme, l'élasticité, etc. Malgré la diversité de leurs origines, toutes ces forces, et celles que l'on pourrait énumérer encore, ne se distinguent pas au point de vue de la Dynamique; nous y voyons toujours, conformément à la définition ci-dessus donnée (n° 93), des causes capables de modifier l'état de repos ou de mouvement d'un point matériel, et émanées de corps extérieurs à ce point.

Une force, quelle que soit sa grandeur, agissant sur un point matériel libre et primitivement immobile, le met toujours en mouvement; mais le contraire peut avoir lieu si le point est soumis à des obstacles, car de ces obstacles peut naître une autre force capable d'annuler l'effet de la première. Par exemple, un point pesant suspendu à un fil de direction verticale, ou placé sur un plan horizontal fixe, ne pèse pas moins et éprouve toujours l'action de son poids; néanmoins il ne tombe pas, parce que le fil ou le plan de support donne naissance à une force égale qui agit contrairement à la première. La force exercée sur le point matériel en vertu de la pesanteur ne le met plus en mouvement, mais elle produit alors un autre effet; elle fait éprouver à l'obstacle ce qu'on nomme, suivant les cas, une *tension* ou une *pression*. Dans les exemples que nous venons de donner, on dit que le fil est tendu et que la table est pressée.

Il y a plusieurs choses à distinguer dans une force, savoir :

1° *Son point d'application;* on nomme ainsi le point matériel sur lequel elle agit;

2° *Sa direction et son sens;* par définition, la direction et le sens d'une force sont les mêmes que ceux du mouvement communiqué par elle à son point d'application, en supposant celui-ci parfaitement libre et en repos initial;

3° *Son intensité;* nous savons bien clairement qu'une force est susceptible d'augmentation et de diminution, que c'est par conséquent une grandeur capable de se traduire en nombres, au moyen d'une unité conventionnelle; la grandeur d'une force se nomme ordinairement *son intensité.*

Nous n'avons pas l'intention de faire connaître ici les meilleurs procédés pratiques pour évaluer les intensités des forces

naturelles; mais il importe de faire concevoir nettement la possibilité de cette évaluation, afin que nous soyons autorisés à soumettre les forces au calcul et à les faire entrer dans les formules analytiques, avec autant de raison que les longueurs, les temps, les vitesses et généralement toutes les quantités capables de s'exprimer par des nombres. Nous raisonnerons d'abord sur les poids des corps, et nous étendrons ensuite ce que nous en aurons dit à des forces d'origine quelconque.

Lorsqu'un corps pesant est empêché par un obstacle de se mettre en mouvement sous l'action de son poids, on a vu que ce poids, ne produisant plus de mouvement, engendre une tension ou pression sur l'obstacle. La tension ou pression produit à son tour sur cet obstacle un effet particulier, souvent insensible à l'œil à cause de sa petitesse, et dans d'autres circonstances parfaitement visible et mesurable avec exactitude : cet effet consiste en une certaine déformation ou altération des dimensions primitives. Supposons, par exemple, que l'obstacle soit une lame d'acier suffisamment flexible, placée horizontalement et encastrée dans un mur par l'une de ses extrémités; un corps suspendu à l'autre bout détermine un abaissement notable de son point d'attache. Cela posé, on peut prendre pour unité le poids d'un corps déterminé (A); tout autre corps qui, attaché à l'extrémité de la lame d'acier, produira le même abaissement, aura également une intensité exprimée par 1, puisqu'il produit le même effet que (A) dans les mêmes circonstances. On se procurerait ainsi autant de poids qu'on le voudrait, ayant l'intensité 1; réunissant ensuite en un seul corps 2, 3, 4, ... de ces poids égaux, on formerait des poids qu'on regarderait, par définition, comme ayant les intensités 2, 3, 4, ... Inversement on peut imaginer le corps (A) subdivisé en un nombre k de parties B ayant des poids égaux, l'égalité se constatant toujours par l'identité de la flexion produite sur la lame d'acier; chacun de ces k poids aurait l'intensité $\frac{1}{k}$. Maintenant, si l'on veut obtenir l'intensité P du poids d'un corps (C) quelconque, après avoir constaté la flexion qu'il produit sur la lame d'acier, on fera naître une flexion identique en suspendant un corps formé de m corps égaux à (A) et de n corps égaux à B, m

et n désignant des nombres entiers obtenus par un tâtonnement expérimental. On aurait alors

$$P = m + \frac{n}{k},$$

et, si k est suffisamment grand, on aura par ce moyen une mesure de P théoriquement aussi exacte qu'on voudra.

L'expérience montre que la flexion produite par un même corps sur une même lame n'est pas la même dans l'air et dans le vide; elle varie aussi avec la latitude du lieu de l'opération et sa hauteur au-dessus du niveau de la mer. Il faut donc, pour donner une définition précise de l'unité de poids, indiquer non seulement le corps dont on prend le poids pour unité, mais aussi l'existence du vide ou d'une atmosphère autour de ce corps et le lieu où il est supposé placé. En France, l'unité ordinairement adoptée est le poids d'un décimètre cube d'eau distillée à la température de 4°,1, dans le vide, à Paris et au niveau de la mer. On sait que ce poids se nomme le *kilogramme*. On emploie également les sous-multiples de dix en dix fois plus petits dont tout le monde connaît les noms. Pour les poids considérables, on fait usage du *quintal métrique,* valant 100^{kg}, ou de la *tonne*, qui en vaut 1000. Les variations du poids d'un même corps, suivant les circonstances dont nous venons de parler, sont d'ailleurs assez petites, et on les néglige ordinairement dans les questions de Mécanique usuelle.

Lorsqu'il s'agit d'une force autre qu'un poids, on peut imaginer qu'on attache son point d'application à l'extrémité d'une lame élastique disposée perpendiculairement à la direction de la force, de manière à empêcher le mouvement de ce point et à produire une certaine déformation. Si l'on détermine ensuite la même déformation au moyen d'un poids attaché au même point et agissant encore dans la direction perpendiculaire à la lame, on regardera ce poids comme possédant la même intensité que la force; celle-ci sera donc, tout aussi bien que le poids, exprimable par un certain nombre entier ou fractionnaire de kilogrammes.

On représente souvent les forces par des lignes droites. On porte, à partir du point d'application de chaque force, une

droite de même direction et de même sens, faisant de plus connaître par sa longueur l'intensité de cette force.

95. Deuxième principe : *Égalité de l'action et de la réaction.* — Toute force agissant sur un point matériel A émane d'un autre point matériel B; en même temps B est soumis à l'action d'une force émanée de A. Ces deux forces sont égales et contraires et dirigées suivant la droite AB; elles constituent ce qu'on appelle *l'action* et la *réaction;* on dit qu'elles sont *attractives* ou *répulsives,* suivant qu'elles tendent à rapprocher les deux points l'un de l'autre ou à les éloigner.

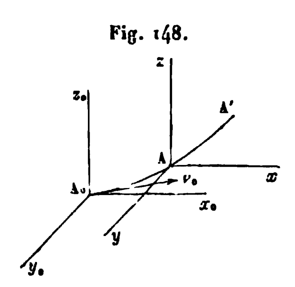
On doit à Newton l'introduction de ce principe dans la Science.

96. Troisième principe : *Loi de l'indépendance et de la composition des effets des forces sur un point matériel libre, pouvant posséder une vitesse antérieurement acquise.* — Ce principe, dont la première notion est due à Galilée, se résume d'abord dans l'énoncé que voici :

Une force agit sur un point matériel libre, en mouvement et déjà soumis à d'autres forces, absolument comme elle agirait si elle était seule et si le point était en repos initial.

Mais il convient d'ajouter à cet énoncé quelques explications et commentaires pour en faire bien comprendre la signification. Supposons d'abord le point matériel libre A parcourant la trajectoire A_0AA' (*fig.* 148), en vertu d'une vitesse initiale v_0 et de l'action de diverses forces, $F, F_1, \ldots, F_{n-1}$; imaginons un système d'axes Ax, Ay, Az se transportant parallèlement à eux-mêmes et dont l'origine coïncide toujours avec le point mobile A. Si l'on fait agir sur le point A une nouvelle force F_n, à partir de la position de A_0, il prendra un mouvement différent et ne restera plus en repos relatif par rapport au système d'axes; mais son mouvement par rapport à ce système, depuis l'époque où il se trouvait en

Fig. 148.



AE_0, sera celui qu'il aurait reçu, si la force F_n eût agi seule sur lui, ce point étant pris sans vitesse initiale, dans la position A_0.

Nous allons maintenant appliquer la proposition ainsi formulée, en imaginant qu'on introduise successivement toutes les forces qui agissent sur le point, ce qui va nous conduire à un énoncé de forme différente, quoique équivalent pour le fond. Afin de faciliter le langage, nous appellerons (M_0) un mouvement rectiligne et uniforme avec la vitesse v_0; (M), (M_1), ..., (M_n) les mouvements que le point matériel, d'abord placé en A_0 sans vitesse initiale, prendrait respectivement, en vertu de chaque force F, F_1, ..., F_n, agissant toute seule, à l'exclusion des autres.

Imaginons que le point possède en A_0 la vitesse v_0 et ne soit soumis à aucune force; alors (n° 93), cette vitesse devra se conserver invariable et le point sera immobile par rapport à un système d'axes (S_0), animé d'un mouvement de translation égal à (M_0). Si nous faisons agir la force F, le point aura le mouvement relatif (M) par rapport à (S_0); son mouvement absolu résulterait donc de la composition du mouvement relatif (M) avec le mouvement d'entraînement (M_0), et par conséquent le point serait immobile dans un système (S) animé d'une translation obtenue en composant (M_0) avec (M). Si nous faisons ensuite agir la force F_1, le mouvement absolu du point résultera pareillement du mouvement relatif (M_1), composé avec le mouvement d'entraînement de (S), ou bien (ce qui revient au même), il sera immobile dans un système (S_1), animé d'un mouvement de translation résultant des mouvements (M_0), (M), (M_1), et ainsi de suite. En introduisant toutes les forces les unes après les autres, jusqu'à F_n inclusivement, on arriverait finalement à voir que le mouvement absolu du point, tel qu'il se produit réellement, résulte de la composition des mouvements (M_0), (M), (M_1), ..., (M_n), les mouvements d'entraînement successifs étant tous considérés comme des translations. Conformément à la théorie des mouvements composés d'un point (n°s 27, 28 et 30), on conclut de là les propositions suivantes :

Si un point libre, animé de la vitesse v_0 à l'époque t_0, est sollicité, à partir de cette époque, par diverses forces, son dé-

placement absolu, pendant un temps quelconque $t - t_0$ commençant à la même époque, sera la résultante ou somme géométrique des déplacements qui auraient lieu : 1° en vertu de la seule vitesse v_0; 2° en vertu de l'action de chaque force appliquée seule, pendant le même intervalle de temps et sans vitesse initiale.

La vitesse du point, à un instant quelconque de l'intervalle $t - t_0$, sera la résultante de v_0 et des vitesses qui auraient lieu à l'instant considéré dans les mouvements produits par l'action isolée des diverses forces depuis l'époque t_0, chacune étant toujours supposée appliquée au point matériel primitivement en repos. Enfin l'accélération totale absolue du point sera la résultante des accélérations totales dans ces mêmes mouvements produits par les forces agissant isolément (1).

Le principe de l'indépendance et de la composition des effets des forces renferme plusieurs conséquences immédiates très importantes, que nous allons développer.

97. *Mouvement produit sur un point matériel libre par une force constante en grandeur, direction et sens.* — Supposons d'abord le point en repos initial, et considérons le temps comme partagé en éléments infiniment petits, $dt_1, dt_2, dt_3, \ldots$ se succédant d'une manière continue et tous d'égale durée. Pendant l'un quelconque de ces éléments, si la force agissait sur le point partant du repos, elle lui communiquerait une certaine vitesse ε, dans sa propre direction et son propre sens, et cette vitesse sera évidemment toujours la même, puisqu'elle est l'effet d'une même cause placée dans des circonstances identiques. La vitesse aura donc la valeur ε à la fin du temps dt_1; pendant le temps dt_2, ε peut être considéré comme vitesse initiale, devant se composer, en vertu du principe précédent, avec la vitesse égale produite par la force, ce qui donne en tout 2ε à l'instant final de dt_2; de même nous aurons, au commencement du temps dt_3, la vitesse initiale 2ε recevant pendant ce temps le même accroissement ε, par l'effet de la force, en vertu du même principe, de sorte que la vitesse sera devenue

(1) Dans la recherche de l'accélération, le mouvement (M_0) n'est pas à considérer, il donnerait une composante nulle.

3ε à la fin de dt_3, et ainsi de suite. La répétition d'un raisonnement identique nous montrerait l'accroissement uniforme de la vitesse avec le temps; le mouvement dont il s'agit est donc uniformément varié. De plus il est rectiligne, parce que la vitesse, dont la valeur initiale est nulle, se forme uniquement par l'addition successive d'un certain nombre de ces accroissements ε, ayant toujours la direction et le sens de la force : il n'y a donc pas variation dans la direction de la vitesse, propriété qui appartient exclusivement au mouvement rectiligne.

Soit j l'accroissement constant de la vitesse dans l'unité de temps, c'est-à-dire l'accélération du mouvement (nº 6); l'origine du temps étant supposée placée au commencement de l'action de la force, on aura pour valeur de la vitesse v, à une époque quelconque,

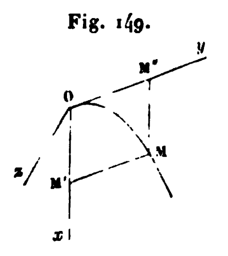
$$v = jt,$$

et par suite, pour l'espace x parcouru pendant le même temps,

$$x = \frac{1}{2} jt^2.$$

Supposons maintenant que le point possède déjà une vitesse initiale v_0 de direction quelconque, à l'instant où commence l'action de la force. Prenons trois axes coordonnés dont l'origine coïncide avec la position initiale du point, l'axe des x avec la direction de la force, l'axe des y avec la vitesse v_0, le troisième axe étant d'ailleurs quelconque (*fig.* 149).

Fig. 149.



Comme on vient de le voir, si la force agissait sur le point primitivement en repos, elle lui ferait parcourir dans le temps t, suivant l'axe des x, une longueur $\overline{OM'} = \frac{1}{2} jt^2$; d'autre part, si la force était supprimée, la vitesse v_0 subsistant seule, le point se déplacerait suivant l'axe des y et parcourrait dans le même temps t une longueur $\overline{OM''} = v_0 t$. D'après le principe de la composition des effets (nº 96), on aura le déplace-

ment absolu du point en prenant la résultante géométrique de ces deux déplacements partiels, c'est-à-dire qu'après le temps t le point aura passé de l'origine O, position initiale, au sommet M du parallélogramme construit sur $\overline{OM'}$ et $\overline{OM''}$. On aura donc ses coordonnées en fonction du temps

$$x = \frac{1}{2} j t^2, \quad y = v_0 t, \quad z = 0.$$

L'élimination de t entre ces équations donne les équations de la trajectoire, savoir

$$x = \frac{j y^2}{2 v_0^2}, \quad z = 0.$$

On voit donc par là :

1° Que la trajectoire est une parabole contenue dans un plan mené par la force et la vitesse initiale;

2° Que l'accélération totale de ce mouvement parabolique est égale à celle du mouvement rectiligne qui aurait lieu sous la seule action de la force, en supprimant la vitesse initiale. L'accélération totale se réduit en effet ici à $\frac{d^2 x}{dt^2} = j$, puisque $\frac{d^2 y}{dt^2}$ et $\frac{d^2 z}{dt^2}$ sont nulles (n° 16).

Dans le cas particulier où les directions de la force et de la vitesse initiale coïncideraient, les longueurs $\frac{1}{2} j t^2$ et $v_0 t$ devant alors être portées suivant une même ligne, Ox par exemple, le mouvement deviendrait rectiligne et uniformément varié; son équation serait

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} j t^2.$$

98. *Proportionnalité des forces aux accélérations qu'elles donnent à un même point matériel.* — Soient F et F' deux forces; leur rapport, quelle que soit sa valeur, pourra toujours s'exprimer, avec telle approximation qu'on voudra, par celui de deux nombres entiers p et q, de sorte que

$$\frac{F}{F'} = \frac{p}{q}.$$

Nommons f la valeur commune des quotients $\frac{\mathrm{F}}{p}$, $\frac{\mathrm{F}'}{q}$ et J, J', γ les accélérations dues respectivement aux actions séparées des forces F, F', f.

Puisque la force f se trouve contenue p fois dans F, cette dernière force peut être considérée comme formée par la réunion de ces p forces f agissant toutes suivant la même droite et dans le même sens : cela résulte de la définition donnée (n° 94) d'un poids multiple d'un autre poids, définition étendue à des forces quelconques. Chaque force f agissant seule sur le point, sans vitesse initiale, lui communiquerait un mouvement rectiligne uniformément varié, ayant l'accélération constante (n° 97); donc, en faisant agir simultanément les p forces f ou la force F, avec ou sans vitesse initiale, on obtiendra un mouvement dont l'accélération j sera toujours la résultante (n° 96) de ces p accélérations γ égales en grandeur, direction et sens, ce qui entraîne l'égalité

$$j = p\gamma.$$

Le même raisonnement, appliqué à la force F', montrerait qu'on a

$$j' = q\gamma;$$

par conséquent

$$\frac{j}{j'} = \frac{p}{q} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}'},$$

ce qui exprime algébriquement la proposition énoncée par le titre même du n° 98.

99. *De la masse d'un point matériel.* — D'après ce qu'on vient de voir (n° 98), le rapport $\frac{\mathrm{F}}{j}$, entre une force et l'accélération qu'elle produit sur un point matériel donné, reste toujours le même quand on fait prendre à la force une série de valeurs différentes, auxquelles correspondent des valeurs, en nombre égal, prises par l'accélération; mais l'expérience montre que ce rapport varie d'un point matériel à un autre. Sa valeur constitue donc pour chaque point une qualité particulière, une sorte de caractère distinctif, fondé sur la manière dont ce point se laisse communiquer une accélération. On lui

donne le nom de *masse;* en le désignant par m, on aura donc par définition

$$\frac{F}{j} = m \quad \text{ou} \quad F = mj.$$

D'après cette équation, on voit que plus la masse est grande, plus est petite l'accélération produite par une force donnée: si F reste constant, m et j varient en raison inverse l'une de l'autre.

Le choix d'une unité de force (n° 94) détermine la valeur numérique de F; celle de j résultera (n° 4) du choix des unités de longueur et de temps. Ces choix étant supposés faits, il n'y a pas lieu d'indiquer une unité de masse.

Pour connaître la masse d'un point, il suffit de constater l'accélération qu'il prend sous l'action d'une force déterminée, son poids par exemple. On sait qu'un corps abandonné dans le vide à l'action de son poids, sans vitesse initiale, prend, au commencement de sa chute, une accélération verticale g, à la rigueur un peu variable avec la latitude et la hauteur du point de départ; à Paris et au niveau de la mer, on a, comme on sait,

$$g = 9^{m}, 8088 \text{ (}^{1}\text{)},$$

le mètre et la seconde étant les unités de longueur et de temps.

Si donc P désigne le poids d'un point matériel, sa masse m s'exprimera numériquement par $\frac{P}{g}$.

Il est à remarquer que le poids d'un même point matériel varie, ainsi que g, suivant le lieu où il se trouve; mais le quotient $\frac{P}{g}$ ou la masse ne varie pas, puisque, suivant la remarque faite plus haut, c'est une des constantes caractéristiques du point dont il s'agit.

---

(1) Nous donnons ici la valeur de g telle qu'elle est communément admise depuis les expériences de Borda sur le pendule. Quelques expériences plus récentes tendraient peut-être à faire augmenter de quelques unités le dernier chiffre décimal; toutefois cela est encore un peu incertain et n'a d'ailleurs aucune importance pour la solution des problèmes pratiques.

En un lieu donné, le poids total d'un corps déterminé reste constant, quelque opération qu'on exécute sur lui. A ce point de vue, on peut dire que le poids d'un corps représente sa quantité de matière, c'est-à-dire de substance indestructible par des causes naturelles, et devant toujours se conserver au milieu de toutes les transformations qu'elles lui font subir. La masse, proportionnelle au poids, représente cette quantité tout aussi bien; et même elle la représente mieux encore, car elle est plus absolue que le poids, et n'a rien qui tienne à la position présentement occupée par le corps.

Remarquons enfin, comme conséquence de l'équation $F = mj$, que le mot *inertie* ne signifie pas résistance absolue de la matière à l'action des forces. Une force si petite qu'elle soit, communique toujours une accélération à un point matériel libre; seulement cette accélération est d'autant plus petite que la force est elle-même petite et la masse plus grande.

100. *Composition des forces appliquées simultanément à un même point matériel.* — Supposons un point matériel libre, de masse m, possédant à l'époque t une vitesse v antérieurement acquise, et sollicitée actuellement par des forces F, F_1, F_2, ..., que nous supposerons constantes en grandeur, direction et sens pendant l'élément de temps dt qui va suivre.

Le point soumis à chacune de ces forces, sans vitesse initiale, prendrait, pendant le temps dt, des déplacements exprimés par

$$\frac{1}{2} j\,dt^2,\quad \frac{1}{2} j_1\,dt^2,\quad \frac{1}{2} j_2\,dt^2,\quad \ldots$$

(n° 97), en nommant j, j_1, j_2, ... les accélérations correspondantes, lesquelles ont pour valeur (99)

$$j = \frac{F}{m},\quad j_1 = \frac{F_1}{m},\quad j_2 = \frac{F_2}{m},\quad \ldots.$$

Son déplacement absolu sera donc la résultante géométrique (n° 96) des déplacements

$$v\,dt,\quad \frac{F\,dt^2}{2m},\quad \frac{F_1\,dt^2}{2m},\quad \frac{F_2\,dt^2}{2m},\quad \ldots.$$

Construisons maintenant la résultante ou somme géomé-

trique des lignes qui représentent les forces F, F_1, F_2, ..., et regardons cette résultante comme représentant une certaine force R; imaginons en outre que les côtés du polygone de composition soient multipliés par $\frac{dt^2}{2m}$; alors la résultante des déplacements

$$\frac{F\,dt^2}{2m}, \quad \frac{F_1\,dt^2}{2m}, \quad \frac{F_2\,dt^2}{2m}, \quad \ldots$$

sera égale en grandeur, direction et sens au déplacement $\frac{R\,dt^2}{2m}$ que produirait la force R en agissant seule, pendant le temps dt, sur le point matériel donné, pris sans vitesse initiale. Donc la substitution de la force R aux forces $F, F_1, F_2, \ldots$ ne change rien au déplacement absolu du point pendant le temps dt. Le même raisonnement s'applique à tous les éléments successifs d'un temps fini quelconque; et par suite, en convenant d'appeler *résultante* des forces appliquées au point matériel, à un instant déterminé, une force obtenue par le moyen qu'on vient d'indiquer pour R, on peut dire que :

Les forces agissant sur un point peuvent, à chaque instant. se remplacer par leur résultante, sans qu'il y ait altération du mouvement; inversement une force peut se remplacer par plusieurs autres dont elle serait la résultante.

Les forces remplacées par une résultante se nomment ordinairement ses *composantes,* et l'opération qui fait trouver la résultante se nomme *composition* des forces.

Lorsque les forces composantes sont au nombre de deux, leur résultante s'obtient en construisant un parallélogramme sur leurs lignes représentatives et prenant la diagonale de ce parallélogramme (n° 11); s'il y a trois composantes, il faut de même construire la diagonale d'un parallélépipède dont elles seraient les trois arêtes concourantes. D'une manière générale, on peut obtenir la résultante d'un nombre quelconque de forces, par la construction d'un polygone formé en portant bout à bout leurs lignes représentatives, comme l'indique la définition ci-dessus donnée.

Nous avons tout d'abord supposé qu'il s'agissait d'un point matériel libre.

Si l'on avait un point gêné dans son mouvement par des obstacles, il est bien évident que ceux-ci ne pourraient produire un certain effet qu'en exerçant sur le point diverses forces, ordinairement inconnues *a priori*. Si l'on tenait compte de ces forces, en les joignant aux forces directement appliquées et censées connues, on aurait par là même tenu compte des obstacles et l'on serait en droit de considérer le point comme libre. Alors on pourra concevoir que l'on compose toutes les forces en une seule résultante; ou bien encore on pourra remplacer cette résultante unique par deux résultantes partielles : 1° celles des forces directement appliquées; 2° celles des forces produites par les obstacles. On verra plus loin, dans deux cas particuliers, comment l'étude du mouvement permet de trouver cette seconde résultante partielle.

§ II. — Définitions et théorèmes concernant diverses quantités qui dépendent des forces appliquées à un même point.

101. *Projection des forces.* — Quand on projette sur un axe ou sur un plan la droite représentative d'une force, la projection obtenue représente une autre force dite *projection* de la première. Le fait de projeter une force constitue donc une opération en vertu de laquelle cette force est transformée absolument comme s'il s'agissait d'une longueur comptée sur une ligne droite.

D'après la définition qui précède et d'après celle de la résultante des forces appliquées à un même point (n° 100), il est clair que les projections de cette résultante et celles des composantes jouissent de toutes les propriétés établies au n° 11 quand il s'agissait de simples lignes. On peut dire notamment que la projection de la résultante sur un axe est la somme algébrique des projections des composantes, ce qui va nous permettre de déterminer par le calcul la résultante répondant à des forces composantes données.

Prenons en effet trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, et nommons :

F l'une des composantes, ayant pour ses trois projections F_x, F_y, F_z;

R la résultante;

R_x, R_y, R_z ses trois projections;

α, β, γ ses angles avec les axes coordonnés.

On aura, en désignant par la lettre Σ une sommation étendue à toutes les forces F,

$$R_x = \Sigma F_x, \quad R_y = \Sigma F_y, \quad R_z = \Sigma F_z;$$
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2},$$

relation qui fait connaître la grandeur de la résultante. Ses cosinus directeurs seront ensuite fournis par les équations

$$R\cos\alpha = R_x = \Sigma F_x,$$
$$R\cos\beta = R_y = \Sigma F_y,$$
$$R\cos\gamma = R_z = \Sigma F_z.$$

102. *Travail des forces.* — Quand un point mobile parcourt un élément ds de sa trajectoire et qu'il est simultanément soumis à l'action d'une force F faisant avec ds un angle α [1], le produit $F ds \cos\alpha$ se nomme *travail élémentaire* de la force F. L'angle α doit s'évaluer en attribuant à chacune des lignes F et ds son sens propre; il est donc bien déterminé et ne peut se confondre avec l'un des trois angles formés par les mêmes lignes indéfiniment prolongées; le travail élémentaire sera positif ou négatif suivant que α sera aigu ou obtus, mais l'expression analytique de ce travail porte en elle-même son signe.

Le travail élémentaire peut être indifféremment considéré comme exprimé par les produits $F \times ds \cos\alpha$ ou bien $ds \times F\cos\alpha$: on peut donc le définir comme *le produit de la force par l'élément de chemin parcouru en projection sur la direction de la force,* ou bien comme *le produit de l'élément de chemin*

---

[1] On dit souvent que le point décrit l'élément ds en vertu de l'action de la force. C'est une locution inexacte; car, si le temps du parcours est dt, la longueur ds résulte de la composition d'une longueur $v\,dt$, due à la vitesse v antérieurement acquise, et d'une autre longueur $\frac{F}{2m}dt^2$ due à l'action de la force. La seconde composante est infiniment petite relativement à la première.

parcouru par la projection de la force sur la tangente à cet élément.

Si l'on considère un déplacement fini du point entre les positions qui répondent aux valeurs s_0 et s_1 de la variable s (celle-ci devant passer de s_0 à s_1), on appelle travail de la force appliquée à ce point l'intégrale définie $\int_{s_0}^{s_1} F\cos\alpha\, ds$, c'est-à-dire la somme des travaux élémentaires, pris chacun avec son signe propre. L'intégration indiquée se fait d'ailleurs immédiatement dans un cas particulier assez fréquent, celui où la force reste constante en grandeur et direction; le travail fini est alors égal, comme le travail élémentaire, au produit de la force par la projection, sur sa direction propre, du chemin résultant que son point d'application a parcouru.

Le travail des forces joue un rôle important dans les théories de la Mécanique rationnelle et aussi dans la Mécanique pratique. Il est bon d'en établir par avance quelques propriétés dont nous aurons souvent à faire usage, et qui se présentent comme des conséquences presque immédiates de sa définition.

THÉORÈME.— *La somme algébrique des travaux de plusieurs forces appliquées au même point est égale au travail de leur résultante.*

En effet, si l'on projette sur la direction de l'élément ds de trajectoire, d'abord la résultante R, et ensuite les composantes $F, F_1, F_2, \ldots$, on aura (n° 101)

$$R\cos(R, ds)$$
$$= F\cos(F, ds) + F_1\cos(F_1 ds) + F_2\cos(F_2, ds) + \ldots;$$

multipliant ensuite les deux membres par ds, on trouve une égalité qui n'est autre chose que l'expression de l'énoncé du théorème, dans le cas d'un déplacement infiniment petit; il suffit ensuite de prendre l'intégrale définie des deux membres pour passer au cas d'un déplacement fini.

THÉORÈME. — *Le travail d'une force, dans un déplacement élémentaire pouvant se décomposer en plusieurs autres déplacements, est égal à la somme algébrique des travaux de la même force dans les déplacements composants.*

Soient $d\sigma$, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, ... divers chemins infiniment petits, dont la résultante géométrique est égale en grandeur, direction et sens à l'élément ds de la trajectoire d'un point matériel. En projetant ces lignes sur la direction de la force F appliquée au point, on aura (n° 11)

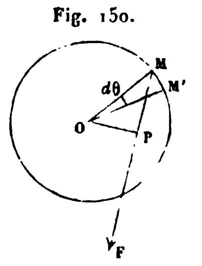
$$ds\cos(F, ds) = d\sigma\cos(F, d\sigma) + d\sigma_1\cos(F, d\sigma_1) + d\sigma_2\cos(F, d\sigma_2) + \ldots,$$

équation dont le produit par F n'est autre chose que la traduction algébrique du théorème.

Expression du travail élémentaire d'une force en coordonnées rectangulaires. — Décomposons la force F en trois composantes X, Y, Z parallèles à des axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et l'arc élémentaire ds en ses trois projections dx, dy, dz sur les mêmes axes. Par application du second théorème précédent, le travail de X se réduit à $X\,dx$, car il est nul dans les deux déplacements perpendiculaires dy et dz; de même les travaux de Y et Z sont respectivement $Y\,dy$ et $Z\,dz$. Appliquant alors le premier théorème, on en conclut que le travail élémentaire de F a pour valeur totale $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$.

Travail d'une force dans la rotation de son point d'application autour d'un axe. — Supposons d'abord la force contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe; soit O (*fig.* 150) la projection de l'axe sur ce plan, que nous prendrons pour plan de la figure, F la force, M son point d'application. Si ce point décrit un élément de chemin $\overline{MM'}$, répondant à une rotation infiniment petite $MOM' = d\theta$ autour de O, le travail élémentaire dT de la force F sera donné par l'équation

Fig. 150.



$$dT = F \times \overline{MM'}\cos FMM' = F \times \overline{OM}\,d\theta \times \cos FMM'.$$

Or l'angle FMM' est égal à celui que le rayon OM, perpendiculaire à MM', fait avec la droite OP, perpendiculaire à F;

donc, en nommant p la longueur $\overline{OP}$, on a

$$\overline{OM}\cos FMM' = \overline{OM}\cos MOP = p,$$

et, par suite,

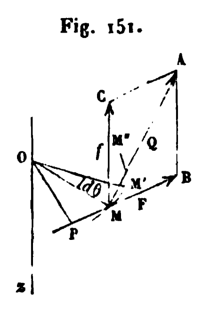
$$dT = Fp\,d\theta.$$

Le produit Fp d'une force F par sa distance à un axe qui lui est perpendiculaire se nomme son *moment par rapport à cet axe;* la distance p se nomme souvent le *bras du levier* de la force, sans doute parce que la considération du moment s'est d'abord présentée dans la théorie du levier. Souvent aussi, oubliant pour ainsi dire l'existence de l'axe, on nomme le produit Fp *moment de la force par rapport au point* O. On peut dire alors que, *si un point matériel tourne autour d'un axe ou d'un centre, une force agissant sur ce point et contenue dans le plan du cercle qu'il décrit fait un travail élémentaire égal au produit de son moment par le déplacement angulaire correspondant.* Afin d'abréger l'énoncé, on sous-entend que le moment est pris par rapport à l'axe ou centre de la rotation. Si l'on veut en outre avoir le travail élémentaire avec son signe, et non pas seulement en valeur absolue, voici ce qu'on pourra faire. Un mobile étant censé parcourir la ligne MF dans le sens de la force, un rayon vecteur joignant ce mobile avec O tournerait dans un sens déterminé, qu'on regarde comme étant celui dans lequel la force F tend à faire tourner son point d'application autour de l'axe. On adopte alors un sens conventionnel quelconque pour les rotations positives, et l'on donne le signe + ou le signe — aux deux facteurs Fp et $d\theta$, suivant que la rotation qui répond à chacun d'eux est dans ce sens ou dans le sens opposé. Il est facile en effet de reconnaître que, si la force F tend à faire tourner dans un sens identique à celui de la rotation $d\theta$, le travail élémentaire est positif, et qu'il deviendrait négatif si ces deux rotations étaient de sens contraires.

Admettons maintenant que la force ait une direction quelconque et qu'elle ne soit plus contenue dans le plan du cercle sur lequel se déplace son point d'application, c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire à l'axe. Soient Oz l'axe (*fig.* 151), Q la force agissant sur le point M, MM'M'' la trajectoire de ce

point, contenue dans un plan perpendiculaire à Oz mené par le point O. De l'extrémité A de la force Q ([1]) abaissons la perpendiculaire AB sur le plan OMM″, laquelle détermine la projection $\overline{MB} = F$ de Q sur ce plan, et achevons le rectangle MBAC dont MB et $\overline{BA}$ sont deux côtés. La force Q peut être regardée comme la résultante (n° 100) de la force F et d'une autre force $f = \overline{MC}$, toutes deux appliquées au même point M; donc (n° 102) le travail de Q est la somme des travaux de F et de f, et comme le travail de f est nul, parce que cette force est perpendiculaire au déplacement, il en résulte que les travaux de Q et de F sont égaux.

Fig. 151.



Par suite, si l'on abaisse de O la perpendiculaire $\overline{OP} = p$ sur la force F, le travail $d\mathrm{T}$ de R dans le déplacement élémentaire $\overline{MM'}$ s'exprimera, d'après ce qu'on vient de voir, par la formule

$$\mathrm{F}p\,d\theta = d\mathrm{T}.$$

Le produit $\mathrm{F}p$ de la projection d'une force Q sur un plan perpendiculaire à l'axe Oz par la distance de cette projection à l'axe (laquelle n'est autre chose que la plus courte distance entre l'axe et la force) se nomme *moment de la force* Q *par rapport à l'axe* Oz; cette définition convient également dans le cas où la force et l'axe ont leurs directions perpendiculaires, et se confond alors avec celle qu'on a donnée spécialement pour ce cas. Nous dirons donc d'une manière générale que :

Le travail élémentaire d'une force, dans la rotation de son point d'application autour d'un axe, est égal au produit du moment de la force relativement à l'axe par l'élément d'angle décrit en vertu de la rotation.

On doit d'ailleurs se conformer à la règle énoncée plus

([1]) Rigoureusement, il faudrait dire : l'extrémité A de la ligne MA représentative de la force Q. La distinction entre une force et la ligne qui la représente doit toujours rester présente à l'esprit, mais il convient de la supprimer dans le langage, qui autrement deviendrait lourd et pénible.

haut, pour le signe à donner à chacun des deux facteurs Fp et $d\theta$.

Le moment d'une force par rapport à un axe est une quantité complexe qui, comme le travail, se présente souvent dans les théories de la Mécanique, et il est bon d'en faire connaître dès maintenant quelques propriétés essentielles.

103. *Moments des forces.* — Plusieurs forces Q, Q_1, Q_2, ... étant appliquées à un même point M, supposons qu'on en cherche la résultante R (n° 100), et qu'on l'applique également en M; imaginons ensuite que le point M ait un mouvement, réel ou fictif, de rotation autour d'un axe Oz. Soient

$d\theta$ l'angle infiniment petit décrit par M dans sa rotation, à partir de sa position actuelle;

r, p, p_1, p_2, ... les plus courtes distances respectives (nommées aussi *bras de levier*) entre l'axe et les forces R, Q, Q_1, Q_2, ...;

H la projection de R sur un plan perpendiculaire à Oz, et F, F_1, F_2, ... celles de Q, Q_1, Q_2, ... sur un plan de même direction.

Par application du premier et du dernier théorème établis (n° 102) au sujet du travail des forces, on peut écrire l'équation

$$Hr\,d\theta = Fp\,d\theta + F_1p_1\,d\theta + F_2p_2\,d\theta + \ldots,$$

en ayant égard, bien entendu, à la règle concernant le signe de chaque moment (n° 102). Cette équation, après la suppression du facteur commun $d\theta$, se traduit par l'énoncé suivant :

Théorème. — *Le moment, relativement à un axe, de la résultante de plusieurs forces appliquées au même point est égal à la somme algébrique des moments des composantes.*

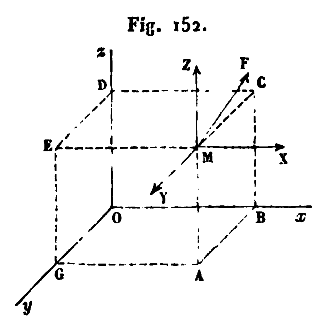
Cette propriété est connue sous le nom de *théorème de Varignon* [1]. Il est clair d'ailleurs qu'elle existerait toujours si l'on imaginait que les forces fussent remplacées par d'autres quantités de nature différente, comme des longueurs, des vitesses, etc., pourvu que ces quantités substituées aux forces

[1] Géomètre français, de Caen, né en 1654, mort en 1722.

fussent représentées par les mêmes droites, en position, grandeur, direction et sens.

Moments d'une force relativement à trois axes coordonnés rectangulaires. — Soient Ox, Oy, Oz (*fig.* 152) trois axes rectangulaires relativement auxquels on veut avoir les moments d'une force F, appliquée au point M défini par les coordonnées x, y, z. D'après le théorème de Varignon nous pouvons remplacer la force par ses trois composantes X, Y, Z parallèles aux axes, égales (n° 101) à ses projections sur ces mêmes axes; le moment de F par rapport à l'un quelconque de ces axes sera la somme des moments de X, Y, Z. Pour en faire le calcul, construisons d'abord un parallélépipède MABCDEGO formé par les plans coordonnés et par trois plans parallèles menés en M. Les arêtes de ce parallélépipède seront respectivement égales aux coordonnées x, y, z. Cela posé, on voit : 1° que le moment de X relativement à Ox est nul, parce que X a une projection nulle sur le plan perpendiculaire yOz; 2° que le moment de Z est Zy, parce que la force Z se projette en vraie grandeur suivant le prolongement de la droite GE, à la distance $\overline{OG} = y$ du point O; 3° que le moment de Y est égal, en vertu d'un raisonnement tout semblable, à $-Yz$, avec un signe contraire à celui du précédent, parce qu'il tend à faire tourner en sens contraire. Il résulte de là que le moment L de la force F relativement à Ox est donné par la formule

Fig. 152.



$$L = Zy - Yz.$$

On trouverait de même, et l'on peut obtenir par une permutation tournante, les moments par rapport aux deux autres axes; en les désignant par N et Q, on aurait

$$N = Xz - Zx,$$
$$Q = Yx - Xy,$$

Remarques. — On a vu dans le cours de la démonstration précédente que le moment d'une force est nul relativement à un axe parallèle, parce que la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe devient elle-même nulle. En général, le moment est égal au produit de cette projection par la plus courte distance entre l'axe et la force; il peut donc s'annuler aussi quand le second facteur devient nul, c'est-à-dire quand la force rencontre l'axe. On renferme les deux cas dans un même énoncé en disant que le moment s'annule quand la force et l'axe sont dans un même plan. La réciproque est également vraie, car un moment ne peut devenir nul sans qu'un des facteurs le soit, ce qui exige le parallélisme de la force à l'axe ou la réduction de leur moindre distance à zéro.

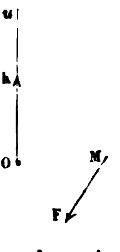
En choisissant le sens positif du moment autour de chaque axe, on a pris :

Pour l'axe Ox, celui d'une rotation de Oy vers Oz;
Pour l'axe Oy, celui d'une rotation de Oz vers Ox;
Pour l'axe Oz, celui d'une rotation de Ox vers Oy.

On constate dans chaque ligne que cela revient à suivre l'ordre x, y, z, x, y, en commençant successivement à la première, la seconde et la troisième lettre. Conformément à un usage presque toujours suivi, les axes de la *fig.* 152 se trouvent d'ailleurs tellement disposés que les sens ainsi définis sont ceux des rotations positives (ou des aiguilles d'une montre) pour un observateur ayant les pieds en O et la tête successivement en x, y, z.

Axe représentatif d'un moment. — Le moment d'une force F étant supposé pris relativement à un axe Ou (*fig.* 153), on porte, à partir du point O choisi arbitrairement sur l'axe, la longueur $\overline{OK}$, qui, mesurée à une échelle déterminée, serait numériquement égale à la valeur absolue du moment. De plus on porte cette longueur dans un sens tel, qu'un observateur ayant les pieds en O et la tête en K verrait la projection de la force sur un plan perpendiculaire à l'axe, tendant à faire tourner son point d'application dans le sens des ai-

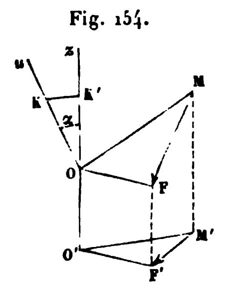
Fig. 153.



guilles d'une montre. La droite finie $\overline{OK}$ est dite *axe représentatif* du moment; elle définit les seules choses qu'on ait généralement intérêt à connaître au sujet du moment représenté, savoir : la droite par rapport à laquelle il est pris, sa grandeur et son sens. Mais on ne pourrait pas, évidemment, retrouver la force elle-même.

Relation entre les moments d'une même force, par rapport à tous les axes issus d'un même point. — Soient F la force (*fig.* 154), M son point d'application, Oz l'un quelconque des axes issus de l'origine commune O, Ou celui de ces axes dont la direction est perpendiculaire au plan OMF, mené par le point O et par la force. Le moment de celle-ci relativement à Ou (ou relativement au point O) sera le produit de la longueur $\overline{MF}$ par la perpendiculaire abaissée de O sur cette ligne; il sera donc égal au double de l'aire du triangle OMF. On peut le représenter, conformément à la convention ci-dessus indiquée, par une longueur $\overline{OK}$ portée sur Ou dans un sens convenable. Pour avoir maintenant le moment de F par rapport à Oz, on projettera le triangle OMF sur un plan perpendiculaire à cet axe, en O'M'F', et l'on prendra le produit de la force projetée $\overline{M'F'}$ par sa distance à O', ce qui donnera le double de l'aire O'M'F'. Représentons encore ce moment par un axe $\overline{OK'}$ porté sur Oz dans le sens voulu, et nommons K et K' les moments relativement à Ou et à Oz, ou les longueurs $\overline{OK}$ et $\overline{OK'}$; α l'angle des deux plans OMF, O'M'F', égal à l'angle KOK' de leurs normales. Il résulte de ce qu'on vient de dire qu'on a l'égalité

Fig. 154.



$$K' = 2.O'M'F' = 2.OMF\cos\alpha = K\cos\alpha.$$

Ainsi donc le moment relativement à Oz se déduit du moment relativement à l'axe particulier Ou en multipliant ce dernier par le cosinus de l'angle des deux axes; ou bien encore l'axe représentatif $\overline{OK'}$ du premier moment est la projection orthogonale de l'axe $\overline{OK}$ du second.

Une longueur étant toujours plus grande que sa projection

orthogonale, on voit que, parmi toutes les droites issues de O, celle pour laquelle le moment devient maximum est la perpendiculaire au plan mené par ce point et par la force.

Lorsque l'axe Oz varie en prenant toutes les positions possibles autour de O, le point K' se déplace en restant toujours sur la sphère décrite sur $\overline{OK}$ comme diamètre. Cette sphère est tangente au plan MOF perpendiculaire en O à son diamètre $\overline{OK}$; par suite, les rayons vecteurs $\overline{OK'}$ contenus dans ce plan sont nuls, et il en est de même, comme on le savait déjà, des moments par rapport aux axes correspondants, puisque ces axes sont tous dans un même plan avec la force F.

CHAPITRE DEUXIÈME.

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA DYNAMIQUE D'UN POINT MATÉRIEL; APPLICATIONS.

§ I. — Théorèmes généraux.

104. *Équations différentielles du mouvement d'un point libre.* — Lorsqu'un point matériel libre M, de masse m, subit l'action d'une force unique F constante en grandeur, direction et sens, on a vu (n° 97) que l'accélération totale j de son mouvement conserve toujours la direction et le sens de la force, et que sa grandeur, également constante, est liée à celle de la force par la relation (n° 99)

$$F = mj.$$

Cette relation resterait également vraie pour chaque élément infiniment petit dt du temps, si la force devenait variable en grandeur, direction et sens, pourvu seulement qu'elle le fût d'une manière continue; car on pourrait alors la regarder comme constante pendant l'intervalle dt, avec une erreur qui décroît indéfiniment avec dt jusqu'à la limite o. De plus on peut toujours en faire usage, quel que soit le nombre des forces appliquées au point, puisqu'on peut ramener ces forces à une seule, capable de produire le même effet (n° 100).

Imaginons maintenant qu'on projette le point mobile, son accélération et la force sur un plan ou sur un axe, la projection étant faite dans le premier cas parallèlement à une droite fixe, dans le second parallèlement à un plan directeur; la projection aura pour résultat, à chaque instant, d'altérer les deux longueurs j et F dans le même rapport, de

sorte que, en nommant j' et F' leurs projections, on aura encore

$$F' = mj'. \tag{1}$$

Or on sait (nº 16) que j' est l'accélération totale du mouvement projeté; si donc on attribue au point M', projection de M, la même masse qu'à celui-ci, on pourra dire, en vertu de la dernière équation, que la force capable de produire l'accélération du point projeté est égale à la projection de la force de l'espace.

Après avoir pris trois axes coordonnés quelconques Ox, Oy, Oz, on peut appliquer la même équation $F' = mj'$ aux trois mouvements projetés sur ces axes, la projection étant faite sur chacun d'eux parallèlement au plan des deux autres. On a vu (nº 16) que les trois projections de l'accélération totale j sont alors

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Si donc on nomme X, Y, Z les projections correspondantes de la force F, dans les mêmes conditions, c'est-à-dire les arêtes d'un parallélépipède construit sur F comme diagonale avec ses faces parallèles aux plans coordonnés, ou encore les composantes de F suivant les trois axes, on trouvera de cette manière

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{2}$$

Ce sont des équations différentielles du second ordre qu'on nomme équations du mouvement, et qui déterminent x, y, z en fonction du temps t, si X, Y, Z sont des fonctions connues de t, x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, et si l'on suppose en outre données les valeurs initiales des six dernières quantités, afin de pouvoir éliminer les constantes arbitraires introduites par l'intégration. On se trouve là en face d'un problème analytique sur lequel s'est exercé le génie des grands géomètres, comme Lagrange, Poisson, Jacobi et d'autres encore. Mais l'exposition de leurs remarquables travaux ne rentre pas dans le programme de ce cours. Nous allons seulement établir des théo-

rèmes généraux qui sont la conséquence des équations (1) et (2); nous résoudrons ensuite diverses questions particulières.

Remarque. — Si le point n'est pas libre, mais gêné dans son mouvement par des obstacles, on peut toujours, conformément à ce qu'on a déjà dit au n° 100, remplacer ces obstacles par une force appliquée au point, et considérer ensuite celui-ci comme libre. Moyennant cette précaution, les équations (1) et (2) restent applicables; la force produite par les obstacles y figurera comme une inconnue auxiliaire.

105. *Décomposition de la force en force tangentielle et force centripète.* — On peut appliquer encore l'équation (1) du n° 104 au cas où la projection serait faite orthogonalement: 1° sur la tangente à la trajectoire, au point M où se trouve actuellement le point mobile, 2° sur la direction de la normale principale et du rayon de courbure de la trajectoire en M. Nommons

v la vitesse en ce point et ρ le rayon de courbure;

α l'angle que la force F et l'accélération totale j font avec la vitesse v, chaque ligne étant prise avec le sens qui lui appartient;

β l'angle analogue fait par F et j avec le rayon ρ, le sens de celui-ci étant supposé aller de M vers le centre de courbure correspondant.

Les projections ou composantes de F suivant ces deux directions se nomment *force tangentielle* et *force centripète*: elles ont les valeurs respectives $F\cos\alpha$, $F\cos\beta$. Comme on sait, d'autre part, que celles de j sont $\frac{dv}{dt}$ et $\frac{v^2}{\rho}$ (n° 15), on aura

$$(3) \qquad m\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha, \qquad \frac{mv^2}{\rho} = F\cos\beta.$$

On voit par ces équations que, si la force tangentielle s'anéantissait, et si par conséquent la force F restait toujours normale à la trajectoire, la vitesse resterait constante, puisque $\frac{dv}{dt}$ s'annulerait. Si, au contraire, on supposait la force F ré-

duite à sa composante tangentielle, $\frac{1}{\rho}$ deviendrait constamment nul et le point devrait se mouvoir en ligne droite. On se rend ainsi compte du rôle spécial de chacune des deux composantes; l'une produit les variations de la vitesse et l'autre la courbure de la trajectoire.

106. *Théorème sur l'accroissement de la quantité de mouvement ou de la quantité de mouvement projetée.* — Appliquons la première des équations (3) ou la première des équations (2), en ayant soin de prendre en compte les forces produites par les obstacles, s'il y en a, de manière à rendre ces équations toujours exactes; multiplions ensuite les deux membres par dt et intégrons entre deux époques t_0 et t. Il viendra, en désignant par l'indice o les quantités correspondant à t_0,

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{F} \cos\alpha\, dt, \tag{4}$$

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right) - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{X}\, dt. \tag{5}$$

Le produit mv de la masse d'un point matériel par sa vitesse reçoit le nom de *quantité de mouvement* du point. Si la masse est multipliée par la projection $\frac{dx}{dt}$ de la vitesse sur un axe Ox (n° 13), on a ce qu'on appelle la *quantité de mouvement projetée sur ce même axe* ([1]).

D'un autre côté, on nomme *impulsion élémentaire* d'une force le produit de la force par l'élément du temps; l'intégrale définie de l'impulsion élémentaire est dite impulsion *totale;* enfin on dit que l'impulsion est projetée sur un axe, quand on prend, à chaque instant, la projection de la force sur cet axe, au lieu de la force elle-même. Ces définitions per-

---

([1]) On peut aussi considérer $m\frac{dx}{dt}$ comme la projection de la droite mv portée suivant la direction et le sens de v; cela revient au même, puisque une droite et sa projection varient dans le même rapport si la direction et le sens de la droite ne varient pas.

mettent de traduire les équations (4) et (5) par les énoncés que voici :

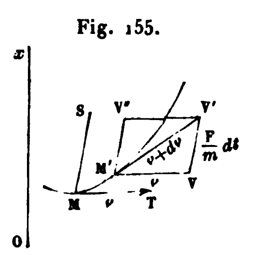
L'accroissement de la quantité de mouvement d'un point matériel est égal à l'impulsion totale de la force tangentielle dans le même intervalle de temps.

L'accroissement de la quantité de mouvement projetée sur un axe est égal à l'impulsion totale de la force résultante en projection sur le même axe et pendant le même intervalle de temps.

Remarque. — S'il y a plusieurs forces F appliquées au point, on peut d'abord concevoir qu'elles soient remplacées par leur résultante (n° 100), dont la projection sur la tangente et sur l'axe Ox donnerait les quantités $F\cos\alpha$ et X, à introduire dans les équations (4) et (5). D'un autre côté, la projection de la résultante sur une droite quelconque serait égale à la somme des projections des composantes (n° 101), et, au moyen d'une intégration, cette propriété s'étend immédiatement aux impulsions totales projetées. Si donc on veut se dispenser de rechercher la résultante, il suffit de remplacer $F\cos\alpha$ et X par la somme algébrique des termes analogues provenant des diverses forces F.

107. *Théorème sur l'accroissement du moment de la quantité de mouvement par rapport à un axe.* — Soient M et M' (*fig.* 155) les positions d'un point mobile sur sa trajectoire, aux époques infiniment voisines t et $t+dt$; v et $v+dv$ les vitesses correspondantes, respectivement dirigées suivant les tangentes en M et M'. Construisons un parallélogramme M'VV'V" ayant pour diagonale $\overline{M'V'} = v+dv$ et l'un de ses côtés $\overline{M'V}$ égal et parallèle à v; l'autre côté $\overline{M'V''}$, déterminé par cela même, est ce qu'on a nommé *vitesse acquise élémentaire* (n° 15); c'est donc le produit de dt par l'accélération totale j, ou par $\frac{F}{m}$ (n° 99), en nommant m la masse du point

Fig. 155.



et F la résultante des forces qui le sollicitent en M. Cela posé, appliquons le théorème de Varignon (n° 103) à la résultante $\overline{M'V'}$ et à ses composantes $\overline{M'V}$, $\overline{M'V''}$, après avoir multiplié les trois lignes par le facteur commun m; si nous désignons généralement par la notation $\mathfrak{M}_x$ un moment pris relativement à un axe quelconque Ox, il viendra

$$\mathfrak{M}_x m(v + dv) = \mathfrak{M}_x m\,\overline{M'V} + \mathfrak{M}_x m\,\overline{M'V''}$$

ou bien

$$\mathfrak{M}_x m(v + dv) - \mathfrak{M}_x m\,\overline{M'V} = \mathfrak{M}_x m\,M'V''.$$

Or le point M′ est à une distance infiniment petite du deuxième ordre de la tangente MT suivant laquelle est dirigée la vitesse v en M; le terme $\mathfrak{M}_x m\,\overline{M'V}$ peut donc se remplacer, aux infiniment petits du deuxième ordre près, par $\mathfrak{M}_x mv$. la ligne mv étant alors portée sur MT, de sorte que le premier membre de l'équation exprime la différentielle de $\mathfrak{M}_x mv$,

D'ailleurs, puisque le point M′ coïncide à la limite avec M, le second membre exprime $\mathfrak{M}_x F\,dt$, toujours en se bornant à négliger les infiniment petits d'ordre supérieur au premier. Donc on écrira

$$d\mathfrak{M}_x mv = \mathfrak{M}_x F\,dt,$$

ou, si l'on intègre entre deux limites t_0 et t,

$$(6) \qquad \mathfrak{M}_x mv - \mathfrak{M}_x mv_0 = \int_{t_0}^{t} \mathfrak{M}_x F\,dt.$$

De là résulte ce théorème :

L'accroissement du moment de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport à un axe quelconque est égal à l'intégrale, dans le même intervalle de temps, du moment de l'impulsion élémentaire produite par la résultante des forces appliquées au point.

Les moments qui figurent dans cet énoncé, c'est-à-dire ceux de mv, mv_0, $F\,dt$ doivent, bien entendu, se calculer d'après la définition du n° 103, comme si ces quantités complexes étaient des forces dirigées suivant les mêmes lignes que v, v_0, F.

On peut d'ailleurs faire ici une remarque toute pareille à celle qui termine le n° 106 : si le point est soumis à plusieurs forces, on prouverait de même que le moment $\mathfrak{M}_x F$ doit être remplacé par la somme algébrique des moments de ces forces relativement au même axe.

108. *Théorème des aires.* — Il peut arriver, comme cas particulier, que la force résultante F appliquée au point matériel soit constamment dans un même plan avec l'axe Ox, ou, ce qui revient au même, que la somme des moments de ses composantes relativement à cet axe soit toujours nulle (n° 103). Dans ce cas, l'équation (6) devient

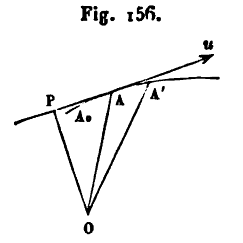
$$\mathfrak{M}_x mv - \mathfrak{M}_x mv_0 = 0,$$

et, par conséquent, le moment de la quantité de mouvement par rapport à Ox reste invariable.

Si la résultante F passait toujours par un point fixe, son moment serait nul et le moment de la quantité de mouvement serait constant, par rapport à tout axe issu de ce point.

Cette propriété reçoit une interprétation géométrique remarquable. Prenons pour plan de la *fig.* 156 un plan perpendiculaire à l'axe Ox par rapport auquel on suppose que le moment de F est toujours nul. Soit O la rencontre de l'axe avec ce plan, sur lequel la trajectoire du point mobile se projettera suivant une courbe A_0AA'. Si A et A' sont les projections du point aux époques t et $t+dt$, et qu'on nomme u la projection de sa vitesse v dans l'espace, on sait (n° 13) que u sera la vitesse du point projection, de sorte qu'elle sera dirigée suivant la tangente en A et aura pour valeur $\frac{\overline{AA'}}{dt}$.

Fig. 156.



Donc le moment de mv par rapport à l'axe O s'exprimera par $m\frac{\overline{AA'}}{dt}\overline{OP}$, la longueur $\overline{OP}$ étant celle de la perpendiculaire abaissée de O sur la tangente en A ou sur l'élément AA' prolongé. D'autre part, en nommant σ l'aire A_0OA décrite en projection sur le plan de la figure, depuis l'époque t_0, par un

rayon vecteur joignant le point M de l'espace à un point de l'axe, on a

$$d\sigma = \text{AOA}' = \frac{1}{2}\,\overline{\text{AA}'}\,.\,\overline{\text{OP}}$$

et par conséquent, puisque le moment de mv ne varie pas,

$$2m\frac{d\sigma}{dt} = \text{const.},$$

ou, plus simplement, en supprimant le facteur constant $2m$,

$$\frac{d\sigma}{dt} = \text{const.}$$

On voit par là que l'aire σ s'accroît de quantités égales en temps égaux. Si l'on désigne par C l'aire décrite dans l'unité de temps, on aurait pour l'aire $\text{A}_0\text{OA} = \sigma$, décrite dans le temps $t - t_0$,

$$\sigma = \text{C}(t - t_0).$$

La constante C pourrait se calculer immédiatement, si l'on donnait la vitesse initiale v_0 en grandeur, direction et sens. On en déduirait son moment et on l'égalerait à $2\frac{d\sigma}{dt}$ ou à 2C.

En résumé, nous énoncerons donc le théorème ci-après :

Lorsque la résultante des forces appliquées à un point matériel en mouvement a son moment constamment nul relativement à un axe fixe, l'aire décrite en projection sur un plan perpendiculaire à l'axe par un rayon vecteur joignant cet axe au point mobile varie proportionnellement au temps.

Si la force résultante passe constamment par un point fixe, l'aire décrite en projection sur un plan quelconque, par un rayon vecteur, joignant le point fixe au point matériel en mouvement, varie proportionnellement au temps.

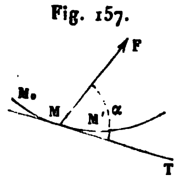
On démontrerait sans difficulté les réciproques des propositions du n° 108. En effet, lorsque le moment de la quantité de mouvement par rapport à un axe (et par conséquent aussi la dérivée de l'aire décrite en projection sur un plan perpendiculaire) n'éprouve aucune variation avec le temps, il s'ensuit que le moment de la résultante F est nul relativement à

cet axe, ou bien que la force F et l'axe sont dans un même plan (n° 103). Et si la même chose a lieu pour tous les axes issus d'un certain point O, il sera nécessaire en conséquence que la force F passe aussi par ce point.

Nous reviendrons ultérieurement sur le cas d'un point sollicité par une force centrale (passant par un point fixe), et nous établirons alors que la trajectoire est plane.

109. *Théorème des forces vives.* — La force résultante F, appliquée à un point matériel M de masse m et faisant l'angle α avec le prolongement MT de l'élément $ds = \overline{MM'}$ de la trajectoire (*fig.* 157), a pour projection orthogonale sur MT la force $F\cos\alpha$, qui s'exprime aussi (n° 105) par $m\frac{dv}{dt}$, en désignant par v la vitesse en M; on a donc

Fig. 157.



$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\alpha.$$

Cette équation, multipliée membre à membre par

$$v\,dt = ds,$$

donne

$$mv\,dv = F\cos\alpha\,ds,$$

ou bien, en intégrant entre deux positions M_0 et M et désignant par l'indice o les quantités qui se rapportent à M_0,

$$(7) \qquad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} F\cos\alpha\,ds.$$

On reconnaît dans le second membre le travail total de la force F dans le parcours M_0M (n° 102); on pourrait, si l'on voulait, le remplacer par la somme algébrique des travaux des forces dont F est la résultante; et si, parmi ces forces, il s'en trouvait qui fussent toujours normales à la trajectoire, on pourrait les laisser de côté, car leur travail serait toujours nul. D'autre part, le produit mv^2 de la masse par le carré de

la vitesse est désigné par le nom de *force vive* [1]. L'équation (7) signifie alors que :

L'accroissement de la demi-force vive d'un point matériel entre deux positions quelconques est égal au travail total de la force résultante à laquelle il a été soumis dans le parcours intermédiaire.

Le travail élémentaire $F\cos\alpha\, ds$ pouvant (n° 102) se mettre sous la forme $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, l'équation (7) se transforme aussi en

$$\frac{1}{2}mv^2 = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) + \text{const.}, \tag{8}$$

en désignant par X, Y, Z les composantes de la force F, prises parallèlement à trois axes coordonnés rectangulaires, et par x, y, z les coordonnées du point mobile, dans le même système d'axes.

Il y a lieu de signaler comme particulièrement intéressant le cas où les trois composantes X, Y, Z seraient respectivement les dérivées partielles, par rapport à x, y, z, d'une fonction $\varphi(x, y, z)$ de ces trois variables. On aurait alors

$$\begin{aligned} mv\,dv &= F\cos\alpha\, ds = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \\ &= \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = d\varphi(x, y, z), \end{aligned}$$

et, par suite, l'intégration entre deux limites donnerait

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \varphi(x, y, z) - \varphi(x_0, y_0, z_0).$$

La fonction φ se nomme la *fonction des forces* ou *potentiel* [du latin *potentia*, force, puissance] [2]. L'accroissement de la demi-force vive est donc égal à celui du potentiel.

---

[1] Ce nom et celui de *quantité de mouvement* donné au produit mv sont assez difficiles à justifier et n'ont par eux-mêmes aucune signification bien nette. On les conserve, néanmoins, parce qu'ils sont consacrés par un long usage et adoptés par presque tous les auteurs français qui ont écrit sur la Mécanique.

[2] Le mot *potentiel* rappelle qu'il s'agit d'une fonction dépendant de la force F. On remarquera aussi que le potentiel exprime un travail, et qu'en

Considérons toutes les surfaces représentées par l'équation générale

$$\varphi(x, y, z) = C,$$

dans laquelle on attribuera successivement toutes les valeurs possibles à la constante C. Ces surfaces, qu'on nomme *surfaces de niveau,* jouissent de propriétés assez remarquables.

1° L'accroissement de la demi-force vive, quand le point M passe d'une surface de niveau déterminée à une autre également déterminée, reste toujours le même, quels que soient le point de départ sur la première surface et le point d'arrivée sur la seconde, et quelque chemin que le mobile ait suivi dans l'intervalle. On a, en effet :

Pour la première surface......... $\varphi = C_0$,
Pour la seconde................. $\varphi = C$;

donc

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = C - C_0 = \text{const.}$$

Si le point M, dans son mouvement, traverse plusieurs fois la même surface, il aura toujours la même vitesse en la traversant, car $\frac{1}{2}mv^2$ aura la valeur constante $\frac{1}{2}mv_0^2 + C - C_0$.

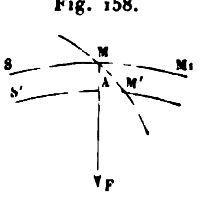
2° La force F qui agit sur le point M, dans l'une quelconque de ses positions, est normale à la surface de niveau qui passe par ce point. Les cosinus directeurs de F sont en effet proportionnels (n° 101) à X, Y, Z, et par conséquent aux dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$, qui elles-mêmes sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale à la surface $\varphi(x, y, z) = C$; il y a donc bien coïncidence entre les deux directions.

3° Soient M et M′ (*fig.* 158) deux positions infiniment voisines du point mobile, S et S′ les surfaces de niveau passant par ces points, F la force appliquée en M normalement à S d'après ce qu'on vient de voir, ε la longueur de la portion $\overline{MA}$

Mécanique le mot *puissance* s'emploie souvent dans le sens de travail. Ainsi l'on dit : la puissance d'une chute d'eau, la puissance d'une machine à vapeur, etc., pour indiquer le travail qu'on peut en retirer dans un temps donné.

de normale comprise entre les deux surfaces. Le travail élémentaire de F pendant le parcours $\overline{MM'}$ est égal à $F\varepsilon$, produit de F par la projection $\varepsilon = \overline{MA}$ de $\overline{MM'}$ sur la direction de la force. Or ce travail doit rester constant et égal à la différence des valeurs de C pour les deux surfaces, quel que soit le point de départ M sur la surface S; donc le produit $F\varepsilon$ ne varie pas dans toute l'étendue de S. La force correspondant à ses divers points M, M_1, ... est donc en raison inverse de la distance normale ε. Si l'on admet que la force ne puisse jamais devenir nulle ou infinie, les distances ε seront toujours d'un seul et même ordre de grandeur, et les deux surfaces S, S' ne pourront ni s'éloigner indéfiniment, ni se couper.

Fig. 158.



Nous citerons quelques exemples particuliers dans lesquels les forces dérivent d'un potentiel et où, par conséquent, le travail élémentaire est la différentielle exacte d'une fonction des coordonnées x, y, z considérées comme variables indépendantes. Il y a d'abord le cas d'un point sollicité par une force F constante en grandeur, direction et sens, son poids par exemple. Si l'axe des z est pris parallèle à F et de même sens, on aura

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = F,$$

et, par suite, $\varphi(x, y, z)$ se réduit à $\int F\,dz = Fz$; les surfaces de niveau ont alors pour équation générale

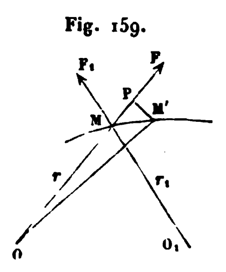
$$z = \text{const.},$$

ce qui donne une série de plans parallèles entre eux et perpendiculaires à la direction de la force. Dans le cas de la pesanteur, on obtiendrait une série de plans horizontaux. On pourrait supposer, au lieu d'une valeur constante de F, une valeur variable avec z; le potentiel $\int F\,dz$ s'exprimerait encore par une fonction de la seule variable z et les surfaces de niveau ne seraient pas changées.

Le second exemple se rapporte au cas où le point maté-

riel M subit l'action de forces F, F_1, ..., émanées respectivement de centres fixes O, O_1, ... (*fig.* 159), chacune d'elles étant supposée fonction de la distance du point M au centre correspondant. Nommons r, r_1, ... ces distances. Quand M parcourt l'élément $\overline{MM'}$ de sa trajectoire, le travail de la force F agissant suivant OM sera le produit de F par la projection $\overline{MP}$ de $\overline{MM'}$ sur OM, ou $F(\overline{OP}-\overline{OM})$, ou encore $F\,dr$, car $\overline{OP}$ ne diffère de $\overline{OM'}=r+dr$ que par des infiniment petits du second ordre. Cette expression $F\,dr$ suppose d'ailleurs la force F répulsive, c'est-à-dire tendant à éloigner M de O, comme l'indique la figure; pour que la même expression convienne à tous les cas, il faut avoir soin de considérer comme négatives les forces d'attraction. Cette convention étant adoptée, le travail de F_1 s'exprimerait de même par $F_1\,dr_1$, et celui des autres forces d'une manière semblable. Le travail élémentaire de la résultante serait donc (n° 102) donné par la formule générale

Fig. 159.



$$F\,dr + F_1\,dr_1 + \ldots.$$

Or cette expression est intégrable, puisqu'on suppose F fonction de r, F_1 fonction de r_1, etc.; en supposant l'intégration effectuée et posant

$$\int F\,dr = f(r), \quad \int F_1\,dr_1 = f_1(r_1), \quad \ldots,$$

on trouverait pour valeur du potentiel

$$f(r) + f_1(r_1) + \ldots.$$

De là on déduirait la fonction $\varphi(x, y, z)$ ci-dessus considérée, en remplaçant r, r_1, ... par leurs valeurs en fonction des coordonnées x, y, z du point mobile et des coordonnées a, b, c, a_1, b_1, c_1, ... des centres fixes O, O_1, ..., savoir

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$
$$r_1 = \sqrt{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Dans le cas où il n'y aurait qu'un seul centre fixe O, le potentiel se réduirait au terme $f(r)$ et les surfaces de niveau seraient définies par l'équation

$$f(r) = \text{const.},$$

qu'on peut imaginer résolue par rapport à r et mise sous la forme

$$r = \text{const.}$$

Ces surfaces seraient donc des sphères concentriques, ayant le point O pour centre commun.

110. *Mouvement d'un point sur une courbe donnée.* — On suppose un point matériel M soumis d'abord à des forces connues, réductibles à une résultante F également connue (n° 100), et gêné en outre dans son mouvement par des obstacles qui rendent obligatoire pour lui le parcours d'une trajectoire donnée, définie par deux équations

$$(9) \qquad f(x, y, z) = 0, \quad f_1(x, y, z) = 0.$$

Ainsi qu'on l'a déjà fait observer au n° 100, les obstacles n'ont d'effet sur le point M qu'en faisant naître d'autres forces appliquées à ce point; soit F_1 leur résultante, *a priori* inconnue. On peut se proposer de déterminer les coordonnées x, y, z de M en fonction du temps t, ce qui fera connaître le mouvement de ce point; puis de déterminer, pour chaque position de M, l'inconnue auxiliaire F_1.

Désignons par

X, Y, Z les composantes de F suivant les trois axes coordonnés, qui seront supposés rectangulaires;

X_1, Y_1, Z_1 les composantes de F_1 suivant les mêmes axes.

Le point pouvant être considéré comme libre dès qu'on tient compte de la force F_1, on aura les équations différentielles de son mouvement (n° 104)

$$(10) \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} = X + X_1, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + Y_1, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + Z_1.$$

Ces trois équations, jointes aux deux équations (9), n'en donnent encore que cinq, pour trouver les six inconnues x, y, z,

X_1, Y_1, Z_1 en fonction du temps t; le problème est par conséquent indéterminé, tant qu'on ne fait aucune hypothèse particulière sur la nature des obstacles par lesquels le point se trouve assujetti à se mouvoir sur la trajectoire donnée.

Pour faire disparaître l'indétermination, nous supposerons les obstacles tellement disposés, que la force F_1 produite par eux reste constamment normale à la trajectoire obligée du point, ce qui entraîne comme conséquence que son travail est toujours nul. Cela revient à dire que les obstacles sont de nature à fournir toujours une force normale suffisante pour empêcher le point de s'écarter de la courbe, mais qu'ils ne contrarient en rien l'action d'une force tangentielle, tendant à produire un déplacement suivant la courbe même. C'est ce qui aurait lieu, par exemple, dans le cas idéal d'un point mobile sans frottement suivant une rainure, ou d'un point attaché à un fil parfaitement flexible et inextensible qui le maintiendrait, dans un plan, à une distance constante d'un centre fixe, et exercerait, suivant sa direction propre, une force normale à un cercle sur lequel se mouvrait le point [1]. La nullité du travail de F_1 dans chaque parcours élémentaire se traduit alors par l'équation

$$(11) \qquad X_1\,dx + Y_1\,dy + Z_1\,dz = 0,$$

ce qui complète le nombre des équations nécessaires à la détermination des inconnues.

Sans insister plus longuement sur cette solution analytique de la question, voyons ce que pourrait donner ici l'application des théorèmes généraux concernant les quantités de mouvement et les forces vives. La force F_1 étant, suivant l'hypothèse ci-dessus indiquée, normale à la courbe, sa projection sur la tangente est nulle; si donc on nomme α l'angle entre la direction de la force donnée F et celle de la vitesse v ou de l'élément ds de courbe, on aura $F\cos\alpha$ pour expression de la force tangentielle (n° 105), et par suite les équations (4) du n° 106

[1] En raison de la flexibilité que nous lui attribuons, le fil ne peut agir que s'il est tendu, c'est-à-dire s'il empêche le point de s'éloigner du centre; nous admettons encore que cette condition se trouve effectivement remplie.

et (7) du n° 109 auront lieu comme si la force F agissait seule sur le point supposé libre. Donc

$$mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} \mathrm{F} \cos\alpha \, dt,$$

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{s_0}^{s} \mathrm{F} \cos\alpha \, ds.$$

La première de ces équations ferait connaître v en fonction du temps, si $\mathrm{F}\cos\alpha$ était donné en fonction de cette variable; si, comme il arrive plus ordinairement, la force était définie au moyen de la position du point, la seconde équation déterminerait v en fonction de l'arc s de trajectoire. Dans les deux cas, on a vu en Cinématique (n° 9) comment ensuite on achèverait la détermination du mouvement que prend le point sur la courbe.

Nous remarquerons encore que, dans le cas où la force F dériverait d'un potentiel et où, par conséquent, il existerait des surfaces de niveau correspondantes (n° 109), les accroissements pris par la demi-force vive ou par le carré de la vitesse, en passant d'une de ces surfaces à une autre, pourraient se calculer d'après la variation du potentiel, absolument comme si le point était libre et les obstacles supprimés. Cela est évident, puisque les forces n'interviennent ici que par leur travail, et que les obstacles sont censés ne donner lieu qu'à des forces dont le travail est en somme constamment nul.

Maintenant, le mouvement étant supposé déterminé, la recherche de l'inconnue auxiliaire F_1 n'offre pas de difficulté; elle se ferait au besoin par les équations (10), qui fourniraient les trois projections X_1, Y_1, Z_1 de cette force. Mais la marche suivante donne un résultat plus facile à saisir. Remarquons que la résultante des forces F et F_1 peut se décomposer (n° 105) en une force tangentielle $m\dfrac{dv}{dt}$ et une force centripète $\dfrac{mv^2}{\rho}$; si donc nous imaginons la force F décomposée aussi en deux forces, l'une $\mathrm{F}\cos\alpha$ suivant la tangente, l'autre $\mathrm{F}\sin\alpha$ suivant une normale à la courbe, dans un même plan

avec F et F cos α, nous aurons, en employant une notation indiquée au n° 11 pour indiquer une composition ou sommation géométrique,

$$\overline{\mathrm{F}\cos\alpha} + \overline{\mathrm{F}\sin\alpha} + \overline{\mathrm{F}_1} = \overline{\frac{mv^2}{\rho}} + m\,\overline{\frac{dv}{dt}},$$

ou bien, eu égard à $m\frac{dv}{dt} = \mathrm{F}\cos\alpha$,

$$\overline{\mathrm{F}\sin\alpha} + \overline{\mathrm{F}_1} = \frac{mv^2}{\rho}.$$

La dernière égalité peut se mettre sous les deux formes

$$\overline{\mathrm{F}_1} = \overline{\frac{mv^2}{\rho}} - \overline{\mathrm{F}\sin\alpha},$$

$$-\overline{\mathrm{F}_1} = \overline{\mathrm{F}\sin\alpha} - \overline{\frac{mv^2}{\rho}},$$

dont chacune conduit à un énoncé particulier. Il suit de la première que *la force inconnue subie par le point, de la part des obstacles, est la résultante de la force centripète et de la composante normale de la force connue, prise en sens contraire.*

Pour énoncer le résultat trouvé sous la seconde forme, nous supposerons que le point reçoit la force F_1 d'un seul obstacle solide ou assimilable à un solide, comme serait, par exemple, une rainure ou un fil qui resterait toujours tendu. Alors, en vertu du principe de la réaction égale à l'action (n° 95), il exerce sur cet obstacle la pression ou tension égale et contraire $-\mathrm{F}_1$ [1], que nous appellerons, pour abréger, la

---

[1] On remarquera qu'il y a là une certaine extension donnée au principe général du n° 95; car ce principe, tel qu'il a été d'abord énoncé, ne concernait que les actions réciproques de deux points, tandis qu'on l'applique ici aux actions qui s'exercent entre un point et un corps de dimensions arbitraires.

On rencontrera, dans la suite du cours, d'autres extensions analogues du même principe. Il ne serait pas possible, quant à présent, de les indiquer bien clairement et encore moins de les démontrer; mais la possibilité existe pour celui qui, étant en possession complète des théories de la Dynamique voudraient revenir *a posteriori* sur ces postulatum secondaires.

pression du point sur la courbe. D'un autre côté, la force $-\frac{mv^2}{\rho}$, égale et contraire à la force centripète supportée par le point, se nomme la *force centrifuge*. Toujours en vertu du même principe (n° 95), on peut dire que c'est la composante normale de la réaction exercée par le point mobile M sur un corps duquel proviendrait la force ou action capable de lui donner son accélération totale. Moyennant ces définitions, la dernière équation démontre que *la pression du point sur la courbe est la résultante de la force centrifuge et de la composante normale de la force connue.*

111. *Mouvement d'un point sur une surface donnée.* — Nous admettrons encore ici, comme dans le cas précédent, que les obstacles par lesquels le point matériel M est assujetti à se mouvoir sur la surface donnée, sont incapables de produire sur lui une force résultante F_1 qui ne serait pas normale à la surface. Dès lors, en supposant la surface représentée, dans un système d'axes coordonnés rectangulaires, par l'équation $f(x, y, z) = 0$, les composantes de F_1 suivant ces axes seront proportionnelles aux dérivées partielles $\frac{df}{dx}$, $\frac{df}{dy}$, $\frac{df}{dz}$, puis qu'elles doivent l'être aux cosinus directeurs de la normale. Elles peuvent donc s'exprimer par

$$\lambda\frac{df}{dx},\quad \lambda\frac{df}{dy},\quad \lambda\frac{df}{dz},$$

en désignant par λ un facteur convenablement choisi; par suite, si X, Y, Z désignent les composantes de la force F, résultante des forces données qui agissent sur le point, on aura les équations différentielles (n° 104)

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\frac{df}{dx},\\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\frac{df}{dy},\\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\frac{df}{dz},\end{aligned}\right.$$

qui, conjointement avec l'équation de la surface, suffisent

pour déterminer les inconnues x, y, z, λ en fonction du temps t.

On peut remarquer que le théorème des forces vives s'applique au mouvement du point sans qu'on ait besoin de rechercher la valeur de la force inconnue F_1, car cette force est constamment normale au chemin parcouru et fait un travail nul, de manière qu'elle ne doit pas figurer dans l'équation fournie par le théorème dont il s'agit. Dans le cas où il y aurait, pour la force donnée F, un potentiel et des surfaces de niveau (n° 109), les accroissements de la demi-force vive ou du carré de la vitesse devraient encore se calculer comme si F agissait seule sur un point libre.

Le cas où le point ne subirait que la force F_1, c'est-à-dire se déplacerait sur la surface en vertu d'une vitesse initiale, et sous la seule action d'une force produite par les obstacles dans une direction constamment normale à la surface, donne lieu à une observation intéressante. La force F_1 a ses deux composantes tangentielle et centripète (n° 105) contenues dans le plan osculateur de la trajectoire; donc elle s'y trouve elle-même contenue; donc le plan osculateur de la trajectoire passe constamment par la normale à la surface sur laquelle le point est assujetti à se mouvoir, propriété qui caractérise les courbes géodésiques de cette surface. On sait que ces courbes sont les plus courtes qu'on puisse décrire sur la surface, entre deux quelconques de ses points, pris pour points invariables de départ et d'arrivée. Ajoutons encore que la trajectoire serait parcourue avec une vitesse constante, puisqu'il n'y aurait pas de force tangentielle.

Cette considération ramène le problème général des courbes géodésiques à un problème de Mécanique, ce qui a pu, dans certains cas particuliers, mettre sur la voie de solutions élégantes, auxquelles on n'aurait probablement pas songé sans cela.

112. *Cas particulier de l'équilibre.* — Un point en repos absolu, ou seulement animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, doit avoir son accélération totale nulle. Si donc on réduit à une seule force F (n° 100) toutes les forces exercées sur lui, y compris celles qui proviennent des obstacles à son

mouvement (s'il y en a), il faudra que cette force F soit nulle, car autrement il se produirait une accélération totale, exprimée (n° 104) par le rapport de F à la masse du point. Réciproquement, la nullité de F entraîne celle de l'accélération totale; de sorte que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point reste en repos, ou persévère dans un mouvement rectiligne et uniforme, consiste en ce que la résultante de toutes les forces agissant sur lui soit nulle.

On dit alors que ces forces se font équilibre.

Lorsque la résultante est nulle, il en est de même de ses composantes X, Y, Z suivant trois axes coordonnés Ox, Oy, Oz, et réciproquement; on a donc les trois conditions d'équilibre nécessaires et suffisantes

$$(13) \qquad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

La composante suivant chacun des axes étant la projection de la résultante sur cet axe, faite parallèlement au plan des deux autres, on la trouverait en cherchant (n° 101) la somme des projections des composantes de toutes les forces qui sollicitent le point.

Les équations (13) conviennent aussi bien au cas d'un point gêné par des obstacles qu'au cas d'un point libre, pourvu qu'on tienne compte de toutes les forces exercées sur lui. Mais si l'on veut distinguer ces forces en deux groupes séparés, l'un renfermant les forces données et l'autre les forces *a priori* inconnues qui proviennent des obstacles, F et F_1 étant les résultantes partielles des deux groupes, la condition d'avoir une résultante totale nulle se traduira en disant que F et F_1 doivent être égales et de sens contraires. On voit par conséquent que la résultante donnée F doit remplir (à part ce qui concerne le sens) toutes les conditions imposées à F_1 par la nature des obstacles. Ainsi, par exemple, quand il s'agit d'un point assujetti à rester sur une courbe ou sur une surface (n°s 110 et 111), on suppose que les obstacles font naître sur le point une force F_1 d'intensité et de sens indéterminés, mais dirigée normalement à la courbe ou à la surface; alors la force F doit avoir cette même direction. Cela suffira d'ailleurs, pourvu que le point n'ait pas de vitesse initiale; les obstacles rendent impossible le mouvement que F donnerait au point s'ils étaient

supprimés, et par suite ils font naître la force F_1 égale et contraire à F.

Il peut arriver parfois qu'un obstacle n'agisse que dans un sens déterminé. Ainsi une table horizontale empêche un poids de tomber, mais elle ne l'empêcherait pas d'être soulevé par une force suffisante; un fil inextensible attaché à un centre fixe oblige un point à se mouvoir sur une sphère si ce point tend à s'éloigner du centre; mais, s'il tendait à se rapprocher, le fil se courberait et cesserait d'agir. Dans ce cas, après avoir déterminé la force F_1, il faut encore voir si elle a bien le sens voulu pour que l'obstacle soit capable de la faire naître; et cela est nécessaire aussi bien quand on recherche le mouvement du point que lorsqu'on veut s'assurer de son équilibre.

113. *Extension des théorèmes généraux aux mouvements relatifs d'un point matériel.* — On a vu (n° 30) que l'accélération relative j d'un point M par rapport à un système mobile de comparaison est la résultante de son accélération j dans le mouvement absolu, de l'accélération d'entraînement j_e prise en sens contraire, et d'une troisième accélération $-j_c$ dite accélération centrifuge composée. Nous exprimons cela par l'équation

$$\overline{j_r} = \overline{j} - \overline{j_e} - \overline{j_c},$$

les traits supérieurs étant destinés à rappeler qu'il s'agit, non d'une addition ordinaire, mais d'une composition ou sommation géométrique de diverses lignes. La même relation subsiste quand on multiplie toutes les lignes par un même facteur m égal à la masse du point matériel M sans changer leurs directions et leurs sens, car cela revient à construire le polygone de composition avec une échelle différente. On a donc aussi

$$\overline{mj_r} = \overline{mj} - \overline{mj_e} - \overline{mj_c}.$$

La force mj_r est celle qui serait capable de donner au point supposé libre un mouvement absolu identique à son mouvement relatif (n° 104); donc, si on la considère comme agissant réellement, on sera en droit de traiter le mouvement relatif comme un mouvement absolu et de lui appliquer tous les théorèmes généraux ci-dessus démontrés (n°s 105 à 109).

Or mj est la résultante des forces qui produisent le mouvement absolu, en comprenant parmi ces forces les actions dues aux obstacles s'il y en a ; mj_e est une force capable de donner au point l'accélération d'entraînement, et pour cette raison elle se nomme *force d'entraînement;* enfin $-mj_c$ prend le nom de *force centrifuge composée.* On peut donc énoncer ce théorème :

Les théorèmes généraux de la Dynamique d'un point matériel s'appliquent à son mouvement par rapport à des axes mobiles comme à son mouvement absolu, pourvu qu'on joigne à la résultante de toutes les forces agissant réellement sur ce point deux forces fictives ou apparentes, qui sont : 1° une force égale et contraire à la force d'entraînement; 2° la force centrifuge composée.

Nous ajouterons encore les remarques suivantes, à l'égard des forces fictives.

La force centrifuge composée contient le facteur j_c, qui lui-même a un facteur égal à la vitesse angulaire ω du système de comparaison. Si ce système possède un mouvement de translation, sa vitesse angulaire ω s'annule et il en est de même pour la seconde force apparente. La première force s'annule également quand la translation devient rectiligne et uniforme, et les théorèmes généraux deviennent applicables en ne tenant compte que des forces réelles.

La force centrifuge composée contient aussi comme facteur la projection de la vitesse relative sur un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation ω; elle est donc nulle dans les cas de repos relatif, et dans ceux où la vitesse relative deviendrait parallèle à l'axe.

Enfin, comme la direction de j_c et celle de la force centrifuge composée $-mj_c$ sont perpendiculaires à la vitesse relative, il en résulte que le travail relatif de cette force est toujours nul, de manière qu'elle n'entre pas en ligne de compte lorsqu'il s'agit d'appliquer le théorème des forces vives.

114. *Repos relatif à la surface de la Terre; poids d'un corps.* — Lorsqu'un point pesant M se trouve en repos relatif à la surface de la Terre, nous pouvons, suivant ce qui vient

d'être dit (n° 113), considérer ce repos comme absolu, à la condition de joindre aux forces réelles une force fictive $-mj_e$ égale et contraire à la force d'entraînement, et alors nous dirons qu'il y a équilibre (n° 112) entre toutes ces forces. Nous arriverions directement à la même conséquence en remarquant que le point possède en réalité le mouvement d'entraînement et que, par suite, les forces véritablement agissantes ont une résultante mj_e, ce qui équivaut à dire qu'elles font équilibre à $-mj_e$.

Les forces réelles comprennent : 1° la résultante des attractions de la Terre, de la Lune, du Soleil et, en général, de tous les corps célestes sur le point M; 2° la force provenant des obstacles qui empêchent le point de tomber. En vertu du principe de la réaction égale à l'action (n° 95), si l'obstacle consiste en un corps unique, il reçoit de M une force égale et contraire à celle qu'il exerce sur lui. La pression ou tension supportée par l'obstacle est ce que nous appelons, par définition, le poids du corps M; ce poids est donc égal à la résultante des forces auxquelles il fait équilibre quand on le change de sens, c'est-à-dire à la résultante des attractions de la Terre et des corps célestes, auxquelles il faut encore joindre la force $-mj_e$.

Afin d'évaluer cette dernière, nous supposerons (ce qui est suffisamment exact pour un intervalle de temps n'embrassant pas une longue succession de jours ou même de semaines et de mois) que le mouvement de la Terre, relativement à des axes (S) qui se transportent parallèlement à eux-mêmes, avec son centre, consiste en une rotation uniforme de vitesse ω, autour de la ligne des pôles, laquelle reste immobile dans le système (S). Soient R la distance du point considéré M au centre de la Terre, λ sa latitude. Si la Terre est supposée sphérique, la distance de ce point à la ligne des pôles sera $R\cos\lambda$, et son accélération dans sa rotation autour de cette ligne sera une accélération centripète $\omega^2 R\cos\lambda$ dirigée suivant le rayon du parallèle terrestre passant en M (n° 17). D'un autre côté, le point M du système (S) aurait une accélération J égale à celle du centre de la Terre; donc, suivant la théorie de l'accélération dans un mouvement composé (n° 30), J_e sera la résultante de $\omega^2 R\cos\lambda$ et de J, parce que le mouve-

ment de (S), qui joue ici le rôle de mouvement d'entraînement, est une translation. Donc on a aussi

$$-\overline{mj_e} = -\overline{m\omega^2 R \cos\lambda} - \overline{mJ};$$

la force d'entraînement prise en sens contraire est donc la résultante de la force centrifuge $m\omega^2 R \cos\lambda$ (force centripète changée de sens) et d'une force égale et contraire à celle qui ferait prendre au point matériel M le mouvement du centre de la Terre.

Il ne serait guère possible d'entrer ici dans tous les détails nécessaires pour faire comprendre comment les lois de l'attraction universelle, découvertes par Newton, permettent de déterminer la force exercée par les corps célestes sur chaque point de la Terre, ainsi que l'accélération J de son centre. Nous aurions d'ailleurs besoin pour cela de certaines théories qui seront données plus loin. Bornons-nous à dire, quant à présent, qu'on ne se trompe pas beaucoup en assimilant l'attraction du reste de l'univers sur notre planète à une sorte de pesanteur, en vertu de laquelle tous les points de la Terre prendraient, s'ils étaient isolés, une accélération commune, égale et parallèle à J. Si cela était rigoureusement vrai, il s'ensuivrait que l'ensemble des corps célestes exercerait sur le point M dont nous nous occupons une force réelle mJ, qui se compenserait avec l'une des composantes de la force fictive $-mj_e$. Il ne resterait d'ailleurs, parmi toutes les attractions exercées sur le point que celle de la Terre; nous arriverions donc à cette conclusion que :

Le poids d'un point matériel est la résultante de l'attraction terrestre sur ce point et de la force centrifuge qui correspond à sa rotation autour de la ligne des pôles considérée comme fixe.

En réalité, la compensation qu'on vient d'admettre n'existe pas avec une rigueur absolue. La valeur du poids, telle qu'elle résulte de l'énoncé qui précède, doit se composer avec une force comparativement très petite, et variable avec le temps, suivant la position de la Terre et du point considéré relativement aux divers corps attirants. Cette force additionnelle entraîne dans la direction du fil à plomb des variations trop

petites pour être soumises à l'observation directe, mais qui sont la cause de l'un des grands phénomènes naturels, celui des marées.

La Terre fait, comme on le sait, un tour complet en 86164^s, d'où résulte la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{86164} = 0,000072921\,;$$

par suite, en faisant R égal au rayon de la Terre, soit environ à $6\,371\,000^m$, on aura

$$m\omega^2 R \cos\lambda = 0,03388\, m \cos\lambda.$$

Le rapport de la force centrifuge au poids mg est

$$\frac{\omega^2 R \cos\lambda}{g}\,;$$

et, comme g ne s'écarte pas beaucoup de 9,8 en un point quelconque de la surface terrestre, ce rapport est encore approximativement égal à $\frac{0,03388 \cos\lambda}{9,8}$ ou à $0,00346 \cos\lambda$. On voit, par conséquent, que la force centrifuge est toujours une petite fraction du poids et que celui-ci diffère peu, en grandeur et en direction, de l'attraction réellement exercée par la Terre. Soit mG cette dernière force qui, composée avec $m\omega^2 R \cos\lambda$, doit donner la résultante mg; si nous projetons toutes les forces sur mg, en considérant comme négligeable l'angle de g et G, nous aurons l'équation

$$g = G - \omega^2 R \cos^2\lambda.$$

La substitution dans cette équation des valeurs $g = 9^m,8088$ et $\lambda = 48^\circ 50'$, qui se rapportent à Paris, conduit à

$$G = 9^m,8235\,;$$

si l'on pouvait supposer la Terre parfaitement sphérique et composée de couches sphériques homogènes, de manière à produire la même accélération sur tous les points libres placés à sa surface, cette valeur de G conviendrait à toutes les localités.

On aurait donc, en un point quelconque de la surface terrestre,

$$g = 9,8235 - 0,03388 \cos^2\lambda.$$

A l'équateur, il faut faire $\lambda = 0$, $\cos\lambda = 1$; le terme soustractif du second membre de cette équation est alors à son maximum, et sa valeur atteint à peu près $\frac{1}{290}$ du terme positif $9,8235$. Le facteur $0,03388$ est d'ailleurs égal à $\omega^2 R$; on voit par conséquent que, si la vitesse angulaire ω devenait 17 fois plus grande, il y aurait alors très approximativement égalité entre les nombres $9,8235$ et $0,03388 \times 17^2$; l'attraction réelle et la force centrifuge qui, à l'équateur, sont directement opposées, deviendraient, en outre, à peu près égales, de sorte que le poids s'annulerait.

Les variations de la force centrifuge avec la latitude, tant sous le rapport de l'intensité que sous celui de l'angle qu'elle fait avec l'attraction de la Terre, expliquent en partie les variations du poids, qui est la résultante de ces deux forces. Il y a une autre raison du même fait dans le défaut de sphéricité de la Terre et dans la distribution de la matière à son intérieur, qui ne répond pas exactement à l'hypothèse de couches sphériques homogènes; il résulte, en effet, de là que G n'est pas réellement constant, et que les calculs précédents sur ce nombre, ainsi que sur la force centrifuge, ne peuvent être présentés que comme plus ou moins approximatifs.

§ II. — Applications diverses.

115. *Mouvement rectiligne et vertical d'un point pesant, dans le vide ou dans un milieu résistant.* — Supposons un système d'axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz, composé d'une verticale descendante, prise pour axe des z, et de deux horizontales; la position initiale du point est prise pour origine; de plus, le point a reçu antérieurement une vitesse v_0 suivant l'axe des z, mais pouvant être à volonté positive ou négative. On appelle m la masse de ce point et l'on suppose qu'il reste toujours soumis à une force constante mg, égale à son poids, ayant même direction et même sens que la partie

positive de l'axe des z; d'ailleurs on admet qu'il tombe ou s'élève librement et dans le vide.

Les équations (2) du nº 104 deviennent ici, par la suppression du facteur m,

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2y}{dt^2}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}=g;$$

on en tire, par deux intégrations successives, en désignant par α, β, γ, α', β', γ' des constantes arbitraires,

$$\frac{dx}{dt}=\alpha,\qquad \frac{dy}{dt}=\beta,\qquad \frac{dz}{dt}=gt+\gamma,$$

$$x=\alpha t+\alpha',\quad y=\beta t+\beta',\quad z=\frac{1}{2}gt^2+\gamma t+\gamma'.$$

Or les données du problème nous montrent que x, y, z, $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ doivent s'annuler pour $t=0$, si l'on commence à compter le temps quand le point mobile est à l'origine des axes, et qu'on a au même instant $\frac{dz}{dt}=v_0$. En exprimant ces conditions, on trouve

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \gamma=v_0,\quad \alpha'=0,\quad \beta'=0,\quad \gamma'=0,$$

et les valeurs des coordonnées deviennent

$$x=0,\quad y=0,\quad z=\frac{1}{2}gt^2+v_0 t.$$

Le mouvement se fait donc en ligne droite suivant l'axe des z, et il est uniformément varié. Nous croyons inutile d'insister davantage sur ce cas particulier fort simple, déjà étudié dans la Cinématique, et qui rentre aussi dans la question résolue au nº 97. Nous allons modifier les données en introduisant une force nouvelle, la résistance de l'air ou d'un fluide pesant quelconque, dans lequel se meut le point considéré.

L'évaluation exacte de cette résistance est un problème difficile, dont la solution n'est pas encore trouvée. D'après l'expérience et certains aperçus théoriques exposés plus loin dans une autre partie du Cours, on admet que la force exercée par le fluide sur un corps en mouvement dans son intérieur est la

résultante de deux autres, qui sont : 1° une force verticale ascendante égale au poids du fluide qui occuperait la place du corps, si celui-ci était enlevé ; 2° une force dépendant de la vitesse relative avec laquelle le corps se déplace dans le fluide, et proportionnelle au carré de cette vitesse, à laquelle elle serait d'ailleurs directement opposée, dans le cas simple (que nous supposerons) d'un corps de révolution autour d'un axe parallèle à cette vitesse. Nommant alors

ρ le rapport entre la densité du fluide et la densité moyenne du corps;
v la vitesse du mouvement relatif de ce dernier;
k une vitesse constante,

la première force aura pour valeur $mg\rho$, et, comme elle se retranche du poids, celui-ci sera réduit à $mg(1-\rho)$, quantité que nous continuerons à représenter cependant par mg, en changeant le sens de la notation g, afin de simplifier l'écriture [1]; la seconde peut toujours s'exprimer par $mg\frac{v^2}{k^2}$, moyennant un choix convenable de la constante k, qui représente la vitesse pour laquelle cette seconde partie deviendrait égale au poids réduit mg. D'ailleurs si, comme nous le supposerons, le fluide est stagnant, v deviendra la vitesse absolue du corps.

Cela posé, un raisonnement direct permet d'établir, en premier lieu, que si la vitesse initiale v_0 a une direction verticale, cette direction se conservera pendant toute la durée du mouvement et que celui-ci sera rectiligne. En effet, au premier instant, la résistance de l'air, opposée à v_0, est verticale ainsi que le poids ; ces deux forces, agissant seules pendant un élément dt du temps, produiront une vitesse verticale, qui se composera avec v_0 (n° 96); donc la vitesse est encore verticale après le temps dt, puisqu'elle s'obtient par la composition de deux vitesses verticales. Le même raisonnement prouve qu'elle l'est encore après un second intervalle dt, puis après un troisième, et ainsi de suite ; elle restera donc indé-

---

[1] On admettra de plus dans le calcul ci-après l'hypothèse simple de valeurs constantes pour g et ρ, et l'on supposera $\rho < 1$, pour fixer les idées.

finiment verticale, ce qui ne peut avoir lieu que dans un mouvement rectiligne, suivant la même direction.

Maintenant nous distinguerons deux cas :

PREMIER CAS : *Mouvement descendant.* — Le point part de l'origine avec la vitesse positive v_0 et parcourt l'axe des z positifs. L'expression de la force tangentielle (n° 105) est ici

$$m\frac{dv}{dt}=mg-mg\frac{v^2}{k^2},$$

équation qui se met sous la forme

$$(1)\qquad g\,dt=\frac{k^2\,dv}{k^2-v^2}=\frac{k\,dv}{2}\left(\frac{1}{k+v}+\frac{1}{k-v}\right).$$

On obtient ensuite, par une intégration immédiate,

$$\frac{2gt}{k}=\mathrm{L}\,\frac{k+v}{k-v}+\text{const.},$$

et, en déterminant la constante de manière qu'on ait $v=v_0$ pour $t=0$,

$$\frac{2gt}{k}=\mathrm{L}\,\frac{(k+v)(k-v_0)}{(k-v)(k+v_0)}.$$

De là nous tirons la valeur de la vitesse

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} v&=\frac{dz}{dt}=k\,\frac{(k+v_0)e^{\frac{2gt}{k}}-(k-v_0)}{(k+v_0)e^{\frac{2gt}{k}}+(k-v_0)}\\ \frac{v}{k}&=\frac{(k+v_0)e^{\frac{gt}{k}}-(k-v_0)e^{-\frac{gt}{k}}}{(k+v_0)e^{\frac{gt}{k}}+(k-v_0)e^{-\frac{gt}{k}}}.\end{aligned}\right.$$

Une seconde intégration nous donnera z en fonction de t. Pour l'effectuer, on remarque que le numérateur de la fraction égale à $\frac{v}{k}$ est, à un facteur constant près, la dérivée du dénominateur; on a par suite

$$(3)\qquad z=\frac{k^2}{g}\,\mathrm{L}\left[\frac{(k+v_0)e^{\frac{gt}{k}}+(k-v_0)e^{-\frac{gt}{k}}}{2k}\right],$$

la constante introduite par l'intégration étant déterminée de manière qu'on ait $z = 0$ pour $t = 0$.

Les équations (2) et (3) donnent, en fonction du temps, la vitesse et l'espace parcouru. Lorsque t devient très grand, l'exponentielle $e^{-\frac{gt}{k}}$ tend vers zéro; v et z tendent en même temps vers les valeurs

$$v = k, \quad z = kt + \frac{k^2}{g} \mathrm{L}\left(\frac{k + v_0}{2k}\right).$$

La vitésse tend, comme on le voit, vers la limite k sans jamais l'atteindre; elle va en augmentant ou en diminuant toujours, suivant qu'elle est d'abord plus petite ou plus grande, comme on le reconnaît facilement par l'équation (2) qui donne sa valeur en fonction du temps. On voit aussi par l'équation (3) que le point mobile tend à se trouver à une distance constante $\frac{k^2}{g} \mathrm{L}\left(\frac{k + v_0}{2k}\right)$ en avant d'un autre point qui, parti en même temps de l'origine, serait animé d'une vitesse constante k suivant la verticale. D'ailleurs, cela ne constitue véritablement une avance que si l'on a $v_0 > k$; car autrement le logarithme devient négatif, et l'avance se change en retard, comme il est facile de s'en rendre compte *a priori*.

Deuxième cas : *Mouvement ascendant.* — Si nous supposons une vitesse initiale ascendante, le point va commencer à monter verticalement. Changeons alors le sens de l'axe des z, en laissant toujours l'origine au point de départ, et nommons

z la hauteur parcourue en montant, à une époque t quelconque;
v la vitesse correspondante;
v_0 la vitesse initiale, pour $z = 0$, $t = 0$.

Les autres notations restant d'ailleurs les mêmes, nous aurons ici

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - mg \frac{v^2}{k^2},$$

ou bien

$$g\,dt = -\frac{k^2 dv}{k^2 + v^2} = -k \frac{d\frac{v}{k}}{1 + \left(\frac{v}{k}\right)^2};$$

d'où résulte, en tenant compte de ce que v doit prendre la valeur v_0 pour $t = 0$,

$$\frac{gt}{k} = -\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{k} + \operatorname{arc\,tang}\frac{v_0}{k}.$$

Cette équation, résolue par rapport à v, donne

$$(4)\quad \begin{cases} v = k\operatorname{tang}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v_0}{k} - \frac{gt}{k}\right) \\ = k\dfrac{\frac{v_0}{k} - \operatorname{tang}\frac{gt}{k}}{1 + \frac{v_0}{k}\operatorname{tang}\frac{gt}{k}} = k\dfrac{v_0\cos\frac{gt}{k} - k\sin\frac{gt}{k}}{v_0\sin\frac{gt}{k} + k\cos\frac{gt}{k}}. \end{cases}$$

On peut intégrer une seconde fois, après avoir remplacé v par $\frac{dz}{dt}$, et l'on trouvera, eu égard à la condition $z = 0$ pour $t = 0$,

$$(5)\qquad z = \frac{k^2}{g}\operatorname{L}\left(\frac{v_0}{k}\sin\frac{gt}{k} + \cos\frac{gt}{k}\right).$$

L'expression de $\frac{dv}{dt}$ est toujours négative, de sorte que le mouvement ascendant se ralentit de plus en plus, sous l'action du poids et de la résistance de l'air, qui sont tous deux en sens contraire de la vitesse initiale. La vitesse v devient nulle au bout d'un temps θ ayant pour valeur, d'après l'équation (4),

$$(6)\qquad \theta = \frac{k}{g}\operatorname{arc\,tang}\frac{v_0}{k};$$

la hauteur parcourue h est alors, d'après les équations (5) et (6),

$$h = \frac{k^2}{g}\operatorname{L}\left(\frac{v_0^2}{k\sqrt{k^2+v_0^2}} + \frac{k}{\sqrt{k^2+v_0^2}}\right) = \frac{k^2}{2g}\operatorname{L}\left(1 + \frac{v_0^2}{k^2}\right).$$

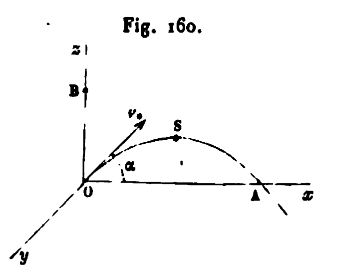
Le point mobile arrive à la hauteur h au-dessus de son point de départ, au bout du temps θ, avec une vitesse nulle. Dans l'intervalle de 0 à θ, les équations (4) et (5) donnent la vitesse et l'espace parcouru en fonction du temps.

Après le temps θ le mouvement ascendant cessera, puisque

la vitesse s'est anéantie et que la force agit dans le sens de la descente. Alors commence un mouvement descendant, dont les circonstances peuvent se déterminer par les formules établies pour le premier cas. Il faudrait seulement transporter l'origine des z à la hauteur h au-dessus du point de départ, reprendre comme sens positif celui de la descente, compter les temps à partir de l'époque θ, et faire enfin $v_0 = 0$ dans les formules (2) et (3).

116. *Mouvement parabolique d'un point pesant dans le vide.* — Prenons trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz (*fig.* 160), parmi lesquels l'axe des z sera vertical et ascendant; imaginons un point pesant lancé à partir de l'origine O avec une vitesse v_0 contenue dans le plan et l'angle zOx, et faisant avec l'horizontale Ox un angle donné α. Les équations du mouvement de ce point, débarrassées du facteur qui représente sa masse, seront (n° 104)

Fig. 160.



$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Une première intégration donne

$$\frac{dx}{dt} = \text{const.}, \quad \frac{dy}{dt} = \text{const.}, \quad \frac{dz}{dt} = -gt + \text{const.};$$

si l'on compte le temps à partir de l'époque où le point était en O, on devra avoir, pour $t = 0$,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = v_0 \sin\alpha;$$

déterminant les constantes par ces conditions, on aura, pour t quelconque,

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \quad \frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin\alpha.$$

Une seconde intégration conduit alors à

$$(7)\qquad x = v_0 t \cos\alpha,\quad y = 0,\quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha,$$

sans constantes, puisque x, y, z s'annulent pour $t = 0$.

La deuxième équation (7) montre que le point se meut dans le plan des zx (plan vertical contenant la vitesse initiale). L'équation de la trajectoire dans ce plan s'obtient en éliminant t entre la première et la dernière équation du même groupe, ce qui donne

$$(8)\qquad z = x \operatorname{tang}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\alpha};$$

on voit que cette courbe est une parabole à axe vertical, propriété déjà connue (n° 97).

L'ordonnée z commence à croître, puisque pour $t = 0$ la dérivée $\frac{dz}{dt}$ a une valeur positive $v_0 \sin\alpha$; cette dérivée s'annule quand t prend la valeur $\frac{v_0 \sin\alpha}{g}$, à laquelle répondent

$$x = \frac{v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \quad \text{et} \quad z = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

La tangente à la trajectoire est alors horizontale, et le point se trouve à son maximum d'élévation, au sommet S de la parabole. Ensuite z décroît et redevient nul au bout du temps $\frac{2v_0 \sin\alpha}{2g}$; à cet instant on a

$$x = \overline{OA} = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Pour rendre maximum cette distance, qu'on nomme la *portée du jet*, en regardant v_0 comme une donnée invariable, on doit prendre $\alpha = 45°$; car le facteur variable $2\sin\alpha\cos\alpha$ peut se remplacer par $\sin 2\alpha$, quantité toujours moindre que 1, sauf pour $\alpha = 45°$. Le maximum de $\overline{OA}$ sera par conséquent $\frac{v_0^2}{g}$.

En posant $\operatorname{tang}\alpha = \beta$, l'équation de la parabole devient

$$(9)\qquad z = \beta x - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \beta^2).$$

On peut y considérer β comme un paramètre variable et chercher l'enveloppe de toutes les paraboles représentées par cette équation.

A cet effet on doit, suivant une théorie connue, éliminer le paramètre β entre l'équation (9) et sa dérivée par rapport à β, laquelle est

$$0 = x - \frac{g\beta x^2}{v_0^2}.$$

L'élimination se fait sans difficulté et donne pour équation de l'enveloppe

$$(10) \qquad z = \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\left(1 + \frac{v_0^4}{g^2x^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}.$$

C'est encore une parabole, dont le sommet se trouve sur l'axe des z en B, à la hauteur $\frac{v_0^2}{2g}$. Son intersection avec l'axe des x a lieu à une distance $\frac{v_0^2}{g}$ double de $\overline{OB}$, ce qui prouve que le foyer est en O, à l'origine. Tous les points intérieurs de cette parabole peuvent être atteints par un projectile lancé de O avec la vitesse v_0, dans le plan zOx et sous un angle α convenablement choisi, car les diverses paraboles obtenues en faisant varier β se succèdent d'une manière continue, dans leur enveloppe commune ([1]); les points extérieurs, au contraire, ne sont pas susceptibles d'être touchés. Pour cette raison, la courbe dont il s'agit se nomme la *parabole de sécurité*.

Il est clair que, si l'on fait varier le plan zOx autour de Oz, le paraboloïde de révolution engendré par cette parabole marquera la limite de la région exposée aux projectiles partant de O, avec la vitesse v_0, dans une direction arbitrairement choisie.

([1]) Si l'on cherchait la valeur qu'il faut donner à β pour faire passer le projectile par un point donné (z, x), on aurait, au moyen de l'équation (9),

$$\beta = \frac{v_0^2}{gx}\left[1 \pm \sqrt{\frac{2g}{v_0^2}\left(\frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} - z\right)}\right];$$

cette expression est réelle pour les points intérieurs à la parabole enveloppe, et imaginaire pour les points extérieurs.

117. *Mouvement d'un point sollicité par une force centrale fonction de la distance.* — Lorsqu'un point matériel M subit l'action d'une force unique F passant toujours par un point fixe O, l'accélération totale de ce point, ayant la même direction (nº **104**), passe aussi par le point O; donc le plan osculateur de la trajectoire y passe également, puisqu'il contient l'accélération totale. Cela suffit pour conclure immédiatement que la trajectoire est plane. Soient, en effet, M_1, M_2, M_3, M_4 quatre positions consécutives infiniment voisines du point mobile; un plan osculateur sera $OM_1M_2M_3$ et le plan osculateur suivant sera $OM_2M_3M_4$. Or ces deux plans coïncident, car ils ont trois points communs, savoir O, M_2, M_3. Donc chaque plan osculateur coïncide avec le précédent et le suivant, et par conséquent tous coïncident avec celui qui répond à l'origine du mouvement, et qui est déterminé par le point O et la vitesse initiale.

Le même fait pourrait encore se démontrer comme il suit. Imaginons deux rayons partant de O et joignant ce point à deux positions infiniment voisines M, M′ du mobile; soient $d\sigma$ l'aire OMM′ et α, β, γ les angles que la normale à son plan fait avec trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz. Les trois projections de l'aire $d\sigma$ sur les plans coordonnés respectivement perpendiculaires à ces axes seront

$$d\sigma \cos\alpha, \quad d\sigma \cos\beta, \quad d\sigma \cos\gamma;$$

donc, si l'on nomme A, B, C trois quantités constantes pendant toute la durée du mouvement et dt le temps du parcours $\overline{MM'}$, on aura, en vertu du théorème des aires (nº **108**),

$$d\sigma \cos\alpha = A\,dt, \quad d\sigma \cos\beta = B\,dt, \quad d\sigma \cos\gamma = C\,dt;$$

d'où l'on déduit, eu égard à $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

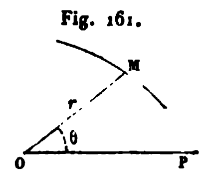
$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Le plan déterminé par deux rayons vecteurs consécutifs est donc toujours le même, puisque ses cosinus directeurs ne changent pas; donc la trajectoire est contenue dans ce plan.

Ce plan étant immédiatement connu, comme nous l'avons déjà dit, il suffit de définir les positions successives du point au moyen d'un système de coordonnées planes. Nous adopterons les coordonnées polaires, savoir le rayon vecteur $\overline{OM} = r$ (*fig.* 161), et l'angle $\theta = OMP$, décrit par ce rayon à partir d'une droite fixe OP. On sait que la vitesse v satisfait alors à l'équation (n° 12)

Fig. 161.



$$v^2 = r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2.$$

On sait, d'un autre côté (n° 109), que si l'intensité de la force, considérée comme répulsive, est représentée par $m\varphi'(r)$, m désignant la masse du point M, il y aura un potentiel $m\varphi(r)$; par suite, l'application du théorème des forces vives donnera

$$(1) \qquad r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\varphi(r) + h,$$

en nommant h une constante égale à $v_0^2 - 2\varphi(r_0)$, c'est-à-dire à la valeur que prend $v^2 - 2\varphi(r)$ pour la position initiale du point.

Nous pouvons aussi nous servir du théorème des aires. Si nous nommons C le double de l'aire décrite par OM dans l'unité de temps (ou le moment de la vitesse initiale relativement à O), nous aurons

$$(2) \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = C,$$

attendu que $r^2\,d\theta$ exprime le double de l'aire décrite par OM dans le temps dt.

Les équations (1) et (2) permettent d'avoir r et θ en fonction du temps, et par conséquent elles définissent complètement le mouvement du point M. L'élimination du temps donne d'abord la relation entre r et θ, et fait ainsi connaître la forme de la trajectoire; pour obtenir cette relation, il suffit de porter

dans l'équation (1) la valeur de dt fournie par l'équation (2). Il vient alors

$$\frac{C^2}{r^2} + \frac{C^2 dr^2}{r^4 d\theta^2} = 2\varphi(r) + h,$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad d\theta = \frac{C\,dr}{r^2\sqrt{2\varphi(r) + h - \frac{C^2}{r^2}}};$$

il ne resterait à effectuer qu'une quadrature. Ensuite, après avoir obtenu θ en fonction de r, on déduirait de l'équation (2)

$$(4) \qquad dt = \frac{r^2 d\theta}{C} = \frac{dr}{\sqrt{2\varphi(r) + h - \frac{C^2}{r^2}}};$$

la connaissance de t en fonction de r, ou inversement de r en fonction de t, est donc encore ramenée à une quadrature. Enfin, connaissant r à chaque instant, on connaît par cela même θ, puisqu'on sait quelle valeur de θ répond à une valeur donnée de r.

En supposant que la force fût donnée en fonction de la distance, nous avons pu déterminer la trajectoire. Réciproquement, si l'on donnait la trajectoire, nous en déduirions la force. L'équation (3) nous conduit en effet à la valeur du potentiel

$$\varphi(r) = \frac{1}{2}\left[\frac{C^2}{r^2} + \frac{C^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - h\right],$$

et le second membre, en vertu de la relation donnée entre r et θ pour définir la trajectoire, peut être regardé comme une fonction connue de r. On en tirera par une dérivation $\varphi'(r)$, qui exprime la valeur absolue de la force rapportée à l'unité de masse, ou celle de l'accélération qu'elle produit. On trouve de cette manière

$$\varphi'(r) = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{2\,dr^2}{r^3 d\theta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 r}{d\theta^2}\right).$$

Or on a identiquement

$$\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta}, \quad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{2dr^2}{r^3 d\theta^2} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 r}{d\theta^2};$$

la dernière équation peut donc se mettre sous la forme plus simple

$$(5) \qquad \varphi'(r) = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

118. *Cas particulier du problème précédent; mouvement produit par l'attraction d'un centre fixe, avec une intensité inversement proportionnelle au carré de la distance.* — On suppose la force exprimée par $-\frac{m\mu}{r^2}$, μ étant un coefficient constant et l'expression étant affectée du signe —, parce qu'il s'agit d'une attraction; nous devons donc prendre

$$\varphi(r) = -\int \frac{\mu}{r^2}\,dr = \frac{\mu}{r}.$$

Par la substitution de cette valeur, l'équation (3) du n° 117 devient

$$d\theta = \frac{C\,dr}{r^2\sqrt{h + \frac{2\mu}{r} - \frac{C^2}{r^2}}} = \frac{-C\,d\frac{1}{r}}{\sqrt{h + \frac{\mu^2}{C^2} - \left(\frac{C}{r} - \frac{\mu}{C}\right)^2}}.$$

Remarquons d'abord que $h + \frac{\mu^2}{C^2}$ est nécessairement positif, car autrement $\frac{dr}{d\theta}$ resterait imaginaire pour toutes les valeurs de r, ce qui ne peut évidemment pas avoir lieu dans un mouvement réel. D'ailleurs, on vérifierait le fait sans difficulté en remplaçant h par $v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}$ et C par le moment de la vitesse initiale; comme ce moment est au plus égal à $v_0 r_0$, on aurait

$$h + \frac{\mu^2}{C^2} > v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{\mu^2}{v_0^2 r_0^2},$$

ou bien

$$h+\frac{\mu^2}{C^2} > \left(v_0 - \frac{\mu}{v_0 r_0}\right)^2,$$

ce qui prouve bien que le premier membre de ces inégalités est positif.

En le désignant par l^2, la valeur de $d\theta$ se met sous la forme

$$d\theta = -\frac{d\left(\frac{C}{lr} - \frac{\mu}{lC}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{C}{lr}-\frac{\mu}{lC}\right)^2}};$$

d'où résulte, en nommant α une constante arbitraire,

$$\theta + \alpha = \arccos\left(\frac{C}{lr} - \frac{\mu}{lC}\right)$$

ou encore

(6) $$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1+\frac{Cl}{\mu}\cos(\theta+\alpha)};$$

c'est l'équation d'une section conique ayant le centre d'attraction pour un de ses foyers, une excentricité $e = \frac{Cl}{\mu}$ et un paramètre $a(1-e^2) = \frac{C^2}{\mu}$. La constante α se déterminerait par la condition que les valeurs initiales r_0, θ_0 de r et de θ doivent vérifier l'équation (6). La trajectoire serait alors complètement connue et, si l'on comptait les angles θ à partir de l'axe passant par les foyers, on pourrait lui donner la forme

(7) $$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}.$$

Cette courbe sera une ellipse, une parabole ou une hyperbole, suivant que e, ou $\frac{Cl}{\mu}$, sera inférieur, égal ou supérieur à 1. Or on a posé

$$l^2 = h + \frac{\mu^2}{C^2},$$

relation qui peut s'écrire

$$\frac{C^2 l^2}{\mu^2} - 1 = \frac{C^2 h}{\mu^2};$$

on voit, par conséquent, que le genre de la section conique dépend uniquement du signe de h. On aura l'ellipse, la parabole ou l'hyperbole suivant que h sera négatif, nul ou positif, c'est-à-dire suivant que v_0 et r_0 satisferont à telle ou telle des trois relations

$$v_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \quad v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0}, \quad v_0^2 > \frac{2\mu}{r_0}.$$

Il est remarquable que la nature de la trajectoire, pour une position initiale donnée, soit uniquement déterminée par la grandeur de la vitesse et ne dépende en rien de la direction variable que l'on pourrait donner à celle-ci.

Nous devons encore chercher θ et r, ou tout au moins l'un des deux en fonction du temps t, afin de pouvoir connaître la position du mobile sur sa trajectoire à une époque quelconque. On pourrait, à cet effet, employer l'équation (4) qui, par la substitution de $\varphi(r) = \frac{\mu}{r}$, deviendrait

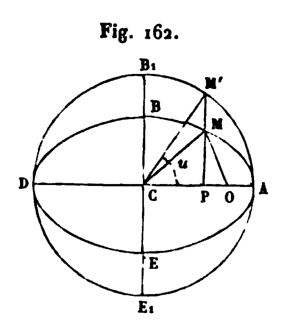
$$dt = \frac{r\,dr}{\sqrt{hr^2 + 2\mu r - C^2}};$$

l'intégration s'effectuerait sans difficulté, puisque le radical est seulement du second degré; mais il faudrait avoir égard au signe de h, si l'on voulait éviter l'introduction des imaginaires dans les formules. Sans nous arrêter davantage à ce calcul, nous pouvons, dans le cas de la trajectoire elliptique, le remplacer avantageusement par la démonstration géométrique suivante.

Soient ABDE (*fig.* 162) l'ellipse parcourue, AD, BE ses axes principaux, C son centre de figure, O le foyer d'où émane la force attractive, M une quelconque des positions du point mobile. Suivant l'usage ordinaire, nous désignons par a la longueur $\overline{AC}$ et par e le rapport $\frac{\overline{OC}}{\overline{AC}}$ ou l'excentricité. Nous supposerons le temps t compté à partir de l'époque où le

mobile était en A, et nous allons chercher deux expressions du double de l'aire MOA engendrée par le rayon vecteur OM depuis la position initiale OA. Une première expression est Ct, la constante C conservant la signification qu'on lui a donnée dans les calculs précédents. Pour en avoir une autre, décrivons le cercle AB_1DE_1 sur AD comme diamètre, menons MP parallèle à BC et prolongeons cette ordonnée jusqu'à sa rencontre en M′ avec le cercle; soit u l'angle M′CA des rayons M′C et CA. Le double du secteur M′CA est a^2u; en le multipliant par $\sqrt{1-e^2}$, rapport constant entre les ordonnées du contour formé par CM′ et l'arc d'ellipse MA d'une part, et celles du contour formé par CM′ et l'arc de cercle M′A d'autre part, on aura deux fois l'aire CMA; donc

Fig. 162.



$$2\,\text{aire}\,\text{CMA} = a^2u\sqrt{1-e^2}.$$

D'un autre côté, le double de l'aire du triangle MOC est le produit de $\overline{\text{OC}} = ae$ par la hauteur

$$\overline{\text{MP}} = \sqrt{1-e^2}\,\overline{\text{M'P}} = a\sqrt{1-e^2}\sin u,$$

d'où

$$2\,\text{aire}\,\text{MOC} = a^2\sqrt{1-e^2}\,e\sin u.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} 2\,\text{aire}\,\text{MOA} &= 2(\text{aire}\,\text{CMA} - \text{aire}\,\text{MOC}) \\ &= a^2\sqrt{1-e^2}\,(u - e\sin u) \end{aligned}$$

et, en égalant les deux expressions de cette même surface,

$$(8) \qquad u - e\sin u = \frac{\text{C}t}{a^2\sqrt{1-e^2}}.$$

La variable auxiliaire u est liée à r et à θ par des relations fort simples. Une des propriétés connues de l'ellipse consiste d'abord en ce que $\overline{\text{OM}} = a - e\overline{\text{CP}}$, et, comme $\overline{\text{CP}} = a\cos u$,

on en déduit

$$(9) \qquad r = a(1 - e\cos u).$$

Par la comparaison de séquations (7) et (9), on a ensuite

$$1 - e\cos u = \frac{1 - e^2}{1 + e\cos\theta};$$

d'où résultent successivement les équations

$$\cos\theta = \frac{\cos u - e}{1 - e\cos u},$$

$$\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta} = \frac{(1 + e)(1 - \cos u)}{(1 - e)(1 + \cos u)},$$

et enfin

$$(10) \qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\operatorname{tang}\frac{1}{2}u.$$

L'angle u étant connu en fonction de t par l'équation (8), les équations (9) et (10) donneront r et θ à la même époque.

On peut mettre à la place de la constante C diverses expressions. D'abord ce serait le produit de la vitesse, à un instant quelconque, par sa distance au point O. Secondement, comme nous avons remplacé plus haut $\frac{C^2}{\mu}$ par $a(1 - e^2)$, on a aussi

$$C = \sqrt{a\mu(1 - e^2)},$$

ce qui transformerait l'équation (8) en

$$(11) \qquad u - e\sin u = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}\,t.$$

Enfin, si l'on désigne par T le temps employé par le mobile pour le parcours de la courbe entière, on aura

$$CT = 2\pi a^2\sqrt{1 - e^2} \quad \text{ou} \quad \frac{C}{a^2\sqrt{1 - e^2}} = \frac{2\pi}{T};$$

on voit, par conséquent, que le coefficient de t dans les équations (8) et (11) n'est autre chose que la vitesse angulaire constante d'un point qui tournerait uniformément autour d'un

centre, en faisant un tour complet dans un temps égal à celui que met le point M pour parcourir son ellipse entière. En désignant par n cette vitesse angulaire, on écrirait la valeur de $u - e\sin u$ sous la forme définitive

$$(12) \qquad u - e\sin u = nt.$$

En vertu de l'une des équations (8), (11) et (12) (qui en réalité n'en font qu'une), u est une fonction du temps. La recherche de cette fonction est une question qu'on nomme *le problème de Kepler;* nous allons la résoudre dans l'hypothèse où l'excentricité serait assez petite pour rendre négligeables ses puissances au delà de la seconde.

L'équation (12) donne d'abord

$$u = nt + e\sin u;$$

en remplaçant u par $nt + e\sin u$ dans le second membre, cette équation devient

$$\begin{aligned} u &= nt + e\sin(nt + e\sin u) \\ &= nt + e\sin nt\cos(e\sin u) + e\cos nt\sin(e\sin u). \end{aligned}$$

Or on a aussi

$$\cos(e\sin u) = 1 - \frac{1}{2}e^2\sin^2 u + \ldots,$$

$$\sin(e\sin u) = e\sin u - \frac{1}{6}e^3\sin^3 u + \ldots;$$

la substitution de ces valeurs dans la dernière expression de u donne, en négligeant les quantités au delà du second ordre relativement à e,

$$u = nt + e\sin nt + e^2\cos nt\sin u.$$

Enfin, si l'on remplace encore une fois u par $nt + e\sin u$ dans le second membre, on trouvera, e^3 étant toujours supposé négligeable,

$$u = nt + e\sin nt + e^2\sin nt\cos nt.$$

119. *Mouvement des planètes autour du Soleil; lois de Kepler et leurs conséquences immédiates.* — Les lois du mouvement des planètes que Kepler a déduites de ses observations

sont au nombre de trois et peuvent se résumer dans les énoncés suivants :

PREMIÈRE LOI. — *Le centre de chaque planète décrit autour du Soleil supposé fixe, et dans un plan passant par son centre, une orbite dans laquelle les aires engendrées par un rayon vecteur joignant les deux centres sont proportionnelles au temps.*

DEUXIÈME LOI. — *La courbe décrite par le centre de chaque planète est une ellipse dont le centre du Soleil occupe un des foyers.*

TROISIÈME LOI. — *Les carrés des temps des révolutions sont proportionnels, pour les diverses planètes, aux cubes des grands axes de leurs orbites.*

La première loi nous prouve (n° 108) que le moment de la quantité de mouvement de la planète par rapport au centre du Soleil est constant; il l'est donc aussi par rapport à un axe quelconque issu de ce point (n° 103). Donc le moment de la force exercée sur la planète est nul relativement à tous ces axes, d'où l'on conclut que la force passe par le centre du Soleil, si toutefois il est permis de considérer ce point comme fixe.

L'équation de l'orbite étant mise ensuite sous la forme (7), on en tire

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{a(1-e^2)}, \quad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{-e\cos\theta}{a(1-e^2)};$$

donc

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{a(1-e^2)};$$

par conséquent, l'équation (5) du n° 117 nous donne pour expression de la force rapportée à l'unité de masse

$$\varphi'(r) = -\frac{C^2}{ar^2(1-e^2)} = -\frac{\mu}{r^2},$$

la notation μ conservant le même sens qu'aux nos 117 et 118.

Cette valeur est négative, car dans l'ellipse on a $e < 1$; donc la force est une attraction variable en raison inverse du carré de la distance.

Si l'on nomme T le temps de la révolution entière d'une planète autour du Soleil, on a établi plus haut (n° **118**) l'égalité

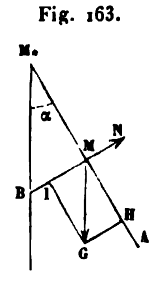
$$\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{2\pi}{T},$$

dont les deux membres expriment un même coefficient dans les équations (11) et (12). Or la troisième loi de Kepler nous montre que $\sqrt{\frac{a^3}{T}}$ reste constant pour toutes les planètes; donc il en est de même, en raison de l'égalité précédente, pour le coefficient μ. Nous pouvons en conclure que l'accélération totale est la même pour toutes les planètes à égalité de distance, puisqu'elle s'exprime par $\frac{\mu}{r^2}$ en valeur absolue; la force correspondante serait proportionnelle à la masse de chaque planète.

Les lois de Kepler ne sont pas d'une exactitude rigoureuse; de plus, nous avons raisonné, pour en tirer des conséquences, comme si le centre du Soleil était absolument fixe et comme si les planètes n'exerçaient aucune action les unes sur les autres. C'est cependant en adoptant ce point de départ approximatif que Newton est arrivé à découvrir la grande loi de la gravitation universelle, découverte qui aurait suffi à elle seule pour immortaliser son nom. Les petites erreurs que l'on commet ainsi se compensent avec tant d'exactitude que cette loi, prise à son tour comme point de départ et appliquée avec toute la rigueur possible, permet d'expliquer et, au besoin, de prévoir à l'avance toutes les circonstances des mouvements observés dans le système solaire; elle a même conduit Le Verrier à déterminer par le calcul une planète importante (Neptune), inconnue avant lui et dont il a pu indiquer la position aux observateurs. Mais c'est là un ordre de questions que nous ne pouvons développer davantage, et qui rentre plutôt dans le domaine de l'Astronomie ou de la Mécanique céleste.

120. ***Mouvement d'un point pesant sur une droite inclinée.*** — Soit un point M (*fig.* 163), soumis à son poids $mg = \overline{MG}$ et assujetti à décrire une droite inclinée M_0A, qui fait un angle α avec la verticale. Nous admettons, comme au n° 110, que les obstacles par lesquels on oblige le point à décrire cette trajectoire exercent sur lui une force N, normale à M_0A et inconnue *a priori*. Si l'on remplace le poids $\overline{MG}$ par deux composantes rectangulaires, l'une $\overline{MH} = mg\cos\alpha$ dirigée suivant MA, l'autre $\overline{MI} = mg\sin\alpha$ contenue dans le plan vertical MGH, le point pourra être considéré comme se mouvant librement sous l'action des trois forces $mg\cos\alpha$, $mg\sin\alpha$, N. Les deux dernières ayant des projections nulles sur MA, la première sera égale à la force tangentielle $m\frac{dv}{dt}$ (n° 105), et l'on aura, par suite,

Fig. 163.



$$\frac{dv}{dt} = g\cos\alpha.$$

Cette équation suffit pour déterminer le mouvement du point sur la trajectoire donnée. Par une première intégration, nous en déduisons la vitesse

$$v = v_0 + gt\cos\alpha,$$

v_0 étant la vitesse initiale, à l'époque où le mobile était en M_0, époque à partir de laquelle on comptera le temps. Appelons maintenant x la longueur $\overline{M_0M}$ parcourue pendant le temps t; à la place de v, nous mettrons $\frac{dx}{dt}$, et une seconde intégration donnera

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2\cos\alpha.$$

Comme on le voit, le mouvement suivant M_0A est uniformément varié; son accélération est $g\cos\alpha$, projection sur la droite parcourue de l'accélération g qu'aurait le point s'il tombait librement.

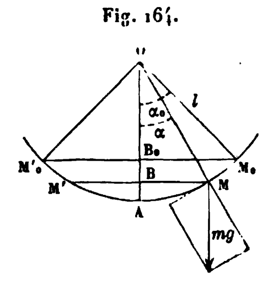
Dans l'hypothèse $v_0 = 0$, la longueur $x = 0$ se réduit à

$\frac{1}{2}gt^2\cos\alpha$, projection de la longueur verticale $\overline{M_0B} = \frac{1}{2}gt^2$ sur la direction M_0A. Si l'on imaginait des points pesants partant simultanément, sans vitesse initiale, de la position M_0 commune, mais dans toutes les directions possibles, la droite $\overline{M_0B}$ que l'on devrait projeter pour avoir les positions de tous ces points à une même époque serait indépendante de α; donc le lieu de toutes ces positions contemporaines serait une sphère décrite sur $\overline{M_0B}$ comme diamètre. Le point B varierait d'ailleurs avec le temps et descendrait verticalement, comme un point abandonné en M_0 sans vitesse initiale, sous l'action de son poids.

L'accélération totale d'un mouvement rectiligne se réduisant à l'accélération tangentielle (n° 15), la force centripète s'annule dans le cas particulier que nous traitons. Donc la force normale N est égale et contraire à la composante normale $\overline{MI}$ du poids $mg = \overline{MG}$; ou bien encore la pression du point M sur l'obstacle qui lui fait parcourir la droite M_0A est égale à $mg\sin\alpha$. L'inconnue auxiliaire N se trouve ainsi déterminée. On remarquera que son égalité avec la composante normale du poids tient uniquement à la nature de la trajectoire et ne subsisterait pas si le point parcourait une courbe au lieu d'une ligne droite.

121. *Pendule circulaire simple.* — Le pendule circulaire simple consiste en un point matériel pesant M, qu'on suppose assujetti à se mouvoir sur un arc de cercle $M_0AM'_0$ (*fig.* 164), contenu dans un plan vertical et tournant sa concavité vers le haut. On admet ici, comme dans l'exemple précédent (n° 120) et dans la théorie générale du n° 110, que l'obligation pour le point de parcourir cette trajectoire résulte de l'action d'une force normale N, d'intensité *a priori* inconnue; le point supporte en outre l'action de la pesanteur, c'est-à-dire une force verticale constante *mg*. En projetant ces deux forces sur la tangente et sur la normale, on obtient les composantes

Fig. 164.



tangentielle et centripète de la résultante (n° 105); donc, si l'on nomme α l'angle du rayon $\overline{OM}$ avec la verticale et l sa longueur constante, on a

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\alpha,$$

$$\frac{mv^2}{l} = N - mg\cos\alpha.$$

La première équation permet, comme on va le voir, de déterminer le mouvement; ensuite la seconde fera connaître la force $N = mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{\rho}$. Cette force pourra être produite par une ligne matérielle qui réunirait le point M au point O; la réaction de M sur cette ligne la mettrait en état de tension, puisqu'elle agirait en sens contraire de N, suivant OM prolongé, autant du moins que l'angle α ne dépasserait pas l'angle droit. On pourrait donc, sous cette réserve, constituer la ligne avec un fil inextensible, dont la masse devra de plus être supposée négligeable, car autrement son poids aurait une certaine influence dans le mouvement du système total, et celui-ci n'aurait pas la simplicité idéale que nous voulons lui attribuer.

Occupons-nous maintenant de rechercher le mouvement du point M. Soit M_0 sa position initiale, telle que le rayon OM_0 fasse un angle donné $M_0OA = \alpha_0$ avec la verticale; le point est supposé abandonné sans vitesse, après avoir été amené en M_0. Comme l'arc $\overline{M_0M}$ s'exprime par $l(\alpha_0 - \alpha)$, on en déduit

$$v = -l\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{dv}{dt} = -l\frac{d^2\alpha}{dt^2};$$

donc on a, en vertu de la première équation ci-dessus,

$$(1) \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\alpha.$$

Multipliant les deux membres par $2d\alpha$ et intégrant, nous trouvons

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\alpha + \text{const.},$$

ou, si l'on tient compte de ce que la vitesse v et $\frac{d\alpha}{dt}$ sont nulles en M_0,

$$(2) \qquad \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\alpha - \cos\alpha_0).$$

On peut remarquer que le premier membre de cette équation, multiplié par ml^2, exprime l'accroissement de la force vive du point dans le parcours M_0M; le second, multiplié par le même facteur, devient

$$2mgl(\cos\alpha - \cos\alpha_0) \quad \text{ou} \quad 2mg(\overline{OB} - \overline{OB_0}),$$

c'est-à-dire le double du travail de la force verticale mg dans le même parcours. L'équation (2) n'est donc pas autre chose que le résultat de l'application du théorème des forces vives (n° 109), car le travail de N est toujours nul; on aurait pu, par conséquent, poser immédiatement cette équation. Elle permet déjà de constater une propriété du mouvement. L'angle α va commencer à décroître, parce que, autrement, $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ devrait prendre des valeurs négatives, ce qui est impossible; pendant que α décroît de α_0 à o, $\frac{d\alpha}{dt}$ et v vont en croissant; lorsque α continue à décroître et passe au négatif, $\cos\alpha$ reprend les mêmes valeurs que dans le parcours M_0A, de sorte que la vitesse est la même pour deux points M et M' symétriquement situés de part et d'autre de la verticale OA; le mouvement du point sur sa trajectoire conserve d'ailleurs le même sens, jusqu'à ce que la vitesse, progressivement décroissante à mesure que M s'élève, repasse par la valeur o. C'est ce qui a lieu pour la position M'_0, prise à la hauteur de M_0. Le point mobile se trouve alors dans les mêmes conditions qu'au point de départ; il va donc revenir en M_0, en passant par des vitesses de même grandeur et de sens contraire, après quoi il reviendra encore en M'_0, et ainsi de suite indéfiniment. Le mouvement est oscillatoire, et, comme toutes les oscillations présentent des circonstances identiques, il suffit d'étudier le passage de M_0 à M'_0, en faisant varier α de α_0 à $-\alpha_0$.

Pour cela, nous tirerons d'abord de l'équation (2)

$$(3) \qquad dt = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos\alpha - \cos\alpha_0}};$$

le signe — donné au radical se justifie, parce que α décroît quand t augmente. L'intégration de cette relation sous forme finie exigerait l'emploi des fonctions elliptiques; mais on peut l'éviter en supposant les angles α et α_0 assez petits pour rendre négligeables leurs puissances au delà de la troisième. Alors on aura

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \ldots, \quad \cos\alpha_0 = 1 - \frac{\alpha_0^2}{2} + \ldots,$$

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}},$$

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \operatorname{arc\,cos} \frac{\alpha}{\alpha_0},$$

sans constante dans la dernière équation, parce que t doit être nul pour $\alpha = \alpha_0$, ce qui aura lieu pourvu que l'arc soit censé le plus petit des arcs positifs ayant leur cosinus égal à $\frac{\alpha}{\alpha_0}$. On déduit de là

$$(4) \qquad \alpha = \alpha_0 \cos t \sqrt{\frac{g}{l}},$$

ce qui définit α en fonction du temps.

Si l'on veut avoir le temps T d'une oscillation entre les positions M_0 et M'_0 (dans l'un ou l'autre sens), il faudra faire, dans l'avant-dernière équation $\alpha = -\alpha_0$ et $\operatorname{arc\,cos}(-1) = \pi$; donc

$$(5) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

ce qui montre que les petites oscillations ont une durée indépendante de leur amplitude.

Nous ne chercherons pas à exprimer α en fonction de t dans le cas où l'amplitude des oscillations ne serait pas très petite;

nous chercherons seulement ce que devient le temps T. Pour cela posons

$$x = 1 - \cos\alpha, \quad b = 1 - \cos\alpha_0,$$

$$dx = \sin\alpha\, d\alpha, \quad d\alpha = \frac{dx}{\sin\alpha} = \frac{dx}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}};$$

la substitution de la variable x à α dans l'équation (3) donnera

$$\begin{aligned} dt &= -\sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{dx}{\sqrt{(2x-x^2)(b-x)}} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)\left(1-\frac{x}{2}\right)}}, \end{aligned}$$

et, attendu que $\frac{T}{2}$ exprime le temps du parcours M_0A, égal pour cause de symétrie à celui du parcours AM'_0,

$$\frac{1}{2}T = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_b^0 \frac{dx}{\sqrt{(bx-x^2)\left(1-\frac{x}{2}\right)}}.$$

ou enfin

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^b \frac{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{bx - x^2}}. \tag{6}$$

L'intégrale qui entre dans le second membre de l'équation (6) peut se développer en une série ordonnée suivant les puissances croissantes de b. On a, en effet,

$$\begin{aligned} \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^2}{4} + \ldots \\ + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{x^n}{2^n} + \ldots, \end{aligned}$$

série convergente même dans le cas où α dépasserait $\frac{\pi}{2}$, car

x ne peut dépasser la limite 2, et $\frac{x}{2}$ ne dépasse pas l'unité. Donc, si l'on porte cette expression de $\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ dans l'équation (6) et que l'on pose d'une manière générale, n étant un nombre entier quelconque,

$$A_n = \int_0^b \frac{x^n\,dx}{\sqrt{bx-x^2}},$$

on trouvera

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} T = \sqrt{\frac{l}{g}}\Big[A_0 + \frac{1}{2}\frac{A_1}{2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{A_2}{4} + \ldots \\ + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\frac{A_n}{2^n} + \ldots\Big]. \end{aligned} \right.$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer les diverses intégrales définies représentées par A_0, A_1, A_2, ..., A_n, ... Or on peut les ramener toutes à la première.

On a, en effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\sqrt{bx-x^2}\right) &= (n-1)x^{n-2}\sqrt{bx-x^2} + \frac{x^{n-1}(b-2x)}{2\sqrt{bx-x^2}} \\ &= \frac{(2n-1)bx^{n-1}-2nx^n}{2\sqrt{bx-x^2}}. \end{aligned}$$

Multiplions par dx les deux membres de cette égalité et intégrons de 0 à b; comme $x^{n-1}\sqrt{bx-x^2}$, intégrale indéfinie du premier membre, s'annule aux deux limites (pourvu que n ne descende pas au-dessous de 1), nous trouverons ainsi

$$(2n-1)bA_{n-1} - 2nA_n = 0,$$

soit

$$A_n = \frac{2n-1}{2n}bA_{n-1}.$$

Faisant successivement, dans cette relation, n égal à

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,$$

on en tire

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} A_0 b,\\
A_2 &= \frac{3}{4} A_1 b = \frac{1.3}{2.4} A_0 b^2,\\
A_3 &= \frac{5}{6} A_2 b = \frac{1.3.5}{2.4.6} A_0 b^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_n &= \frac{2n-1}{2n} A_{n-1} b = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} A_0 b^n.
\end{aligned}$$

D'un autre côté, la valeur de A_0 s'obtient bien facilement. On a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4} - \left(\frac{b}{2} - x\right)^2}}$$

$$= -\int \frac{d\left(1 - \frac{2x}{b}\right)}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{2x}{b}\right)^2}} = \operatorname{arc\,cos}\left(1 - \frac{2x}{b}\right);$$

si donc on prend les intégrales entre o et b, il viendra

$$\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{bx-x^2}} = A_0 = \operatorname{arc\,cos}(-1) - \operatorname{arc\,cos} 1 = \pi.$$

Toutes les intégrales définies A_n sont donc maintenant connues; leur substitution dans l'expression (7) de T conduit au résultat final

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\Big\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{b}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \ldots \\ + \left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\right]^2 \left(\frac{b}{2}\right)^n + \ldots \Big\}. \end{aligned}\right.$$

Quand on suppose l'amplitude α_0 très petite, b est très voisin de o, et cette formule donne $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, comme nous

l'avions trouvé directement. Si l'on veut exprimer T avec une approximation plus grande en fonction de α_0, on fera dans la formule (8)

$$b = 1 - \cos\alpha_0,$$

ou, en considérant comme négligeable la quatrième puissance de α_0,

$$b = \frac{\alpha_0^2}{2};$$

on trouvera ainsi

$$\text{(9)} \qquad T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16}\right).$$

Effet de la résistance de l'air sur l'amplitude et la durée des petites oscillations. — Conformément à ce qui a déjà été fait dans une autre occasion (n° 115), on admettra que, pour tenir compte de la résistance de l'air, il faut : 1° remplacer g par une valeur plus petite, $g' = g(1 - \rho)$, en désignant par ρ le rapport, ordinairement très petit, entre la densité de l'air et la densité moyenne du pendule; 2° introduire une force agissant sur le pendule en sens contraire de la vitesse et exprimée par $mg'\frac{v^2}{k^2}$. Si l'on modifie, d'après cette indication, la valeur de la force tangentielle, l'équation (1) ci-dessus devient

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g'}{l}\sin\alpha + \frac{g'l}{k^2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$$

ou, plus simplement,

$$\text{(10)} \qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g'}{l}\sin\alpha + p\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2,$$

le coefficient p étant défini par la relation $p = \frac{g'l}{k^2}$.

Maintenant, on suppose le pendule abandonné à lui-même, avec un écart initial α_0, et l'on demande : 1° son plus grand écart α_0' de l'autre côté de la verticale, à la fin de la première oscillation; 2° le temps de cette première oscillation. Après

avoir résolu ces questions, il est bien évident qu'on pourra, par l'application des mêmes formules, trouver l'amplitude et la durée de l'oscillation suivante, car il suffira de remplacer α_0 par α'_0; puis on passerait de la seconde à la troisième, et ainsi de suite.

Afin d'éviter un calcul trop compliqué, nous supposerons que le coefficient p est assez petit pour qu'on soit autorisé à négliger son carré; dès lors le terme correctif $p\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2$ de l'équation (10) peut être évalué en prenant pour valeur de la vitesse angulaire $\frac{d\alpha}{dt}$ celle qui aurait lieu si p devenait égal à o. Or cette valeur est donnée par l'équation (2), sauf qu'on doit y remplacer g par g'; sa substitution dans l'équation (10) donne

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g'}{l}\sin\alpha + \frac{2pg'}{l}(\cos\alpha - \cos\alpha_0),$$

ou encore, dans le cas où α reste très petit,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g'\alpha}{l} + \frac{pg'}{l}(\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Intégrant, après avoir multiplié par $2d\alpha$, on trouve

$$(11)\quad \begin{cases} \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{g'}{l}(\alpha_0^2 - \alpha^2) + \frac{2pg'}{3l}[3\alpha_0^2(\alpha - \alpha_0) - \alpha^3 + \alpha_0^3] \\ \qquad = \frac{g'}{l}(\alpha_0 - \alpha)\left[\alpha_0 + \alpha + \frac{2p}{3}(\alpha^2 + \alpha\alpha_0 - 2\alpha_0^2)\right]. \end{cases}$$

Les limites de l'oscillation répondent à $\frac{d\alpha}{dt} = 0$, c'est-à-dire aux positions où la vitesse devient nulle; cela se produit d'abord pour $\alpha = \alpha_0$, ce que nous savions d'avance, puisque le pendule avait été abandonné sans vitesse initiale, dans la position définie par $\alpha = \alpha_0$. Pour avoir l'autre limite, on résoudra l'équation du second degré en α

$$\alpha_0 + \alpha + \frac{2p}{3}(\alpha^2 + \alpha\alpha_0 - 2\alpha_0^2) = 0,$$

qui a deux racines α', α'', exprimées par les formules

$$\alpha' = \frac{3}{4p}\left(-1 - \frac{2p\alpha_0}{3} + \sqrt{1 - \frac{4p\alpha_0}{3} + 4p^2\alpha_0^2}\right),$$

$$\alpha'' = \frac{3}{4p}\left(-1 - \frac{2p\alpha_0}{3} - \sqrt{1 - \frac{4p\alpha_0}{3} + 4p^2\alpha_0^2}\right),$$

ou, en bornant l'approximation aux termes contenant la première puissance de p,

$$(12)\qquad \begin{cases} \alpha' = -\alpha_0 + \dfrac{4p\alpha_0^2}{3}, \\ \alpha'' = -\dfrac{3}{2p} - \dfrac{4p\alpha_0^2}{3}. \end{cases}$$

Ces deux racines sont négatives; la première est légèrement inférieure à α_0 en valeur absolue; la seconde est très grande en raison de la petitesse de p. C'est donc la première qui fournit la limite cherchée, car le pendule arrive sans vitesse à la position $\alpha = \alpha'$ et il ne peut aller plus haut, puisque son poids tend toujours à le faire redescendre.

Ainsi se trouve résolue la première partie du problème que nous nous sommes posé. Si l'on nomme α_0, α'_0, α''_0, ... les angles d'écart successifs pris en valeur absolue, il résulte du calcul précédent qu'on aura

$$\alpha'_0 = \alpha_0 - \frac{4p\alpha_0^2}{3},$$

$$\alpha''_0 = \alpha'_0 - \frac{4p\alpha_0'^2}{3},$$

$$\alpha'''_0 = \alpha''_0 - \frac{4p\alpha_0''^2}{3},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ce qui permet de déduire tous ces angles du premier.

Cherchons maintenant le temps nécessaire pour passer de α_0 à α', c'est-à-dire pour accomplir la première oscillation. Nous mettrons d'abord le facteur entre crochets dans le second membre de l'équation (11) sous la forme

$$\frac{2p}{3}(\alpha - \alpha')(\alpha - \alpha'').$$

Le facteur $\frac{2p}{3}(\alpha - \alpha'')$ devient, en remplaçant α'' par sa valeur,

$$1 + \frac{2p\alpha}{3} + \frac{8p^2\alpha_0^2}{9};$$

il diffère donc toujours très peu de l'unité, et, par conséquent, l'équation (11) peut, sans erreur sensible, se réduire à

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{g'}{l}(\alpha_0 - \alpha)(\alpha - \alpha').$$

On en tire

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{g'}}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha - \alpha')}}$$

et, en intégrant,

$$T = -\sqrt{\frac{l}{g'}}\int_{\alpha_0}^{\alpha'} \frac{d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha - \alpha')}}.$$

Or on a

$$\int \frac{-d\alpha}{\sqrt{(\alpha_0 - \alpha)(\alpha - \alpha')}} = \int \frac{-d\alpha}{\sqrt{-\alpha^2 + \alpha(\alpha_0 + \alpha') - \alpha_0\alpha'}}$$
$$= \int \frac{-d\alpha}{\sqrt{\frac{1}{4}(\alpha_0 - \alpha')^2 - [\alpha - \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha')]^2}}$$
$$= \arccos \frac{2\alpha - (\alpha_0 + \alpha')}{\alpha_0 - \alpha'};$$

donc, en prenant l'intégrale entre les limites,

$$T = \sqrt{\frac{l}{g'}}\,[\arccos(-1) - \arccos 1] = \pi\sqrt{\frac{l}{g'}}.$$

Le temps de la première oscillation est donc indépendant de p, c'est-à-dire de cette partie de la résistance de l'air qui est proportionnelle au carré de la vitesse; et, comme ce temps ne dépend pas non plus de l'écart primitif α_0 (pourvu que celui-ci soit petit), il restera encore le même pour les oscillations suivantes.

On voit, en résumé, qu'on tient suffisamment compte de la résistance du milieu fluide, en ce qui concerne le calcul du temps T des petites oscillations d'un pendule circulaire simple,

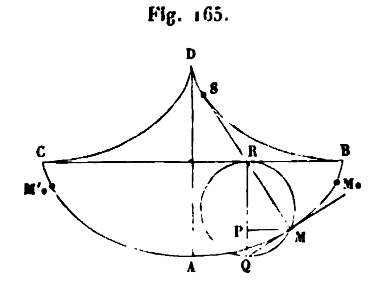
si l'on remplace dans la formule (5) la constante g par une valeur un peu moindre g', égale à $g(1-\rho)$, ce qui conduit à la nouvelle formule

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g(1-\rho)}}.$$

Ce temps aurait donc subi une augmentation, d'ailleurs peu sensible, quand le pendule est formé d'une petite lentille métallique, car alors ρ peut descendre à 1 ou 2 dix-millièmes et même moins.

122. *Pendule cycloïdal.* — Le pendule cycloïdal se distingue du précédent en ce que le point matériel pesant M est assujetti à se mouvoir sur une cycloïde BAC (*fig.* 165) contenue

Fig. 165.



dans un plan vertical. Pour remplir cette condition, on peut concevoir qu'on ait établi deux cylindres horizontaux ayant pour sections droites les demi-cycloïdes BD, DC, dont la réunion constitue la développée de BAC. Un fil flexible et inextensible, de longueur égale à BD, sera attaché en D par une extrémité et au point M par l'autre. Le fil étant supposé toujours tendu, une partie telle que DS s'enroulera sur la développée, pendant que le bout M de la partie libre SM décrira la cycloïde BAC.

Le point matériel a d'abord été mis en M_0 sans vitesse initiale. Nous pouvons trouver sa vitesse v répondant à une position M quelconque, par l'application du théorème des forces vives. Si nous désignons par y_0 et y les hauteurs verticales des points M_0 et M au-dessus du point le plus bas A de la cy-

cloïde BAC, le travail du poids mg de M sera $mg(y_0 - y)$; le travail de la force exercée par le fil sera nul, parce que cette force agit toujours normalement au chemin élémentaire suivi par son point d'application. Donc l'équation (7) du n° 109 devient ici, après suppression du facteur $\frac{1}{2}m$,

$$v^2 = 2g(y_0 - y).$$

Cette équation montre que la vitesse croît de o jusqu'à un maximum $\sqrt{2gy_0}$ répondant au point A, puis décroît de ce maximum jusqu'à o, en repassant par les mêmes valeurs. Le point mobile, après avoir descendu le long de M_0A, remontera donc le long de AM'_0 jusqu'à la hauteur du point de départ; dans cette seconde partie de l'oscillation, les déplacements sont symétriques avec ceux de la première moitié, et, comme il y a des vitesses égales en deux points symétriques, il est clair que le temps total sera le même pour les deux parcours M_0A, AM'_0.

Nommons s la longueur de l'arc de courbe $\overline{AM}$ et r le rayon du cercle générateur de la cycloïde. Lorsque le point décrivant était en M, ce cercle occupait une position RMQ, telle que l'arc $\overline{RM} = \overline{RB}$; le centre instantané de rotation du cercle est alors son point de contact R avec BC, de sorte que les droites RM, MQ joignant M aux deux extrémités du diamètre vertical RQ sont la normale et la tangente à la cycloïde en M; par suite, on a

$$\frac{dy}{ds} = \cos MQR = \frac{\overline{MQ}}{2r}.$$

Or, en abaissant de M la perpendiculaire MP sur QR, on sait que

$$\overline{MQ}^2 = 2r.\overline{PQ} = 2ry;$$

donc l'expression de $\frac{dy}{ds}$ devient, eu égard à cette valeur de $\overline{MQ}$,

$$\frac{dy}{ds} = \frac{\sqrt{2ry}}{2r} = \sqrt{\frac{y}{2r}}.$$

On en déduit immédiatement

$$ds = \sqrt{2r}\,\frac{dy}{\sqrt{y}},$$

et, en intégrant,

$$s = 2\sqrt{2r}\sqrt{y} \quad \text{ou} \quad s^2 = 8ry,$$

sans constante, parce que s et y s'annulent simultanément.

La substitution de $\frac{s^2}{8r}$ à la place de y dans la valeur ci-dessus trouvée de la vitesse donne

$$v^2 = \frac{g}{4r}(s_0^2 - s^2),$$

d'où résulte

$$v = -\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{g}{4r}}\sqrt{s_0^2 - s^2},$$

$$dt = -\sqrt{\frac{4r}{g}}\,\frac{ds}{\sqrt{s_0^2 - s^2}},$$

$$t = \sqrt{\frac{4r}{g}}\arccos\frac{s}{s_0} + \text{const}.$$

La constante de la dernière équation est nulle, quand on compte le temps depuis l'époque où le mobile est en M_0, et alors on a

$$s = s_0 \cos t\sqrt{\frac{g}{4r}}.$$

Le temps total de l'oscillation T peut se déterminer, soit en faisant $s = -s_0$, soit en faisant $s = 0$ et doublant la durée correspondante. On trouve

$$\cos T\sqrt{\frac{g}{4r}} = -1 \quad \text{ou} \quad \cos\frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{4r}} = 0,$$

d'où l'on conclut

$$T = \pi\sqrt{\frac{4r}{g}}.$$

Ce résultat est remarquable en ce qu'il ne dépend pas de la position initiale M_0; les grandes oscillations s'effectuent dans

le même temps que les petites. Pour cette raison, on dit que la cycloïde est une courbe *tautochrone.*

Parmi toutes les courbes contenues dans un plan vertical et symétriques relativement à la verticale du point le plus bas, la cycloïde est la seule qui jouisse de cette propriété. C'est un fait depuis longtemps connu, dont on a donné diverses démonstrations; en voici une fort simple.

En vertu de l'équation

$$-\frac{ds}{dt}=\sqrt{2g(y_0-y)},$$

qui donne la valeur de la vitesse, on a, pour le temps de la descente,

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{y_0}^{0}\frac{-ds}{\sqrt{y_0-y}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{y_0}\frac{ds}{\sqrt{y_0-y}}.$$

Or supposons la courbe définie par une équation entre s et y, telle que

$$s=f(y),$$

et prenons, en outre, une variable auxiliaire $u=\frac{y}{y_0}$; la substitution de $f(y)$ et de uy_0, au lieu de s et de y, change l'expression de $\frac{1}{2}$ T en

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{1}\frac{f'(uy_0)y_0\,du}{\sqrt{y_0(1-u)}}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{1}\frac{f'(uy_0)\sqrt{uy_0}\,du}{\sqrt{u(1-u)}},$$

laquelle, en posant, comme définition d'une nouvelle fonction $\psi(x)$,

$$\psi(x)=\sqrt{x}\,f'(x),$$

se met encore sous la forme

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_{0}^{1}\frac{\psi(uy_0)\,du}{\sqrt{u(1-u)}}.$$

Si l'on veut que le temps $\frac{1}{2}$ T reste le même quand y_0 varie, je dis que $\psi(uy_0)$ doit se réduire à une constante. En effet,

s'il en était différemment, on pourrait prendre y_0 assez petit pour que, entre $u=0$ et $u=1$, la dérivée $\psi'(uy_0)$ conservât toujours le même signe; alors un changement de y_0 ferait varier dans le même sens tous les éléments de l'intégrale, et, par conséquent, celle-ci ne pourrait conserver la même valeur, ce qui entraînerait aussi le changement de $\frac{1}{2}$ T. Donc nous devons poser

$$\sqrt{y}f'(y) = \text{const.} = C,$$

d'où résulte

$$f'(y) = \frac{C}{\sqrt{y}} \quad \text{et} \quad f(y) = 2C\sqrt{y},$$

sans terme constant dans le second membre, si l'origine des s et celle des y sont placées au même point, ce qu'on est toujours libre de supposer.

Donc, enfin, la courbe cherchée est représentée par l'équation

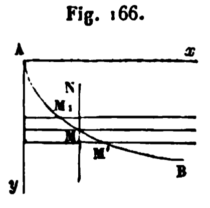
$$s = 2C\sqrt{y} \quad \text{ou} \quad s^2 = 4C^2y;$$

c'est une forme connue (déjà employée plus haut) de l'équation d'une cycloïde, dont le sommet serait placé au point le plus bas de la trajectoire.

Remarques. — Nous avons admis que le fil DSM (*fig.* 162) serait toujours tendu. Si l'on cherchait, conformément à la théorie générale du n° 110, la force exercée par le point M sur ce fil, on verrait qu'elle a bien le sens voulu pour le tendre, car la composante normale du poids mg et la force centrifuge agissent toutes deux suivant le prolongement de SM.

123. *Brachistochrone d'un point pesant.* — Le point pesant M est assujetti à descendre, sans vitesse initiale, le long d'une courbe AB (*fig.* 166), dont les extrémités A et B sont invariablement données. Parmi toutes les courbes, en nombre infini, qu'on peut imaginer entre A et B, on demande celle pour laquelle la durée totale du trajet entre ces deux points sera minimum. Cette courbe porte le nom de *brachistochrone*, qui se justifie par son étymologie grecque.

Fig. 166.



La solution du problème repose sur un théorème dû à Fermat, dont voici l'énoncé : *Si un point doit aller de* C *en* D (*fig.* 167) *en traversant un plan* HG, *et s'il se meut des deux côtés du plan avec des vitesses* v *et* v', *dont chacune est constante, le trajet exigeant le minimum de temps sera composé de deux lignes droites* CE, ED *qui déterminent un plan* CED *perpendiculaire à* HG *et qui font avec la normale* EN *à ce plan des angles* i, i' *vérifiant l'égalité*

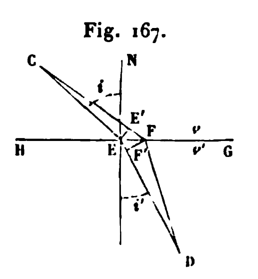


Fig. 167.

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i'}{v'}.$$

En effet : 1° si CE et DE n'étaient pas des lignes droites, on diminuerait la durée de chaque parcours en remplaçant l'arc par la corde, puisque, les vitesses restant les mêmes, il y aurait diminution dans la longueur du chemin; 2° la même chose aurait lieu en remplaçant le chemin brisé CED par sa projection sur le plan mené par C et D normalement à HG, dans le cas où le plan CED ne serait pas lui-même ce plan normal; 3° si l'on fait ensuite varier E infiniment peu et qu'on mette ce point en F, le parcours $\overline{\text{CE}}$ s'allongera d'une quantité $\overline{\text{FE}'} = \overline{\text{EF}} \sin i$, pendant que $\overline{\text{ED}}$ diminuera de $\overline{\text{EF}'} = \overline{\text{EF}} \sin i'$; donc la variation de la durée du trajet total sera

$$\overline{\text{EF}}\left(\frac{\sin i}{v} - \frac{\sin i'}{v'}\right),$$

et, comme cette variation doit être nulle dans le cas du minimum, on en conclut la dernière condition ci-dessus indiquée.

Cela posé, revenons à la brachistochrone et soit AB cette courbe (*fig.* 166). D'abord, elle doit se trouver contenue dans le plan vertical des points A et B; car, autrement, en remplaçant AB par sa projection sur ce plan, il est visible qu'on diminuerait la longueur du trajet; comme, d'un autre côté, l'application du théorème des forces vives fait reconnaître que la vitesse dépend seulement de la hauteur du point mo-

bile au-dessous d'un plan horizontal de comparaison ([1]), chaque élément de AB serait parcouru avec la même vitesse que sa projection et, par conséquent, ferait dépenser plus de temps que celle-ci; il y aurait donc bénéfice à remplacer AB par sa projection. Prenons maintenant pour axes coordonnés, dans le plan vertical de AB, l'horizontale et la verticale du point de départ A; soient M le point répondant aux coordonnées x et y, $\overline{MM_1}$, $\overline{MM'}$ deux éléments successifs de la courbe. Le travail de la pesanteur dans le parcours AM étant mgy, on a, en vertu du théorème des forces vives, pour la vitesse v de M,

$$v = \sqrt{2gy};$$

on peut admettre que $\overline{M_1M}$ sera parcouru avec cette vitesse et que $\overline{MM'}$ le sera avec la vitesse

$$v + dv = \sqrt{2g}(\sqrt{y} + d\sqrt{y}).$$

D'un autre côté, ces éléments font avec la verticale MN, normale au plan horizontal de M, des angles i, i' ayant pour sinus $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dx}{ds} + d\frac{dx}{ds}$; or le théorème de Fermat, rappelé tout à l'heure, assujettit les deux éléments $\overline{MM_1}$, $\overline{MM'}$ à la condition que le rapport

$$\frac{\sin i}{v} \quad \text{ou} \quad \frac{\frac{dx}{ds}}{\sqrt{2gy}}$$

prenne la même valeur sur chacun d'eux; car, sans cela, on pourrait, en changeant la position du point M sur son horizontale (sans changer celles de M_1 et M'), diminuer la durée du parcours M_1MM' et, par conséquent, celle du parcours total, ce qui est incompatible avec l'hypothèse du minimum. La différentielle de l'expression $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dx}{ds}$ est donc nulle quand

([1]) On suppose toujours que les obstacles en vertu desquels le point est obligé de suivre la courbe AB produisent, au total, une force normale à la courbe.

on passe d'un élément au suivant, et, par suite, cette quantité reste constante pour tous les points de AB.

On déduit de là, en désignant par C une constante,

$$\sqrt{\frac{y}{C}} = \frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}.$$

Cette dernière équation donne

$$ds = \frac{dy}{\sqrt{1 - \frac{y}{C}}},$$

d'où résulte, par une intégration,

$$s = -2\sqrt{C(C-y)} + \text{const.}$$

La constante qu'on vient d'introduire aura pour valeur $2C$, si les arcs s sont comptés depuis le point A, car s et y devront s'annuler simultanément; on aurait alors finalement l'équation

$$s = 2C - 2\sqrt{C(C-y)},$$

qu'on peut écrire aussi

(1) $$(2C - s)^2 = 4C(C-y);$$

ou bien, en transportant l'origine au point de la courbe défini par les valeurs particulières

$$s = 2C, \quad y = C$$

et posant

$$s' = 2C - s, \quad y' = C - y,$$

on mettrait l'équation sous la forme

(2) $$s'^2 = 4Cy',$$

qui représente, comme on le sait, une cycloïde dont le cercle générateur a C pour diamètre.

On remarquera que $\frac{dy}{dt}$ est égal à 1 pour $y = 0$; donc le cercle sera tangent en A à la verticale Ay. En le faisant rouler sur l'horizontale Ax, son point A décrit la brachistochrone cher-

chée. Le diamètre C devrait se déterminer, de manière à faire passer la courbe par le point donné B.

Les résultats obtenus aux nos 122 et 123 montrent que la cycloïde jouit de deux propriétés mécaniques fort remarquables; elle est à la fois tautochrone et brachistochrone. Nous devons ajouter que ces propriétés n'ont jamais été utilisées d'une manière quelconque. Celle du tautochronisme aurait cependant de l'intérêt pour l'horlogerie; mais on a dû renoncer à s'en servir, en raison de l'impossibilité, bien vite reconnue pratiquement, de construire des appareils remplissant exactement toutes les conditions supposées par la théorie.

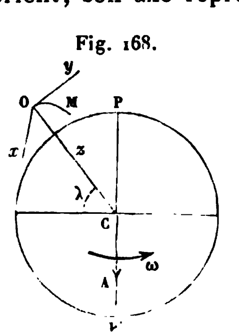
124. *Mouvement relatif d'un point pesant à la surface de la Terre.* — D'après la théorie exposée au n° 113, la force capable de produire l'accélération d'un point pesant, dans son mouvement relatif à la surface de la Terre, est la résultante : 1° de toutes les forces réelles qui agissent sur lui; 2° de la force qui produirait son accélération d'entraînement changée de sens; 3° de la force centrifuge composée. Parmi les forces réelles, on peut ensuite considérer à part les attractions exercées sur le point par la Terre et par tous les corps célestes; la résultante de ces attractions, composée avec la force qui constitue le second des trois groupes ci-dessus, donne ce que nous avons appelé (n° 114) *le poids du corps*, ordinairement désigné par la notation mg. Donc, en résumé, dans les mouvements relatifs dont nous voulons nous occuper ici, l'accélération relative sera produite par le poids, joint aux forces réelles qui ne proviennent pas de la gravitation universelle et à la force fictive qu'on nomme *force centrifuge composée*.

Nous allons appliquer ces indications générales à deux exemples.

(*a*) *Chute libre d'un point pesant, dans le vide.* — Nous rapporterons les positions successives du point à un système d'axes coordonnés fixes relativement à la Terre, dont l'origine sera placée en O (*fig.* 168), position du point mobile à l'époque $t = 0$. L'axe des x est une perpendiculaire au plan méridien de MO, dirigée vers l'est; l'axe des y, tangent à la méridienne du même point O, se dirige vers le nord; l'axe des z est une verticale descendante, qui passe au centre C de

la Terre supposée sphérique. On sait que la rotation de la Terre se fait autour de la ligne des pôles PP′, d'occident en orient; son axe représentatif (n° 35) sera une ligne $\overline{CA}$, de longueur égale à la vitesse angulaire ω, portée dans le sens nord-sud, afin qu'un spectateur ayant la tête en A et les pieds en C voie tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. Si nous appelons λ la latitude boréale du point O ou M ([1]), les composantes de cette rotation suivant les axes coordonnés auront pour valeurs

Fig. 168.



$$0, \quad -\omega\cos\lambda, \quad \omega\sin\lambda\,;$$

par suite, les formules du n° 40 donnent pour les composantes de l'accélération centrifuge composée,

$$2\omega\sin\lambda\,\frac{dy}{dt} + 2\omega\cos\lambda\,\frac{dz}{dt}, \qquad -2\omega\sin\lambda\,\frac{dx}{dt}, \qquad -2\omega\cos\lambda\,\frac{dx}{dt}.$$

D'ailleurs, le poids se réduit à une force mg suivant l'axe des z.

On peut alors appliquer au mouvement relatif les équations (2) du n° 104, qui deviennent, par la suppression du facteur m,

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega\sin\lambda\,\frac{dy}{dt} + 2\omega\cos\lambda\,\frac{dz}{d}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\,2\omega\sin\lambda\,\frac{dx}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - 2\omega\cos\lambda\,\frac{dx}{dt}. \end{aligned}\right.$$

L'intégration de ces équations ne présente aucune difficulté notable et pourrait faire connaître x, y, z en fonction du temps. Toutefois, en raison de ce que l'exposé de la méthode à suivre supposerait la connaissance du Cours d'Analyse de

---

([1]) Nos calculs s'appliquent spécialement à l'hémisphère boréal; pour les étendre à l'hémisphère austral, il faudrait attribuer à λ des valeurs négatives.

seconde année, et aussi pour diminuer les calculs nécessaires, nous nous contenterons d'une approximation. La vitesse angulaire ω est un nombre très petit, égal (nº 114) à $\frac{2\pi}{86164}$ ou 0,0000729; dès lors, il semble permis de négliger ses puissances, à partir de la seconde inclusivement. Quand nous avons étudié plus haut (nºˢ 115 et 116) le mouvement d'un point pesant dans le vide, nous n'avons eu égard qu'au poids mg et avons laissé totalement de côté l'effet de la force centrifuge composée, ce qui revenait à négliger ω; nous allons maintenant approcher davantage de l'exactitude, en ne négligeant plus que ω^2.

Soient a, b, c les trois composantes de la vitesse relative initiale, c'est-à-dire les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ pour $t=0$, valeur à laquelle répondent $x=0$, $y=0$, $z=0$, d'après la définition des axes. Une première intégration des deux dernières équations (1) donne

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = b - 2\omega x \sin\lambda, \\ \dfrac{dz}{dt} = c + gt - 2\omega x \cos\lambda; \end{cases}$$

portant ces valeurs dans la première équation et négligeant les termes en ω^2, il vient

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega(b\sin\lambda + c\cos\lambda) + 2\omega gt\cos\lambda.$$

On déduit de là, par deux intégrations successives,

$$\frac{dx}{dt} = a + 2\omega t(b\sin\lambda + c\cos\lambda) + \omega gt^2\cos\lambda,$$

$$(3)\qquad x = at + \omega t^2(b\sin\lambda + c\cos\lambda) + \frac{1}{3}\omega gt^3\sin\lambda.$$

Enfin, on substitue la valeur (3) de x dans les équations (2); on trouve, en continuant à négliger ω^2,

$$\frac{dy}{dt} = b - 2\omega at\sin\lambda, \quad \frac{dz}{dt} = c + gt - 2\omega at\cos\lambda,$$

d'où l'on tire, par une intégration,

$$(4) \qquad y = bt - \omega a t^2 \cos\lambda,$$

$$(5) \qquad z = ct + \frac{1}{2} g t^2 - \omega a t^2 \cos\lambda.$$

Les équations (3), (4) et (5) fournissent la solution complète du problème simplifié que nous nous sommes posé.

Dans le cas où le point serait supposé sans vitesse relative initiale, il faudrait faire $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; les équations deviennent alors

$$(6) \qquad x = \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos\lambda, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2} g t^2.$$

Si le temps ne prend pas de grandes valeurs, x reste toujours petit et, comme y est nul, on voit que le point tombe à peu près suivant la verticale de son point de départ. Cependant, il éprouve une petite déviation dans le sens des x positifs, c'est-à-dire vers l'est; l'étendue de cette déviation est donnée par la première des formules (6), ou encore par la suivante, obtenue en faisant $t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$,

$$(7) \qquad x = \frac{2\sqrt{2}\,\omega \cos\lambda}{3\sqrt{g}} z^{\frac{3}{2}}.$$

La déviation se trouve ainsi exprimée en fonction de la hauteur de chute z.

M. Reich a fait, dans un puits de mine à Freyberg, des expériences qui permettent d'essayer une vérification de cette formule. La latitude λ était de 51° et la hauteur z de $158^{m},5$; avec ces données, on trouve par la formule (7) la déviation orientale $x = 0^{m},0276$, tandis que l'expérience a donné moyennement $0^{m},0283$, ce qui diffère bien peu du résultat théorique.

Supposons encore un corps lancé verticalement avec une vitesse initiale ascendante v_0; il faut faire $a = 0$, $b = 0$, $c = -v_0$, ce qui donne

$$x = -\omega v_0 t^2 \cos\lambda + \frac{1}{3} \omega g t^3 \cos\lambda, \quad y = 0, \quad z = -v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

Quand le point cessera de monter, on aura $\frac{dz}{dt} = 0$ et $t = \frac{v_0}{g}$, d'où résultent les valeurs particulières

$$x = -\frac{2v_0^3}{3g^2}\omega\cos\lambda, \quad z = -\frac{v_0^2}{2g}.$$

En désignant par h la hauteur de l'ascension, en valeur absolue, soit $\frac{v_0^2}{2g}$, la déviation à l'époque $\frac{v_0}{g}$ devient

$$(8) \qquad x = -\frac{2\omega\cos\lambda}{3g^2}(2gh)^{\frac{3}{2}} = -\frac{4\sqrt{2}\,\omega\cos\lambda}{3\sqrt{g}}h^{\frac{3}{2}}.$$

A égalité de hauteur verticale parcourue, le point lancé de bas en haut s'est dévié deux fois plus, quand il cesse de monter, que le point tombant sans vitesse initiale; de plus, la déviation a lieu en sens contraire dans les deux cas, c'est-à-dire vers l'ouest si le point monte, vers l'est s'il descend. La comparaison des formules (7) et (8) rend ces conclusions évidentes.

Si le mouvement présente successivement les deux phases qu'on vient d'étudier, c'est-à-dire une ascension suivie d'une descente, pendant une durée totale $\frac{2v_0}{g}$, on constate que $-\frac{dx}{dt}$ reste toujours positif, et par conséquent que l'écart $-x$ s'accroît toujours dans le même sens, vers l'ouest, jusqu'à l'époque où le mobile est revenu à son point de départ. La déviation occidentale est alors double de celle que donne la formule (8); puis elle décroît, si le corps continue à descendre au-dessous de son niveau primitif, s'annule pour $t = \frac{3v_0}{g}$, $z = \frac{3v_0^2}{2g}$, et change ensuite de signe, pour tendre de nouveau vers l'est et grandir sans limite.

(*b*) *Théorie de l'expérience de Foucault sur le pendule.* — Les axes de coordonnées, fixes relativement à la Terre, étant ceux de la *fig.* 165, à part cette différence que l'origine ne sera plus en coïncidence avec une des positions du point mobile, imaginons un point pesant attaché à cette origine par

une droite inextensible et sans masse, de manière à constituer un pendule circulaire simple. Soit N la tension de cette ligne, ou la force qu'elle exerce sur le point; ses composantes suivant les axes seront, en nommant l la longueur du pendule,

$$-\frac{Nx}{l},\quad -\frac{Ny}{l},\quad -\frac{Nz}{l};$$

d'ailleurs le poids et les composantes de la force centrifuge composée auraient les mêmes expressions que dans le problème qu'on vient de traiter; par suite, si l'on applique encore au mouvement relatif les équations (2) du n° 104, on trouvera ici

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{Nx}{ml} \qquad + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} + 2\omega\cos\lambda\frac{dz}{dt},\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{Ny}{ml} \qquad - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt},\\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{Nz}{ml} + g - 2\omega\cos\lambda\frac{dx}{dt}, \end{aligned}\right.$$

à quoi il faudrait joindre

$$(10)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

et l'on aurait ainsi quatre équations permettant de déterminer les quatre inconnues x, y, z, N en fonctions du temps.

Sans essayer de pousser plus loin le calcul, nous allons déduire des équations (9) une propriété remarquable du mouvement. On a, par l'élimination de N entre les deux premières,

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\sin\lambda\left(\frac{x\,dx + y\,dy}{dt}\right) + 2\omega\cos\lambda\frac{y\,dz}{dt},$$

relation dont nous pouvons négliger le dernier terme dans l'hypothèse de petites oscillations, parce que, dans ce cas, la vitesse relative du pendule est toujours sensiblement horizontale et $\frac{dz}{dt}$ très petit; alors cette relation se met sous la forme

$$\frac{d}{dt}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) = \omega\sin\lambda\frac{d}{dt}(x^2 + y^2)$$

ou encore, en intégrant,

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = (x^2 + y^2)\omega \sin\lambda + \text{const.} \tag{11}$$

Représentons maintenant à part le plan des xy (*fig.* 169) et imaginons que la projection P du pendule sur ce plan soit suivie par un rayon vecteur $\overline{OP} = r$; désignons en outre par θ l'angle de ce rayon avec Ox. Nous aurons

Fig. 169.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

et, par suite,

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

$$y\,dx - x\,dy = -r^2 d\theta,$$

valeurs qui, portées dans l'équation (11), la transforment en celle-ci :

$$-r^2\frac{d\theta}{dt} = r^2\omega\sin\lambda + \text{const.} \tag{12}$$

La détermination de la constante dépend des circonstances initiales. Pour adopter l'hypothèse qui donne lieu au calcul le plus simple, nous supposerons qu'à l'époque $t = 0$ on avait $r = 0$, c'est-à-dire que le pendule était alors en coïncidence avec l'axe des z, et qu'on l'en a écarté par une impulsion qui lui a communiqué une certaine vitesse. Dans ce cas, la constante sera nulle, puisque tous les autres termes de l'équation (12) s'annulent pour $t = 0$.

L'équation (12) se réduit, en conséquence, à

$$-r^2\frac{d\theta}{dt} = r^2\omega\sin\lambda, \quad \text{soit} \quad \frac{d\theta}{dt} = -\omega\sin\lambda.$$

Le produit $\omega\sin\lambda$ exprime la composante de la rotation terrestre autour de la verticale descendante du point de suspension; c'est une rotation dans le sens de Ox vers Oy, c'est-à-dire dans le sens est-nord-ouest-sud. La projection horizontale du pendule a une vitesse angulaire apparente $\frac{d\theta}{dt}$ égale en valeur absolue à cette composante, mais dans le sens opposé, celui qui va du nord à l'est, puis au sud et à l'ouest.

Comme la valeur numérique de $\omega \sin\lambda$ est toujours très petite et atteint au maximum 0,000072921, l'angle θ varie très peu pendant la courte durée d'une oscillation du pendule; celui-ci semble donc exécuter son oscillation dans un plan vertical, mais ce plan varie peu à peu en tournant autour de la verticale, avec la vitesse $\omega \sin\lambda$ et dans le sens nord-est-sud-ouest qui vient d'être indiqué. La durée d'un tour complet de ce plan serait $\frac{2\pi}{\omega \sin\lambda}$, c'est-à-dire $\frac{86164^s}{\sin\lambda}$, puisque $\frac{2\pi}{86164^s}$ est la valeur de la vitesse angulaire ω par 1^s. A Paris, avec $\lambda = 48°50'$, on a

$$\frac{2\pi}{\omega \sin\lambda} = 114458^s, \quad \text{soit} \quad 31^h 47^m 38^s.$$

Ces déductions théoriques se trouvent confirmées par une remarquable expérience de Foucault; on y trouve une preuve nouvelle de la rotation du globe terrestre.

Ici se termine la série des problèmes particuliers donnés comme exemples de la détermination du mouvement d'un point matériel. Nous avons successivement considéré des points libres, des points gênés par des obstacles et enfin des points en mouvement relatif, et l'on peut avoir ainsi une idée de la manière dont s'appliquent les divers théorèmes exposés dans le § I de ce Chapitre.

Nous allons maintenant commencer à nous occuper, non plus de points matériels isolés, mais de systèmes formés par la réunion en un seul corps d'un nombre quelconque de points matériels. En premier lieu, ces systèmes seront considérés à l'état de repos, sous l'action des forces appliquées à leurs divers points; on dit alors que ces forces se font équilibre, ou bien encore que le système est en équilibre. La recherche des conditions des lois de l'équilibre fait l'objet d'une partie de la Science, à laquelle on donne le nom de *Statique*.

TROISIÈME PARTIE.

STATIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORÈME DU TRAVAIL VIRTUEL.

§ I. — Équilibre des systèmes matériels quelconques.

125. *Travail virtuel d'une force.* — Lorsqu'une force agit sur un point en repos, son travail élémentaire, tel qu'il a été défini au n° 102, est sans cesse nul, car on doit faire $ds = 0$ dans l'expression générale $F ds \cos(F, ds)$. Mais on peut imaginer fictivement que le point se déplace infiniment peu à partir de sa position fixe, dans une direction quelconque; le déplacement qu'on lui donne ainsi par la pensée, et qui n'existe pas réellement, se nomme *déplacement virtuel.* On le distingue d'un déplacement réel en employant la caractéristique δ au lieu de d, et en désignant sa longueur infiniment petite par la notation δs.

Le travail d'une force F dans un déplacement virtuel δs de son point d'application se nomme *travail virtuel* de cette force; il aurait pour expression $F \delta s \cos(F, \delta s)$.

126. *Transformation de la condition d'équilibre d'un point matériel.* — Il résulte immédiatement du principe de l'inertie (n° 93), et du théorème sur la composition des forces appliquées à un même point (n° 100), que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point persévère dans l'état de repos consiste en ce que la résultante de toutes les forces agissant

sur lui doit être nulle. Comme on l'a fait observer déjà (nº 112), cela s'applique aussi bien au cas d'un point gêné par des obstacles qu'à celui d'un point libre, pourvu qu'on tienne compte des forces produites par les obstacles. Or, si la résultante des forces est nulle, son travail dans un déplacement virtuel quelconque sera aussi nul; et, réciproquement, la nullité du travail de la résultante dans un déplacement virtuel arbitraire entraînera la nullité de cette force, car le facteur δs est censé différent de o, et le cosinus de l'angle $(F, \delta s)$ ne peut être nul pour toutes les directions de δs. On a donc démontré ainsi le théorème dont voici l'énoncé :

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un point matériel est que le travail de la résultante des forces agissant sur ce point soit nul dans un déplacement virtuel quelconque.

On sait (nº 102) que le travail de la résultante est égal à la somme algébrique des travaux des composantes. On dira donc aussi que :

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un point matériel est que la somme algébrique des travaux des forces agissant sur lui soit nulle dans un déplacement virtuel quelconque.

En faisant varier la direction du déplacement virtuel, on tirerait de ce théorème une infinité d'équations, dont chacune serait une condition nécessaire de l'équilibre du point. L'ensemble de ces équations, en nombre infini, constituerait la condition nécessaire et suffisante; il est facile de voir qu'il peut se réduire à trois équations distinctes. Nommons, en effet, X, Y, Z les projections de la résultante sur trois axes rectangulaires, égales respectivement à la somme algébrique des projections des composantes; soient aussi δx, δy, δz les projections du déplacement virtuel δs sur les mêmes axes. Le travail virtuel qu'il s'agit d'égaler à o s'exprime (nº 102) par

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z;$$

pour que cette quantité soit nulle indépendamment de toute hypothèse sur la direction de δs ou sur les rapports entre

δx, δy, δz, il est évidemment nécessaire et suffisant que les coefficients de ces trois quantités soient nuls, c'est-à-dire qu'on ait

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \tag{1}$$

comme nous l'avons déjà trouvé par d'autres considérations (n° **112**).

127. *Condition générale de l'équilibre d'un système matériel quelconque.* — Lorsqu'un ensemble ou système de points matériels formant un corps quelconque est en équilibre, sous l'action de forces également quelconques, chaque point considéré isolément est lui-même en équilibre, sous l'action des forces qui le sollicitent et que nous pouvons diviser en deux classes : 1° les forces dites *extérieures,* qui sont produites par des corps non compris dans le système considéré, ces corps pouvant agir comme obstacles, corps attirants, ou de toute autre manière; 2° les actions mutuelles des points ou parties de ce système, auxquelles on donne le nom de *forces intérieures.* La résultante des forces, tant intérieures qu'extérieures, agissant sur chaque point est nulle, ainsi que la somme de leurs travaux dans un déplacement virtuel arbitraire qu'on attribuerait au point (n° **126**); donc on peut dire, en réunissant les travaux pour tous les points :

Il est nécessaire, pour l'équilibre de tout système matériel quelconque, que la somme totale des travaux des forces agissant sur tous ses points soit nulle, dans un déplacement virtuel arbitraire attribué à chacun d'eux.

Réciproquement, l'équilibre résulte de l'accomplissement de cette condition. En effet, puisque les déplacements virtuels des divers points sont arbitraires, nous pouvons les supposer tous nuls, à l'exception d'un seul; le travail virtuel des forces appliquées à ce point unique sera donc nul dans tout déplacement, et par conséquent ce point sera en équilibre (n° **126**). Nous raisonnerons de même sur tous les points pris successivement et reconnaîtrons qu'ils sont tous en équilibre. Donc :

La condition ci-dessus énoncée est suffisante aussi bien que nécessaire.

sur lui doit être nulle. Comme on l'a fait observer déjà (n° 112), cela s'applique aussi bien au cas d'un point gêné par des obstacles qu'à celui d'un point libre, pourvu qu'on tienne compte des forces produites par les obstacles. Or, si la résultante des forces est nulle, son travail dans un déplacement virtuel quelconque sera aussi nul; et, réciproquement, la nullité du travail de la résultante dans un déplacement virtuel arbitraire entraînera la nullité de cette force, car le facteur δs est censé différent de o, et le cosinus de l'angle $(F, \delta s)$ ne peut être nul pour toutes les directions de δs. On a donc démontré ainsi le théorème dont voici l'énoncé :

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un point matériel est que le travail de la résultante des forces agissant sur ce point soit nul dans un déplacement virtuel quelconque.

On sait (n° 102) que le travail de la résultante est égal à la somme algébrique des travaux des composantes. On dira donc aussi que :

La condition nécessaire et suffisante de l'équilibre d'un point matériel est que la somme algébrique des travaux des forces agissant sur lui soit nulle dans un déplacement virtuel quelconque.

En faisant varier la direction du déplacement virtuel, on tirerait de ce théorème une infinité d'équations, dont chacune serait une condition nécessaire de l'équilibre du point. L'ensemble de ces équations, en nombre infini, constituerait la condition nécessaire et suffisante; il est facile de voir qu'il peut se réduire à trois équations distinctes. Nommons, en effet, X, Y, Z les projections de la résultante sur trois axes rectangulaires, égales respectivement à la somme algébrique des projections des composantes; soient aussi δx, δy, δz les projections du déplacement virtuel δs sur les mêmes axes. Le travail virtuel qu'il s'agit d'égaler à o s'exprime (n° 102) par

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z;$$

pour que cette quantité soit nulle indépendamment de toute hypothèse sur la direction de δs ou sur les rapports entre

δx, δy, δz, il est évidemment nécessaire et suffisant que les coefficients de ces trois quantités soient nuls, c'est-à-dire qu'on ait

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \tag{1}$$

comme nous l'avons déjà trouvé par d'autres considérations (n° 112).

127. *Condition générale de l'équilibre d'un système matériel quelconque.* — Lorsqu'un ensemble ou système de points matériels formant un corps quelconque est en équilibre, sous l'action de forces également quelconques, chaque point considéré isolément est lui-même en équilibre, sous l'action des forces qui le sollicitent et que nous pouvons diviser en deux classes : 1° les forces dites *extérieures*, qui sont produites par des corps non compris dans le système considéré, ces corps pouvant agir comme obstacles, corps attirants, ou de toute autre manière; 2° les actions mutuelles des points ou parties de ce système, auxquelles on donne le nom de *forces intérieures*. La résultante des forces, tant intérieures qu'extérieures, agissant sur chaque point est nulle, ainsi que la somme de leurs travaux dans un déplacement virtuel arbitraire qu'on attribuerait au point (n° 126); donc on peut dire, en réunissant les travaux pour tous les points :

Il est nécessaire, pour l'équilibre de tout système matériel quelconque, que la somme totale des travaux des forces agissant sur tous ses points soit nulle, dans un déplacement virtuel arbitraire attribué à chacun d'eux.

Réciproquement, l'équilibre résulte de l'accomplissement de cette condition. En effet, puisque les déplacements virtuels des divers points sont arbitraires, nous pouvons les supposer tous nuls, à l'exception d'un seul; le travail virtuel des forces appliquées à ce point unique sera donc nul dans tout déplacement, et par conséquent ce point sera en équilibre (n° 126). Nous raisonnerons de même sur tous les points pris successivement et reconnaîtrons qu'ils sont tous en équilibre. Donc :

La condition ci-dessus énoncée est suffisante aussi bien que nécessaire.

geaient de sens et devenaient attractives, les travaux changeraient de signe et leur somme pareillement; pour la complète généralité de l'expression ci-dessus, il faut donc convenir de considérer comme négatives les forces d'attraction.

129. *Équations générales de l'équilibre.* — On sait (n° 127) que la somme des travaux virtuels de toutes les forces agissant sur les divers points d'un système matériel doit être nulle, lorsqu'on attribue à chaque point un déplacement virtuel absolument arbitraire, pourvu qu'on tienne compte de toutes les forces, quelle qu'en soit l'origine. Si l'on fait choix d'un déplacement virtuel particulier et qu'on applique cet énoncé, on aura entre les forces une relation à laquelle elles devront toujours satisfaire, dans l'hypothèse de l'équilibre; c'est-à-dire qu'on aura une des conditions nécessaires de l'équilibre. On peut d'ailleurs choisir ce déplacement de manière à faire disparaître les travaux de telle ou telle catégorie de forces, et arriver ainsi à des équations plus ou moins simples.

Supposons, par exemple, qu'on choisisse un déplacement tel que tous les points conservent entre eux les mêmes distances, ou, en d'autres termes, qu'on prenne un des déplacements qui pourraient avoir lieu si le système était solidifié et parfaitement libre de tout obstacle; on fera ainsi disparaître les forces intérieures et l'on obtiendra une relation entre les forces extérieures seules. En effet, si une force f est exercée par un point A du système, sur un autre point B qui en fait également partie, le principe fondamental de la réaction égale à l'action (n° 95) nous apprend que, réciproquement, le point B exerce sur A une autre force f égale et contraire à la première, de sorte que toutes deux agissent suivant la droite AB. Nous savons de plus (n° 128) que la somme des travaux de ces deux forces sera $\pm f\delta r$ (en nommant r la distance $\overline{AB}$), c'est-à-dire zéro dans le cas actuel, puisque r ne varie pas. Toutes les forces intérieures pourront ainsi être partagées en groupes de deux forces dont les travaux se détruiront algébriquement, et par conséquent leur travail total sera bien nul; donc on doit égaler à zéro la somme des travaux virtuels des forces extérieures seules, dans tout déplace-

ment qui sera, comme nous le supposons maintenant, compatible avec la solidification du système et sa complète liberté.

Un tel déplacement peut toujours être considéré comme composé de six déplacements particuliers (n° 38), savoir : trois translations parallèlement à trois axes coordonnés et trois rotations autour des mêmes axes. Nous prendrons un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz et nous appellerons

δa, δb, δc les trois translations;
$\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ les trois rotations.

Soit, en outre, F une quelconque des forces extérieures, ayant X, Y, Z pour projections sur les trois axes et x, y, z pour coordonnées de son point d'application.

La définition du travail (n° 102) nous montre d'abord immédiatement que le travail de F, dans chacune des trois translations δa, δb, δc attribuées à son point d'application, a pour valeur

$$X\delta a, \quad Y\delta b, \quad Z\delta c.$$

Pour avoir le travail dans l'une des rotations, il faut faire le produit du moment de la force relativement à l'axe par le déplacement angulaire (n° 102). Or les trois moments de F s'expriment (n° 103) par

$$Zy - Yz, \quad Xz - Zx, \quad Yx - Xy;$$

donc les travaux de cette force, dans les trois rotations $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$, seront respectivement

$$(Zy - Yz)\delta\lambda, \quad (Xz - Zx)\delta\mu, \quad (Yx - Xy)\delta\nu.$$

Par suite, comme le travail d'une force dans un déplacement résultant est égal (n° 102) à la somme de ses travaux dans les déplacements composants, on aura pour le travail de la force F

$$X\delta a + Y\delta b + Z\delta c + (Zy - Yz)\delta\lambda + (Xz - Zx)\delta\mu + (Yx - Xy)\delta\nu.$$

Sommant enfin les expressions analogues pour toutes les forces extérieures, on obtient leur travail total, dans le dépla-

cement dont il s'agit,

$$\delta a\Sigma X + \delta b\Sigma Y + \delta c\Sigma Z + \delta\lambda\Sigma(Zy - Yz) + \delta\mu\Sigma(Xz - Zx) + \delta\nu\Sigma(Yx - Xy),$$

car δa, δb, δc, $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ ne varient pas d'un point d'application à un autre et peuvent passer, comme facteurs communs, en dehors des signes sommatoires Σ.

Maintenant, si l'on veut écrire que cette somme de travaux est nulle, quel que soit le mouvement donné au système rendu solide, c'est-à-dire sans supposer aucune relation entre les six mouvements composants, il est évidemment nécessaire et suffisant d'annuler chacune des six sommes partielles dont elle se compose, ce qui donne les équations

$$(3)\qquad \Sigma X = 0,\quad \Sigma Y = 0,\quad \Sigma Z = 0,$$

$$(4)\qquad \Sigma(Zy - Yz) = 0,\quad \Sigma(Xz - Zx) = 0,\quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Ces six équations entre les forces extérieures seules se nomment *les équations générales de l'équilibre;* elles se déduisent comme une conséquence du théorème établi au n° 127, qui est vrai dans tous les cas, et par conséquent elles expriment toujours des conditions nécessaires de l'équilibre d'un système quelconque. Mais, comme on n'a pas laissé aux déplacements virtuels qui figurent dans l'équation (2) du n° 127 toute leur généralité, on ne peut pas affirmer que la vérification de cette équation résulterait de celle des équations (3) et (4); ces dernières ne sont donc pas, en général, des conditions suffisantes. Nous verrons toutefois plus loin qu'elles le sont dans un cas particulier très important, celui des systèmes solides.

Lorsque les équations (3) et (4) sont satisfaites, la somme des travaux des forces extérieures est nulle, dans un déplacement virtuel quelconque, compatible avec la solidification du système et sa complète liberté. Si donc on exprimait la nullité de cette somme en employant d'autres axes rectangulaires, on obtiendrait autant d'équations qu'on le voudrait, de même forme que les équations (3) et (4), mais qui en seraient nécessairement la conséquence. La substitution de déplacements de ce genre dans l'équation générale qui traduit

analytiquement le théorème du travail virtuel ne peut donc conduire qu'à six équations distinctes.

Un de nos trois axes rectangulaires, considéré séparément, est une droite quelconque. On peut donc dire, en vertu des équations (3), que :

La somme algébrique des projections, sur un axe quelconque, des forces extérieures appliquées à un corps en équilibre est toujours nulle;

et, en vertu des équations (4), que :

La somme algébrique des moments de ces mêmes forces, relativement à un axe quelconque, doit être également nulle.

§ II. — Équilibre des systèmes à liaisons.

130. *Des systèmes à liaisons.* — Nous sommes resté, dans tout le cours du § I de ce Chapitre, sur le terrain d'une complète généralité, en ce sens que nous n'avons rien supposé de particulier quant au système matériel considéré. Si nous disons maintenant qu'il existe une certaine dépendance mutuelle, ou des *liaisons,* soit entre les diverses parties du système, soit entre ce système et des corps qui n'y sont pas compris, nous ne faisons qu'exprimer une condition toujours remplie dans le monde réel; mais nous allons nous placer dans un cas particulier, quoique toujours très étendu, en faisant une certaine hypothèse sur la nature de ces liaisons. Nous admettrons que : *les forces produites par les liaisons, et en vertu desquelles elles sont capables de modifier l'état de mouvement ou de repos du système, font une somme de travaux virtuels constamment nulle, quand on attribue au système un quelconque des déplacements particuliers que les liaisons laissent possibles.* Ces déplacements sont dits *compatibles avec les liaisons.*

Les liaisons présentant le caractère essentiel qu'on vient de définir n'existent jamais d'une manière absolument rigoureuse dans les corps ou systèmes de corps naturels; elles ne sont donc qu'une conception idéale, dont la réalisation pratique pourra être obtenue avec plus ou moins d'approximation, suivant les circonstances.

Voici quelques exemples de ces liaisons idéales, avec certains moyens pour les réaliser qui entraînent la vérification de la propriété caractéristique ci-dessus énoncée :

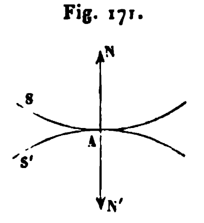
1° *Deux points faisant partie d'un système matériel sont assujettis à conserver entre eux une distance constante.* — La liaison produit le même effet que l'ensemble d'une action et d'une réaction égale et contraire, exercées sur les points par une ligne matérielle de longueur invariable qui les unirait l'un à l'autre, ces deux forces étant répulsives ou attractives suivant que les points tendent à se rapprocher ou à s'éloigner, et possédant à chaque instant l'intensité nécessaire pour empêcher cet effet de se produire; ou bien encore nous imaginons que les points sont capables par eux-mêmes de faire naître cette action mutuelle. Si l'on attribue au système un déplacement quelconque compatible avec la liaison dont il s'agit, la distance r des deux points ne varie pas; nous avons déjà vu, par application du lemme établi au n° 128, que dans ce cas la somme des travaux des deux forces est nulle.

2° *Un point du système est assujetti, soit à rester fixe, soit à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface donnée.* — Si le point doit rester immobile, on conçoit la possibilité de le maintenir en repos par une force d'intensité convenable que la liaison ferait agir sur lui, toujours en sens contraire du mouvement qu'il tendrait à prendre. Dans tout déplacement compatible avec cette liaison, le point reste immobile, et par suite la force de liaison qui lui est appliquée ne fait aucun travail.

Si le point doit glisser sur une courbe ou surface donnée, nous avons déjà supposé (nos 110 et 111) qu'on arrive à ce résultat au moyen d'obstacles produisant sans cesse une force normale à la courbe ou à la surface; la chose est évidemment possible à titre de conception idéale, car une force ainsi dirigée et possédant une intensité convenable suffit pour empêcher à chaque instant le point de se mouvoir dans le sens normal et pour l'obliger ainsi à rester sur la courbe ou la surface. Le mouvement du système étant supposé compatible avec la liaison, le point dont il s'agit prend alors un déplacement perpendiculaire à la force que cette liaison produit, et le travail de cette force est nul.

3° *Deux surfaces solides sont assujetties à glisser l'une sur l'autre.* — Il est clair qu'une action mutuelle dirigée suivant la normale commune au point de contact suffit encore pour maintenir les surfaces tangentes entre elles; nous supposons que leur action mutuelle soit effectivement normale. Imaginons maintenant un déplacement élémentaire quelconque compatible avec la liaison, c'est-à-dire dans lequel les surfaces ne cesseront pas d'être en contact. Nommons S et S′ les deux surfaces (*fig.* 171); N l'action normale exercée par S′ sur S et N′ la réaction égale et contraire exercée par S sur S′. Si les deux surfaces avaient un mouvement commun, leur point de contact A aurait le même déplacement, et par suite le travail de N serait égal et de signe contraire à celui de N′, de sorte que leur somme serait bien nulle. Si les deux surfaces ont des mouvements différents, on peut toujours regarder celui de S comme résultant de la composition de trois mouvements, savoir : 1° le mouvement de S′; 2° une rotation autour d'un axe passant en A; 3° une translation nulle ou parallèle au plan tangent commun; ces deux derniers mouvements constituent, comme on l'a vu en Cinématique (n° 41), le mouvement relatif de S par rapport à S′. D'autre part, le travail de N dans le mouvement résultant est égal (n° 102) à la somme des travaux de cette même force dans les mouvements composants. Celui qui répond au premier détruit algébriquement le travail de N′, et ceux qui répondent aux deux autres sont évidemment nuls, parce qu'ils donnent au point A un déplacement nul ou perpendiculaire à N. La somme algébrique des travaux de N et de N′ est donc bien nulle dans tous les cas.

Fig. 171.



131. ***Théorème du travail virtuel dans le cas d'un système à liaisons.*** — Nous supposons un système matériel dans lequel existent des liaisons jouissant de la propriété caractéristique définie au n° **130**. Nous pouvons toujours lui appliquer le théorème absolument général du n° **127**, en choisissant certains déplacements virtuels particuliers, ce qui nous donnera, comme nous l'avons déjà remarqué (n° **129**), un certain

nombre de conditions nécessaires pour l'équilibre, sinon l'ensemble des conditions suffisantes. Si nous choisissons pour ces déplacements particuliers ceux qui sont compatibles avec les liaisons, nous aurons l'avantage d'obtenir des conditions dans lesquelles n'entreront pas les forces dues aux liaisons, puisque ces forces font une somme de travaux nulle (n° 130) et que, par conséquent, les termes qui leur correspondent dans l'équation fournie par le théorème du travail virtuel se détruisent toujours.

On peut dès lors partager toutes les forces en deux groupes, savoir : 1° celles qui sont produites par les liaisons; 2° celles qui ont une autre origine, quelle qu'elle soit [1]. On nomme ces dernières *forces directement appliquées.* Moyennant cette définition, nous concluons de l'observation qui précède que :

Dans tout système à liaisons en équilibre, la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées est nulle, pour l'un quelconque des déplacements du système compatibles avec les liaisons.

On voit bien en quoi ce théorème diffère de ceux du n° 127; on ne prend la somme des travaux virtuels que pour une partie des forces réellement agissantes; mais, en même temps, on ne prend plus un déplacement virtuel arbitraire, on prend seulement un de ceux qui sont possibles, eu égard aux liaisons. En procédant ainsi, on ne fait pas complètement la vérification prescrite (n° 127) pour être certain que l'équilibre existe; la réciproque de la proposition directe que nous venons d'énoncer n'est donc pas une conséquence des théorèmes du n° 127 et elle n'est en aucune façon évidente. Mais elle est vraie néanmoins, et nous allons établir que :

Réciproquement, si, dans un système à liaisons, la somme

---

[1] Il est bon de remarquer que cette classification des forces ne coïncide pas avec celle que nous avons employée au n° 127. Sans doute, on peut toujours considérer une force intérieure comme force de liaison, mais la réciproque n'est pas toujours exacte et une force de liaison peut être, suivant les cas, intérieure ou extérieure. Par exemple, la réaction mutuelle de deux surfaces solides comprises dans un système constituerait un groupe de deux forces intérieures; un point fixe produirait, au contraire, une force extérieure sur le système qui lui serait attaché.

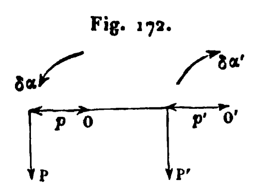
des travaux des forces directement appliquées est nulle pour tout déplacement compatible avec les liaisons, le système supposé primitivement en repos y persistera indéfiniment.

Supposons, en effet, que cela n'ait pas lieu et que le système sorte du repos pour se mettre en mouvement. Chaque point prendra une certaine accélération j dans le sens même de son déplacement, car ici la vitesse est nulle et l'accélération normale n'existe pas (n° 15); si m désigne la masse de ce point, la force qui détermine sa mise en mouvement est donc mj, dans le sens du déplacement supposé. Il est bien évident qu'une force égale et contraire $-mj$, appliquée à chaque point, détruira le mouvement qui, par hypothèse, allait se produire, et que, sous l'action des forces primitivement agissantes et des nouvelles forces $-mj$ appliquées à tous les points, l'équilibre existera. Si l'équilibre existe, nous pouvons faire usage de la proposition directe donnée ci-dessus, et nous pouvons de plus choisir pour déplacement virtuel le déplacement réel qui allait se produire, et que nous avons empêché par l'introduction de toutes les forces $-mj$. Ce déplacement est en effet l'un de ceux que les liaisons permettent, puisqu'il allait se produire sous leur influence. Or cela étant, 1° le travail de toutes les forces dues aux liaisons est nul; 2° le travail des forces directement appliquées est nul aussi, par hypothèse. Donc la somme des travaux de toutes les forces $-mj$, les seules dont il nous reste à tenir compte, est également nul. Mais, d'un autre côté, ces forces sont toutes directement opposées au déplacement de leurs points d'application, de sorte que chacune d'elles fait un travail négatif; la somme de tous ces travaux de même signe ne peut s'annuler, sans que chaque travail soit individuellement nul. Donc l'accélération j de chaque point, dans le mouvement supposé, se réduit à zéro; donc, enfin, le système persiste dans son immobilité initiale, sans qu'on ait besoin d'aucune force nouvelle pour l'y maintenir.

132. *Exemple de l'application du théorème précédent.* — Prenons un système composé de deux solides, qui tournent respectivement autour de deux axes parallèles O et O′ (*fig.* 172); la communication de mouvement se fait de l'un

à l'autre par un engrenage, en vertu duquel leurs déplacements angulaires respectifs $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$ auraient, s'ils se produisaient effectivement, un rapport connu $r = \frac{\delta\alpha'}{\delta\alpha}$. Ce système rentrera bien dans la définition du n° 130, pourvu qu'on admette l'absence de frottement entre les surfaces en contact et l'invariabilité de chaque solide. En effet, les points de chaque solide sont alors à des distances constantes les uns des autres; de plus, la fixité de chaque axe, ainsi que la communication de l'un à l'autre, s'obtiennent au moyen de surfaces mobiles glissant sur d'autres surfaces fixes ou mobiles, glissement que nous supposons pouvoir se produire sans que les surfaces éprouvent autre chose qu'une action mutuelle normale.

Fig. 172.



On suppose ensuite qu'une force P est appliquée au premier solide, sur la ligne OO', dans une direction perpendiculaire et à la distance p de l'axe O; une force P', de direction parallèle à P, agit de même sur le second solide, en un point de OO' et à la distance p' de l'axe O'; quelle est alors la condition d'équilibre entre ces deux forces?

Le premier solide ne peut que tourner autour de O dans un sens ou dans l'autre; donnons-lui un déplacement angulaire virtuel $\delta\alpha$ dans le sens indiqué par la flèche; alors le second solide tournera autour de O' d'un angle $\delta\alpha' = r\delta\alpha$, dans un sens déterminé, qui sera, par exemple, le sens contraire à celui de $\delta\alpha$, si l'on a un engrenage extérieur. On peut maintenant appliquer le théorème du n° 131, qui donnera

$$\mathrm{P}p\,\delta\alpha - \mathrm{P}'p'r\,\delta\alpha = 0$$

ou simplement

$$\mathrm{P}p = \mathrm{P}'p'r.$$

Telle est la condition d'équilibre demandée, et il n'y en aura pas d'autre; car le mouvement virtuel que nous avons donné au système est le seul que permettent les liaisons, sauf le changement possible du sens, qui n'entraînerait d'ailleurs aucune modification à l'équation obtenue.

On voit, par cet exemple, combien est considérable le pas

qu'on a fait en transformant le théorème général du n° 127 en celui du n° 131. Le premier suppose l'emploi d'un nombre énorme d'inconnues auxiliaires, pour arriver en fin de compte à une seule relation, que le second nous donne tout de suite et sans avoir à faire aucune élimination.

Nous remarquerons encore que la condition d'équilibre entre P et P′ peut s'écrire

$$\frac{P'}{P} = \frac{p'r}{p}.$$

Or r est le rapport des vitesses angulaires, qui se produiraient si les deux corps tournaient réellement autour des axes O et O′ et, par suite, $\frac{p'r}{p}$ exprime le rapport entre les vitesses des points où agissent respectivement les forces P′ et P; la condition consiste donc en ce que le rapport des forces est inverse de celui qui existerait, dans un mouvement réel du système, entre les vitesses de leurs points d'application.

La même propriété se démontrerait d'une manière analogue, sans aucune difficulté, dans le cas d'un système à liaisons, soumis seulement à deux forces directement appliquées, en supposant les points d'application assujettis à se déplacer dans la direction des forces et avec un rapport de vitesses déterminé *a priori*. Les anciens auteurs énonçaient cette propriété en disant : *ce que l'on gagne en force, on le perd en vitesse*. Effectivement, quand on veut faire équilibre à une force donnée P, par une autre force P′ qu'on applique en tel ou tel point, il faut prendre P′ d'autant plus grand que son point d'application a une vitesse moindre, et *vice versa*.

CHAPITRE DEUXIÈME.

ÉQUILIBRE DES SOLIDES INVARIABLES ET DE QUELQUES AUTRES SYSTÈMES PARTICULIERS.

§ I. — Équations d'équilibre des solides libres ou assujettis à diverses liaisons.

133. *Cas d'un solide libre.* — On a trouvé (n° 129) six équations générales auxquelles doivent satisfaire les forces extérieures appliquées à un système matériel quelconque en équilibre; ces équations, toujours nécessaires, ne sont pas en général suffisantes. Mais nous allons prouver qu'elles sont suffisantes dans le cas d'un solide invariable parfaitement libre.

En effet, les forces de liaison ou les forces intérieures qui se développent entre les divers points du solide, considérés deux à deux, sont des actions mutuelles égales et contraires (n° 95), qui ont pour conséquence de rendre invariables les distances de ces points; la somme des travaux virtuels de ces forces est donc nulle dans tout déplacement, compatible avec la solidité du système (n° 128), d'où il résulte que les choses se passent comme si l'on avait établi entre toutes les combinaisons de deux points la première des liaisons données comme exemple au n° 130. Le corps solide n'est donc pas autre chose qu'un cas particulier des systèmes à liaisons, pour lesquels la condition nécessaire et suffisante de l'équilibre consiste (n° 131) en ce que la somme des travaux virtuels des forces directement appliquées doit s'annuler, quand on imagine un déplacement quelconque permis par les liaisons. Dans ce cas particulier, les forces autres que celles de liaison, ou les forces directement appliquées, se confondent avec les forces extérieures; les déplacements compatibles

avec les liaisons sont tous ceux que le solide peut réellement prendre. Or les six équations générales (3) et (4) du n° **129** expriment justement que la somme des travaux des forces extérieures est nulle, en déplaçant le système sans le déformer; ce sont donc les équations suffisantes, en même temps que nécessaires, conformément au théorème du n° **131**.

Les six équations (3) et (4) peuvent, d'ailleurs, se simplifier dans divers cas particuliers que nous allons indiquer.

1° *Toutes les forces concourent en un même point.* — Si l'on prend ce point pour origine des coordonnées, l'une quelconque des forces rencontrera les trois axes et aura son moment nul relativement à chacun d'eux. Les équations (4) se trouveront, en conséquence, vérifiées identiquement et il ne restera, comme conditions d'équilibre à remplir, que les trois équations (3), soit

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

Ces équations signifient que la somme algébrique des projections des forces sur les trois axes doit être égale à zéro.

2° *Cas des forces parallèles.* — Prenons un des axes, l'axe des z par exemple, parallèle à la direction commune des forces; alors chaque force aura des projections X, Y nulles sur les deux autres axes, et son moment sera en outre nul relativement à l'axe des z. La première et la seconde des équations (3), ainsi que la dernière équation (4), sont vérifiées identiquement, et il ne reste que les équations

$$\Sigma Z = 0, \quad \Sigma Zy = 0, \quad \Sigma Zx = 0.$$

Elles expriment que la somme algébrique des forces et les sommes algébriques de leurs moments par rapport à deux axes rectangulaires entre eux et perpendiculaires à la direction des forces, sont égales à zéro.

3° *Cas de forces contenues dans un même plan.* — Si l'on choisit ce plan pour plan des xy, les deux quantités z et Z sont nulles pour toutes les forces. Trois des six équations se trouvent encore vérifiées d'elles-mêmes; les autres se réduisent à

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Les deux premières signifient que les forces ont une somme

algébrique de projection nulle, sur deux axes rectangulaires pris dans leur plan; la dernière que la somme algébrique de leurs moments est nulle, relativement à un point de ce plan ou à un axe perpendiculaire.

134. *Solide assujetti à tourner autour d'un point fixe.* — La fixité d'un point du solide pouvant être obtenue au moyen d'une force de grandeur et de direction convenables, appliquée en ce point, concevons que l'obstacle immobile auquel on attache le corps soit disposé de manière à être capable de produire cette force, mais rien de plus. Comme cette force fait, dans tous les déplacements que le solide peut encore prendre, un travail constamment nul et qu'il en est de même pour les forces intérieures (n° 133), on a encore ici un système à liaisons auquel s'applique le théorème du n° 131.

Les seuls déplacements compatibles avec les liaisons sont (n° 24) des rotations autour d'axes passant par le point fixe. Prenons ce point pour origine de trois axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz et soient $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ les composantes d'une rotation virtuelle, autour de ces trois axes. L'expression générale du travail total des forces extérieures trouvée au n° 129 devient ici, puisque les composantes δa, δb, δc de la translation sont nulles,

$$\delta\lambda\,\Sigma(Zy - Yz) + \delta\mu\,\Sigma(Xz - Zx) + \delta\nu\,\Sigma(Yx - Xy);$$

pour que cette somme des travaux virtuels soit constamment nulle, il faut et il suffit qu'on ait

$$\Sigma(Zy - Yz) = 0, \quad \Sigma(Xz - Zx) = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

On retrouve seulement trois des six équations générales de l'équilibre, qui, avec les axes particuliers qu'on a choisis, sont les conditions nécessaires et suffisantes de l'équilibre dans le cas actuel.

Les trois équations ci-dessus expriment que les trois sommes algébriques de moments des forces extérieures relativement à trois axes rectangulaires issus du point fixe O sont égales à zéro. Comme chaque axe en particulier est une droite quelconque passant par le point O, on peut dire que la somme algébrique des moments est nulle relativement à

chacune de ces droites; mais il suffit de l'avoir vérifié pour trois droites formant un système d'axes rectangulaires. Après cette vérification, il est prouvé que les forces se font équilibre; on peut donc affirmer (n° 131) que leur travail sera nul dans une rotation du corps autour d'une des droites dont il s'agit; la somme des moments est donc aussi nulle, car elle ne diffère de la somme des travaux que par un facteur égal au déplacement angulaire (n° 102).

La méthode qu'on vient d'employer donne bien les conditions d'équilibre; mais elle ne conduit pas à déterminer la force exercée sur le solide par l'obstacle auquel est due la fixité du point O. Afin d'y arriver, nous concevrons que, d'une part, on supprime la fixité de ce point, et que d'autre part on applique au solide, en O, une force égale à celle que produisait l'obstacle. Rien ne sera changé aux forces agissant sur le corps, et par conséquent l'équilibre se maintient après comme avant cette modification; mais elle a eu pour conséquence de rendre le corps parfaitement libre, de sorte que nous devons lui appliquer les équations (3) et (4) du n° 129, nécessaires et suffisantes. Conservons toujours nos axes ci-dessus employés qui passent par le point fixe; soient X_1, Y_1, Z_1 les projections sur les axes de la force inconnue, produite par l'obstacle et passant en O. Rien ne sera changé par l'introduction de cette force, dont le moment relativement à chacun des axes est nul, aux trois équations (4), et celles-ci restent les trois conditions d'équilibre déjà trouvées; mais les équations (3) donnent en outre

$$X_1 + \Sigma X = 0, \quad Y_1 + \Sigma Y = 0, \quad Z_1 + \Sigma Z = 0,$$

ce qui fait connaître la force demandée par ses trois composantes suivant les axes. On peut remarquer que, si toutes les forces étaient transportées parallèlement à elles-mêmes en O, ces forces transportées auraient une résultante R égale à celle de leurs lignes représentatives, et les projections de cette résultante sur les trois axes seraient justement (n° 101) les trois sommes

$$\Sigma X, \ \Sigma Y, \ \Sigma Z;$$

la force R_1 exercée par l'obstacle a donc ses projections égales

et contraires à celles de R, en vertu des trois dernières équations; donc R_1 est égale à R et directement opposée.

135. *Solide assujetti à tourner autour d'un axe fixe.* — La fixité d'une droite peut s'obtenir en fixant deux de ses points ou un plus grand nombre; dans tous les cas nous admettrons, comme au n° 134, que chaque obstacle capable de rendre fixe un point du corps ne produit sur lui qu'une ou plusieurs forces passant par ce point. Le travail de ces forces est toujours nul, quand on donne au solide le seul déplacement virtuel qui reste possible, c'est-à-dire une rotation autour de la droite fixe; donc le solide est encore un système à liaisons, dans le sens défini au n° 130, auquel s'applique par conséquent le théorème du n° 131. Si l'on suppose que l'axe fixe soit pris pour axe des z dans un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, en conservant le sens des notations employées au n° 134, la somme des travaux virtuels dans la rotation $\delta\nu$ sera

$$\delta\nu\Sigma(Yx - Xy),$$

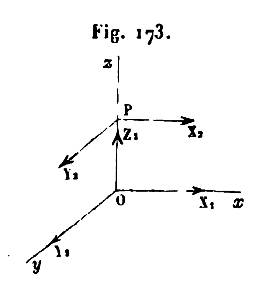
et par suite on aura pour seule condition d'équilibre

$$\Sigma(Yx - Xy) = 0.$$

Il est donc nécessaire et suffisant que la somme algébrique des moments des forces extérieures par rapport à la ligne fixe soit égale à zéro.

On peut encore demander les forces exercées sur le corps par ses appuis, en vertu de la fixité d'un certain nombre de points de l'axe Oz. Pour résoudre cette question, nous allons d'abord supposer qu'on ait fixé un point O de cet axe (*fig.* 173); nous y placerons l'origine de nos axes rectangulaires. Nous admettons que la fixité de O soit obtenue par des forces appliquées en O sur le solide et donnant une résultante dont X_1, Y_1, Z_1 représentent les projections sur les trois axes. Le point O de Oz étant ainsi rendu fixe, il suffit, pour assurer

Fig. 173.



l'immobilité de cette ligne, d'empêcher un autre point P de se mouvoir, et, comme le point P ne peut déjà plus se déplacer que perpendiculairement à OP, il suffit d'exercer sur lui une force en sens contraire de ce déplacement. Cette force est contenue dans le plan mené par P, parallèlement à xOy, et l'on peut concevoir qu'elle soit produite par un petit anneau fixe dans lequel s'engagerait l'axe de rotation. Soient X_2, Y_2 ses projections sur des parallèles aux x et aux y. Le système des cinq forces X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2 est le plus simple parmi ceux qui suffisent pour rendre l'axe Oz fixe dans tous les cas, indépendamment de toute supposition sur les forces extérieures appliquées au solide.

La fixité de l'axe ne pouvant exercer d'influence sur l'équilibre du solide que par les forces X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2 auxquelles elle donne naissance, nous avons le droit de considérer le corps comme un solide libre, restant en équilibre sous l'action de ces forces et de celles qui sont directement appliquées. Si nous nommons h la distance $\overline{OP}$, les six équations d'équilibre entre toutes ces forces seront (n° 133)

$$\begin{aligned}
&\Sigma X + X_1 + X_2 = 0,\\
&\Sigma Y + Y_1 + Y_2 = 0,\\
&\Sigma Z + Z_1 = 0,\\
&\Sigma(Zy - Yz) - Y_2 h = 0,\\
&\Sigma(Xz - Zx) + X_2 h = 0,\\
&\Sigma(Yx - Xy) = 0.
\end{aligned}$$

La dernière de ces équations n'est autre chose que la condition d'équilibre, déjà obtenue par un autre moyen; la quatrième et la cinquième donnent X_2 et Y_2, et alors les trois premières permettent de trouver X_1, Y_1, Z_1.

Si le deuxième appui P était, aussi bien que le premier O, capable d'une réaction oblique à Oz, la composante Z_2 de cette force devrait figurer dans les équations d'équilibre. Elle ne modifierait d'ailleurs que la troisième, où il faudrait mettre $Z_1 + Z_2$ au lieu de Z_1. Les deux premières équations, jointes à la quatrième et à la cinquième, détermineraient encore X_1, Y_1, X_2, Y_2, c'est-à-dire les composantes perpendiculaires à l'axe fixe des deux réactions exercées en O et P. Suivant

l'axe il y aurait deux composantes dont on ne connaîtrait que la somme algébrique $Z_1 + Z_2$, par la troisième équation. On voit que les réactions inconnues ne pourraient pas être complètement déterminées. *A fortiori*, l'indétermination se produirait-elle si l'on avait plus de deux appuis, car la question comporterait encore un plus grand nombre d'inconnues, entre lesquelles on ne trouverait toujours que cinq équations. Cela ne veut pas dire que, dans l'équilibre d'un corps particulier assujetti à tourner autour d'un axe fixe et soumis directement à des forces données, il n'y ait pas en chaque point d'appui des forces dont chacune a une grandeur, une direction et un sens bien déterminés; mais nous ne pouvons pas arriver à les connaître en ne tenant compte que du fait de l'équilibre. Il y a une infinité de systèmes de réactions compatibles avec ce fait, et il faudrait savoir autre chose pour être en mesure de discerner, parmi tous ces systèmes, celui qui se produit réellement. C'est un problème d'un ordre tout différent, et dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

136. *Solide assujetti à se mouvoir parallèlement à un plan fixe.* — Nous supposons le solide obligé de rester en contact avec un plan fixe qu'il touche par un certain nombre de points, trois au moins; on assujettit ces points à ne pas sortir du plan en leur appliquant des forces normales de grandeur convenable, et nous admettons que les dispositions sont prises pour que les points dont il s'agit éprouvent, de la part de l'obstacle, des forces ayant nécessairement cette direction.

Ici encore nous pourrons appliquer le théorème général du n° 131, car les forces de liaison font un travail nul dans les déplacements compatibles avec ces liaisons. Prenons un système d'axes coordonnés rectangulaires comprenant un plan des xy parallèle au plan fixe, et un axe des z perpendiculaire.

Si nous décomposons encore le mouvement virtuel du solide en trois translations δa, δb, δc parallèles aux axes coordonnés, et en trois rotations $\delta\lambda$, $\delta\mu$, $\delta\nu$ autour de ces axes, il sera nécessaire, pour que ce mouvement soit compatible avec les liaisons (c'est-à-dire parallèle au plan des x, y), qu'on ait

$$\delta c = 0, \quad \delta\lambda = 0, \quad \delta\mu = 0.$$

Par suite, l'expression générale trouvée au n° **129** pour la somme des travaux virtuels devient ici, en conservant les mêmes notations,

$$\delta a \Sigma X + \delta b \Sigma Y + \delta v \Sigma(Yx - Xy).$$

Pour que cette expression s'annule toujours, quels que soient δa, δb, δv, il faut et il suffit que les forces extérieures satisfassent aux équations

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(Yx - Xy) = 0;$$

c'est-à-dire que les projections des forces sur un plan parallèle au plan fixe doivent vérifier les conditions d'équilibre d'un système de forces contenues dans un même plan.

Soient maintenant Z_1, Z_2, Z_3 les réactions exercées, parallèlement à l'axe des z, sur trois points du corps ayant dans le plan des xy les coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, afin de maintenir ces points à une distance constante du plan fixe; aucune autre force analogue ne sera exercée, par hypothèse, en d'autres points. Lorsqu'on tient compte de ces forces Z_1, Z_2, Z_3, on peut regarder le solide comme libre; les équations d'équilibre, en conservant les axes employés ci-dessus, seraient au nombre de six, savoir les trois qu'on vient d'établir et les trois suivantes :

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + \Sigma Z = 0,$$
$$Z_1 y_1 + Z_2 y_2 + Z_3 y_3 + \Sigma(Zy - Yz) = 0,$$
$$-Z_1 x_1 - Z_2 x_2 - Z_3 x_3 + \Sigma(Xz - Zx) = 0.$$

On tirerait de là les inconnues Z_1, Z_2, Z_3.

Dans le cas où l'on voudrait assujettir plus de trois points à se mouvoir parallèlement au plan fixe, les conditions d'équilibre à vérifier par les forces directement appliquées resteraient les mêmes; mais les réactions inconnues Z_i ne pourraient plus être déterminées au moyen du même procédé, puisqu'on n'aurait toujours que trois équations entre un plus grand nombre d'inconnues.

§ II. — Équivalence de deux systèmes de forces appliquées à un solide ; réduction ou composition de l'un de ces systèmes.

137. *Définition et propriétés principales des systèmes équivalents.* — Deux systèmes de forces sont dits *équivalents*, lorsqu'on peut substituer l'un à l'autre sans troubler l'équilibre d'un solide parfaitement libre, auquel ils seraient successivement appliqués, soit seuls, soit conjointement avec un troisième système qui resterait commun dans les deux cas.

Désignons par

(A), (A'), (A") trois systèmes de forces;
X, Y, Z les trois sommes algébriques de projections des forces du système (A) sur trois axes coordonnés rectangulaires;
L, N, Q les trois sommes algébriques de moments des mêmes forces relativement aux mêmes axes;
X', Y', Z', L', N', Q'; X'', Y'', Z'', L'', N'', Q'' les quantités analogues pour chacun des deux systèmes (A') et (A").

Si les systèmes (A) et (A"), agissant ensemble, se font équilibre sur un solide libre, ils devront vérifier les équations nécessaires et suffisantes (n° 133)

$$X + X'' = 0, \quad Y + Y'' = 0, \quad Z + Z'' = 0,$$
$$L + L'' = 0, \quad N + N'' = 0, \quad Q + Q'' = 0.$$

Admettons maintenant qu'on puisse, sans troubler l'équilibre, remplacer le système (A) par le système (A'), ce qui permettra de dire, conformément à la définition précédente, que l'un est équivalent à l'autre; on aura pour conditions nécessaires et suffisantes de ce second équilibre

$$X' + X'' = 0, \quad Y' + Y'' = 0, \quad Z' + Z'' = 0,$$
$$L' + L'' = 0, \quad N' + N'' = 0, \quad Q' + Q'' = 0.$$

La comparaison de ces deux groupes d'équations donne immédiatement l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles puissent avoir lieu simultanément, ou pour que (A) et (A') soient équivalents entre eux; elles con-

sistent en ce que

$$(1)\qquad \begin{cases} X = X', & Y = Y', & Z = Z', \\ L = L', & N = N', & Q = Q'. \end{cases}$$

Ainsi, pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient les mêmes sommes algébriques de projection sur trois axes rectangulaires et les mêmes sommes algébriques de moments relativement à ces axes.

Chaque axe pris en particulier étant une droite que rien ne définit, il est clair que la même égalité des sommes de projections ou de moments doit se vérifier pour un axe quelconque; mais, puisque les six équations déjà établies suffisent pour assurer l'équivalence, il est bien évident qu'en variant cet axe comme on voudra, on ne trouvera que des équations pouvant se déduire des six premières.

Les équations d'équivalence (1) peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} X - X' &= 0, & Y - Y' &= 0, & Z - Z' &= 0, \\ L - L' &= 0, & N - N' &= 0, & Q - Q' &= 0. \end{aligned}$$

Sous cette forme, elles sont identiques avec les équations nécessaires et suffisantes pour que le système (A) fasse équilibre au système (A′) changé de sens et appliqué au même solide, ces deux systèmes étant censés agir seuls. Ainsi donc, deux systèmes équivalents étant appliqués seuls au même solide, en changeant de plus le sens de toutes les forces pour l'un d'entre eux, ces deux systèmes se feront équilibre.

Le mouvement élémentaire le plus général d'un solide s'obtient par la composition de trois translations da, db, dc suivant les axes coordonnés, et de trois rotations $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ autour des mêmes axes; comme on l'a démontré au n° **129**, le travail du système (A) dans ce mouvement serait

$$X\,da + Y\,db + Z\,dc + L\,d\lambda + N\,d\mu + Q\,d\nu;$$

le travail du système (A′) s'exprimerait pareillement par

$$X'\,da + Y'\,db + Z'\,dc + L'\,d\lambda + N'\,d\mu + Q'\,d\nu;$$

ces deux expressions étant égales, en vertu des équations

d'équivalence (1), on voit que deux systèmes équivalents produisent le même travail, dans tout déplacement du solide auquel on les supposerait appliqués, l'un au lieu de l'autre.

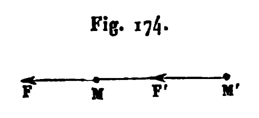
Les deux propriétés qu'on vient d'indiquer en dernier lieu sont tout à fait caractéristiques de l'équivalence; on pourrait adopter chacune d'elles comme définition, et rien ne serait alors plus facile que d'en tirer les équations (1) ci-dessus. On constaterait ainsi que toutes ces définitions rentrent les unes dans les autres.

138. *De la réduction ou composition d'un système de forces.* — Étant donné un système de forces agissant sur un corps solide en équilibre, il est naturel et il peut être souvent utile de chercher un système plus simple, comprenant le moindre nombre possible de forces, capable de remplacer le premier sans troubler l'équilibre du corps, c'est-à-dire équivalent, suivant le sens attribué à ce mot (n° **137**). Ce remplacement d'un système par un autre plus simple se nomme *réduction* ou *composition* des forces données.

Avant d'entreprendre cette opération dans le cas le plus général, nous l'effectuerons dans divers cas particulier. Et tout d'abord il est bon d'indiquer quelques propositions préliminaires dont l'usage est très fréquent :

1° *Le point d'application d'une force peut être transporté en un point quelconque appartenant au même solide et situé sur la ligne d'action de la force.* — Soit donnée la force F appliquée au point M d'un solide en équilibre (*fig.* 174); je considère une autre force F′ égale à la première, agissant suivant la même droite, mais appliquée en un autre point M′ du même solide. Il est clair que ces deux forces auront même projection sur une droite quelconque et même moment relativement aussi à telle droite qu'on voudra; donc elles sont équivalentes (n° **137**), et l'une peut se substituer à l'autre, sans que le solide cesse d'être en équilibre.

Fig. 174.



2° *Réciproquement, si deux forces sont équivalentes, elles sont égales et de même sens et agissent suivant la même ligne droite.* — En effet, elles ne sauraient avoir des projections

égales sur un axe quelconque sans être égales, parallèles et de même sens. Et, si leur ligne d'action était différente, il existerait une infinité d'axes qui rencontreraient l'une sans rencontrer l'autre, de sorte qu'elles n'auraient pas de moments égaux relativement à ces axes.

3° *Si plusieurs forces agissent au même point, on peut les remplacer par leur résultante, et réciproquement.* — Cette proposition pourrait être regardée comme une conséquence immédiate du théorème établi au n° 100. La résultante produit sur son point d'application le même effet que les composantes. Mais il est facile aussi de voir que la substitution dont il s'agit est conforme à la définition de l'équivalence (n° 137). On sait, en effet (n°s 101 et 103), que la projection de la résultante est égale à la somme des projections des composantes, et que la même égalité a lieu pour les moments relativement à un axe arbitrairement choisi.

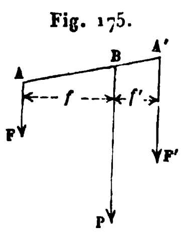
4° *Un système de forces reste équivalent à ce qu'il était primitivement quand on le modifie par l'introduction ou la suppression de diverses forces qui, prises toutes seules, se feraient équilibre.* — Puisque les forces introduites ou supprimées se font équilibre, elles ont une somme de projections et une somme de moments constamment nulles pour un axe quelconque; les valeurs de ces sommes sont donc les mêmes dans le système primitif de forces et dans celui qu'on lui a substitué, ce qui assure leur équivalence.

139. *Composition des forces concourantes.* — Soient données des forces F, F′, F″, ... en nombre quelconque, appliquées respectivement aux points A, A′, A″, ... d'un même solide; on suppose que les diverses lignes suivant lesquelles elles agissent vont toutes se couper en un même point B. Alors on peut les transporter toutes en ce point, et, cela fait, les composer en une seule force, qui est leur résultante (n° 138, 1° et 3°). Cette force unique, équivalant au système des forces données, se nomme aussi leur *résultante*.

140. *Composition de deux forces parallèles et de même sens.* — Deux forces parallèles et de même sens, F, F′, appliquées aux deux points A et A′ d'un solide (*fig.* 175), sont

équivalentes à une force unique P de mêmes direction et sens, égale à leur somme $F + F'$ et appliquée en un point B de la ligne AA′, tellement choisi que les moments de F et de F′ relativement à ce point soient égaux et de sens contraires. D'après cet énoncé, on voit que B doit se trouver entre A et A′ et partager la distance $\overline{AB}$ en deux parties $\overline{AB}$, $\overline{A'B}$ inversement proportionnelles à F et F′; car, si l'on nomme f et f' les distances de F et de F′ au point B, l'égalité

Fig. 175.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B}} = \frac{F'}{F}$$

entraîne

$$\frac{F}{F'} = \frac{f'}{f} \quad \text{ou} \quad Ff = F'f',$$

de sorte que les moments de F et F′ relativement à B remplissent bien la condition indiquée. D'ailleurs il est toujours sous-entendu que le point B auquel on appliquerait la force P considérée comme équivalente au système F et F′ (ou comme la résultante de ces deux forces) doit faire partie du solide, ou, ce qui revient au même, lui être invariablement lié.

Maintenant il est facile de justifier l'équivalence du système F et F′ avec P. Prenons, en effet, trois axes rectangulaires ayant pour origine un point quelconque de P, l'axe des z étant perpendiculaire au plan FAF′ et les deux autres dans ce plan. D'abord la condition d'équivalence relative aux projections des forces sur un axe quelconque est évidemment satisfaite; celle qui concerne les moments l'est aussi pour les trois axes que nous avons choisis, puisque pour chacun d'eux le moment de P est nul, aussi bien que la somme algébrique des moments de F et de F′; et cela suffit (n° 137) pour qu'on puisse affirmer l'équivalence.

141. *Composition de deux forces parallèles et de sens contraires.* — Si les deux forces parallèles F, F′ appliquées en A et A′ sont de sens contraires, comme dans la *fig.* 176, elles

ont une résultante P égale à leur différence $F' - F$, ayant leur direction commune et le sens de la plus grande, et cette résultante coupe AA′ en un point B tel que les moments de F et de F′ relativement à ce point sont égaux et de sens contraires. Ce point B se trouve en dehors de la longueur $\overline{AA'}$, du côté de la plus grande force F′, et, afin de vérifier la condition $Ff = F'f'$, on doit toujours le déterminer par la proportion

Fig. 176.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B}} = \frac{F'}{F}.$$

On démontrerait exactement, comme dans le cas précédent, que la force P, satisfaisant aux diverses conditions qu'on vient de poser, est bien équivalente à l'ensemble des forces F et F′.

L'égalité ci-dessus permet de trouver chacune des distances inconnues $\overline{AB}$, $\overline{A'B}$, puisqu'on connaît leur différence $\overline{AA'}$: on en tire sans peine

$$\overline{AB} = \overline{AA'}\,\frac{F'}{F'-F}, \quad \overline{A'B} = \overline{AA'}\,\frac{F'}{F'-F}.$$

On voit que ces deux distances tendent vers ∞, en même temps que P tend vers o, lorsque les forces de sens contraires F et F′ tendent vers une même intensité. Une force nulle agissant à une distance infinie ne peut pas exister réellement; c'est la simple conception d'un cas limite. Donc deux forces parallèles, égales et de sens contraires, ne peuvent pas se remplacer, en ce qui concerne l'équilibre d'un corps, par une résultante unique.

Le système de ces deux forces prend le nom de *couple*. On l'a connu et étudié avant le couple de rotations, dont nous avons parlé en Cinématique (n° 33), et qui doit évidemment son nom aux analogies qu'il présente avec le couple de forces.

Nous reviendrons bientôt sur la théorie des couples.

142. *Composition d'un nombre quelconque de forces parallèles.* — Si toutes les forces sont de même sens, on peut d'abord en composer deux et les remplacer par une résul-

tante; puis on composera cette première résultante avec une troisième force, et l'on obtiendra une seconde résultante, que l'on composera de même avec une quatrième force, et ainsi de suite. A chaque opération semblable, le nombre des forces à composer diminuera d'une unité, et l'on finira par avoir une résultante unique remplaçant le système primitif. Son intensité serait égale à la somme des intensités des composantes, et elle agirait dans la même direction et le même sens.

Si le système comprenait à la fois des forces dans un sens et des forces dans le sens opposé, on le diviserait en deux groupes ne comprenant que des forces de même sens; après avoir obtenu, comme on vient de le dire, la résultante de chacun des deux groupes, on n'aurait plus qu'à composer ensemble les deux résultantes, qui seraient des forces parallèles et de sens contraires. Leur résultante, équivalente au système proposé, se trouverait par le moyen indiqué au n° 141, sauf dans le cas où elles formeraient un couple. On aura donc finalement une résultante unique ou un couple. On voit que la résultante finale, s'il y en a une, est encore égale à la somme algébrique des composantes.

143. *Composition de forces toutes contenues dans un même plan.* — Deux quelconques des forces dont il s'agit sont concourantes ou parallèles; on peut les remplacer par une seule, qui sera encore contenue dans le plan des autres. Cette opération aura diminué d'une unité le nombre total des forces; en la répétant un certain nombre de fois, on finira par n'avoir plus qu'une résultante unique ou un couple. Ce dernier cas se présenterait si la dernière composition à effectuer portait sur deux forces parallèles, égales et de sens contraires.

144. *Théorie des couples.* — Cette théorie se place ici en quelque sorte comme un lemme, qui nous permettra d'arriver d'une manière simple à la réduction d'un système quelconque de forces.

(*a*) *Propriétés d'un couple; équivalence de deux couples.* — Un couple est un système de deux forces qui a les pro-

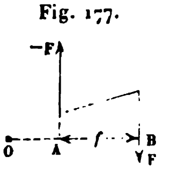
priétés suivantes, au point de vue des quantités à considérer dans l'équilibre des solides :

1° La somme de ses projections sur un axe quelconque est nulle.

2° La somme des moments de ses deux forces, relativement à un axe parallèle à leur plan, est nulle. En effet, un plan (P) perpendiculaire à l'axe est alors perpendiculaire au plan des deux forces; celles-ci se projettent donc sur (P), suivant une même droite, et leurs projections ont des longueurs égales, comptées en sens contraires. Les moments de ces projections par rapport au point où l'axe coupe le plan (P), égaux par définition (n° 102) aux moments des forces relativement à cet axe, sont donc égaux et de sens opposés, et par suite leur somme algébrique est nulle.

3° La somme des moments des deux forces d'un couple, relativement à toute droite perpendiculaire à son plan, est constante; sa valeur est égale au produit de l'intensité de l'une des deux forces par la distance entre leurs lignes représentatives. Considérons, en effet, le couple (F, —F) (*fig.* 177); soit O le point où son plan coupe un axe perpendiculaire; abaissons de ce point la perpendiculaire OAB sur les deux forces, et nommons f la portion $\overline{AB}$ comprise dans leur intervalle. La somme algébrique des moments des deux forces sera

Fig. 177.



$$F(\overline{OB} - \overline{OA}) = Ff,$$

quantité qui est bien indépendante de la situation du point O; il en est encore de même quand le point O se place dans la bande comprise entre les lignes représentatives des deux forces, disposition qui a simplement pour effet de remplacer la différence des distances OA et OB par leur somme. On donne au produit Ff le nom de *moment du couple;* la longueur $f = \overline{AB}$ est son *bras de levier.*

Quand on fait varier la position du point O dans le plan des deux forces, il est aisé de constater que celle des forces dont le moment est prédominant tend toujours à faire tourner dans le même sens, ou bien que ce sens sera le même pour les deux forces. Ainsi, dans la *fig.* 177, l'ensemble des deux

moments tend à faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre pour le spectateur placé en avant du papier, quel que soit le point O; ce serait le sens inverse, si les deux forces changeaient de sens. Le sens du moment total des deux forces est considéré comme étant celui qui appartient au moment du couple.

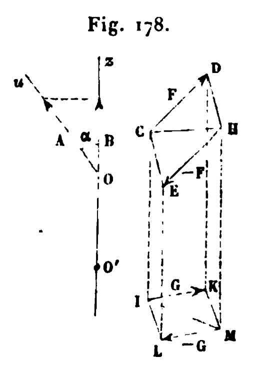
4° Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence de deux couples consistent en ce que leurs plans doivent être parallèles et leurs moments égaux et de même sens. D'abord ces conditions sont suffisantes (n° 137); car, d'une part, les deux couples donnent chacun une somme de projections nulle sur un axe quelconque; d'autre part, ils ont les mêmes sommes de moments relativement à trois axes rectangulaires, dont deux seraient parallèles et le troisième perpendiculaire à la direction commune de leurs plans. De plus, les conditions dont nous parlons sont nécessaires. En effet, si les plans n'étaient pas parallèles, il y aurait des axes parallèles au plan du premier couple, sans l'être à celui du second; par rapport à l'un de ces axes le premier couple aurait une somme de moments nulle, et il n'en serait pas de même pour le second, car la projection des deux forces sur un plan perpendiculaire à l'axe produirait un couple, ayant un certain moment par rapport au pied de l'axe, comme on vient de le voir (3°). Enfin, puisqu'il est ainsi démontré que deux couples équivalents ont leurs plans parallèles, il suffit d'exprimer que les sommes de moments des deux systèmes de forces relativement à un axe perpendiculaire sont égales, pour en conclure que les moments des deux couples doivent être égaux et de même sens.

(*b*) *Axe représentatif d'un couple.* — En résumé, les considérations qu'on vient de présenter montrent qu'un couple est suffisamment défini, quant à son influence dans les conditions d'équilibre d'un solide, si l'on donne l'orientation de son plan, ainsi que son moment et son sens; avec ces données on connaît en effet la projection totale des forces du couple sur un axe quelconque (laquelle est toujours nulle), et la somme de leurs moments, relativement à trois axes rectangulaires, choisis d'une manière particulière (2° et 3°). Or imagi-

nons qu'on mène, à partir d'une origine arbitraire, une droite perpendiculaire au plan du couple, ayant une longueur égale à son moment, et dans un sens tel que le spectateur ayant sa tête au bout de la droite et ses pieds à l'origine voie le couple tendant à faire tourner dans le sens des aiguilles d'une montre; cette droite indiquera tout ce qui vient d'être reconnu comme suffisant pour la définition du couple dont il s'agit. On la nomme *axe représentatif* de ce couple.

(c) *Moment d'un couple relativement à un axe oblique à son plan.* — Soit un couple (F, — F) et O*u* (*fig.* 178) un axe perpendiculaire à son plan; la somme des moments des deux forces du couple relativement à O*u*, ou le moment du couple, a pour valeur F*f*, produit de la force F par le bras de levier *f*; son axe représentatif est la ligne A portée sur O*u* dans le sens convenable. Cette ligne A est d'une longueur numériquement égale à F*f*, c'est-à-dire à l'aire du parallélogramme CDEH construit sur les deux forces F, — F du couple. Considérons maintenant un autre axe O*z*, oblique au plan du couple et faisant avec O*u* l'angle α. Si l'on veut calculer la somme des moments des forces F, — F relativement à O*z*, il faut projeter ces forces sur un plan perpendiculaire à O*z* et prendre le moment total des projections par rapport à la projection O′ de l'axe. Or les projections de F et — F constituent un couple (G, — G), et la somme des moments, relativement à O′ des deux forces de ce couple, est égale à son moment ou à l'aire du parallélogramme IKLM construit sur G et — G. Or l'aire IKLM est la projection de CDEH = F*f*, et, comme les deux plans font entre eux un angle α égal à celui de leurs normales, on a

Fig. 178.



$$\text{aire IKLM} = Ff\cos\alpha;$$

c'est la valeur cherchée de la somme algébrique des moments des forces F, — F, relativement à O*z*. L'axe représentatif de

ce moment total ou du couple (G, — G) sera une ligne B comptée suivant Oz et égale à $A \cos \alpha$; on l'obtient en projetant l'axe A sur Oz.

(*d*) *Composition d'un nombre quelconque de couples.* — On donne un nombre quelconque de couples, définis par leurs axes

$$a, a', a'', \ldots;$$

si nous construisons la résultante géométrique A (nº 11) de toutes les lignes, sa projection sur un axe quelconque sera la somme algébrique des projections des composantes, égalité que nous écrivons, pour trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz,

$$A_x = a_x + a'_x + a''_x + \ldots,$$
$$A_y = a_y + a'_y + a''_y + \ldots,$$
$$A_z = a_z + a'_z + a''_z + \ldots.$$

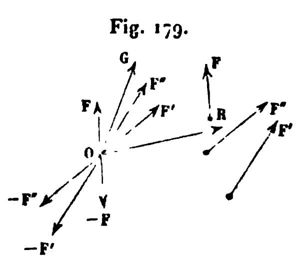
Or considérons maintenant A comme l'axe représentatif d'un certain couple; d'après le paragraphe précédent (*c*), on voit par les égalités ci-dessus que la somme des moments, relativement à chacun des trois axes, des forces dont est formé le couple A, est égale à la somme algébrique des moments des forces constituant les couples a, a', a'', ... D'un autre côté, la somme des projections des forces est toujours nulle, sur un axe quelconque, pour un ou plusieurs couples. Donc on a vérifié toutes les conditions d'équivalence entre le couple A et le système des couples donnés. Donc :

Un système formé d'un nombre quelconque de couples peut se réduire à un seul couple équivalent. L'axe du couple équivalent (ou résultant) est la résultante géométrique des axes des couples composants.

145. *Réduction d'un système quelconque de forces à deux équivalentes, dont l'une passe par un point donné.* — Un système quelconque de forces F, F′, F″, ... (*fig.* 179) étant appliqué à un solide en équilibre, on ne trouble pas cet équilibre et l'on a un système équivalent au système primitif si, au point donné O, faisant partie du solide ou invariablement lié à lui, on applique les forces F, F′, F″, ..., égales et parallèles

aux forces données, et ces mêmes forces changées de sens, car les forces ainsi ajoutées donnent évidemment une résultante nulle. On a ainsi remplacé chaque force primitive, telle que F, par la même force transportée parallèlement à elle-même en O, et par un couple formé de la force primitive F et de la force égale et contraire — F agissant en O. Toutes les forces F, F′, F″,... transportées en O donnent une résultante R passant également par ce point; tous les couples se réduiront à un couple unique, dont l'axe $\overline{OG}$ se déterminera comme nous l'avons vu (144, *d*).

Fig. 179.



Ce couple est équivalent à tout autre couple placé dans un plan perpendiculaire à OG mené par le point O, pourvu que son moment ait pour grandeur $\overline{OG}$ et que son sens réponde à celui de cette droite. On peut placer le couple de manière que l'une de ses deux forces S passe en O; alors on pourra la composer avec R, ce qui donnera une autre résultante R′ passant également en O, à laquelle il faudra joindre la seconde force — S du couple. Toutes les forces primitives, F, F′, F″, ... se trouvent ainsi réduites à deux équivalentes R′, — S, dont l'une passe par un point choisi comme on voudra.

La résultante R des forces transportées parallèlement à elles-mêmes prend le nom de *résultante de translation*. En général, elle ne sera pas dans le plan du couple (S, — S), de sorte que le système final se composera d'une force — S dans ce plan et d'une force R′ en dehors. Il est aisé de reconnaître que, dans ce cas, les forces n'ont pas de résultante unique, et qu'on ne peut pas réduire le système donné à moins de deux forces. Supposons en effet que les deux forces R′ et — S aient une équivalente T; alors il y aurait équilibre entre cette force changée de sens, R′ et — S (n° 137). Il faudrait pour cela que la somme des moments de ces trois forces fût nulle relativement à un axe quelconque; mais, comme les lignes T, — S et R′ ne sont pas dans un même plan, on pourra trouver une infinité d'axes qui en rencontreront deux sans

rencontrer la troisième, et la condition ne serait pas remplie pour ces axes. Donc l'hypothèse d'une résultante unique est inadmissible dans ce cas.

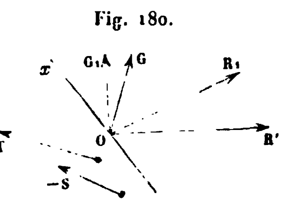
Au contraire, si R, S et — S sont dans un même plan, ou, ce qui revient au même, si la résultante de translation R est perpendiculaire à l'axe $\overline{OG}$ du couple résultant, il y aura une résultante unique. En effet, la seconde résultante R′ est alors dans un même plan avec — S, et ces deux forces ne pourraient former un couple que dans le cas où R serait nulle. En laissant ce cas de côté, l'accomplissement de la condition dont on vient de parler suffit donc pour qu'il y ait une résultante unique. On verra un peu plus loin comment cette condition s'exprime analytiquement.

Ainsi qu'on l'a déjà fait observer, le couple (S, — S) peut, sans qu'on cesse d'avoir un système équivalent, se remplacer par un autre de même moment, mais formé de deux forces ayant une orientation ou une intensité différente de S; on peut, de plus, continuer à faire passer en O l'une des deux forces. Par cette modification, les deux résultantes finales R′ et — S changeraient, et l'on aurait ainsi un nombre illimité de systèmes équivalents au système donné, et composés de deux forces dont l'une passerait au point O choisi à volonté. Tous ces systèmes ont quelque chose de commun : la seconde équivalente — S ne sort pas d'un plan déterminé, passant par le point O, et son moment par rapport à ce point reste toujours le même. Cela est évident, lorsque tous les systèmes équivalents dont nous parlons se déduisent du système primitif par le procédé ci-dessus indiqué, car le plan dans lequel peut se déplacer la force — S n'est autre que le plan mené en O perpendiculairement à OG, et le moment de cette force relativement à O, n'est autre que celui du couple résultant, dont la longueur $\overline{OG}$ représente la valeur. Mais il est facile de démontrer que la même chose aura lieu de quelque manière qu'on s'y prenne pour opérer la réduction des forces primitivement données et les transformer en deux équivalentes R′ et — S.

Imaginons, en effet, au lieu de R′ et — S, un autre système équivalent, composé d'une force R_1, agissant en O et d'une autre force T (*fig.* 180); soient $\overline{OG}$ et $\overline{OG_1}$ les axes représen-

latifs des moments de — S et de T relativement au point O (n° 103). Puisque les systèmes (R′, — S), (R_1, T) sont tous les deux équivalents aux forces primitives, ils sont aussi équivalents l'un à l'autre, et leurs moments par rapport à toute droite Ox issue de O sont égaux entre eux. Or ces moments se réduisent à ceux de — S et de T, c'est-à-dire (n° 103) aux projections de $\overline{OG}$ et $\overline{OG_1}$ sur Ox; donc ces deux axes représentatifs ont même projection sur une droite quelconque, et par suite ils coïncident, ce qui suffit pour justifier la proposition énoncée.

Fig. 180.



Le moment de la seconde équivalente — S ou T relativement à O, déterminé, comme on vient de le voir, par le seul choix de ce point, pour un système donné de forces, se nomme le *moment résultant* du système dont il s'agit, relativement au point O. L'axe représentatif $\overline{OG}$ du moment résultant est identique avec celui du couple (S, — S); celui-ci s'obtient lui-même en composant les axes des couples (F, — F), (F′, — F′), (F″, — F″), ... de la *fig.* 179, lesquels axes représentent également (n° 103) les moments des forces primitivement données F, F′, F″, ... relativement à O. Cela prouve que :

L'axe représentatif du moment résultant d'un système de forces est la résultante géométrique des axes représentatifs des moments de chacune des forces, relativement au même point.

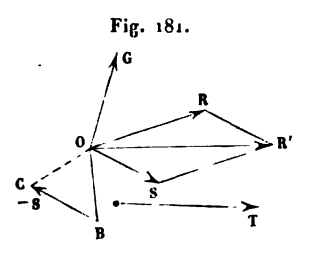
D'après ce qu'on a vu un peu plus haut (n° 144, *d*), la projection de cet axe sur une droite quelconque issue du point O fait connaître la somme des moments du système de couples (F, — F), (F′, — F′), ..., et par conséquent aussi du système de forces F, F′, ..., relativement à cette même droite. La propriété démontrée à la fin du n° 103 dans le cas d'une seule force, concernant la loi suivant laquelle varient ses moments par rapport à des axes concourants, se trouve ainsi étendue à un système de forces quelconques.

146. *Réduction d'un système de forces à une résultante de*

translation et à un couple; transformation des conditions générales de l'équilibre. — Nous avons déjà établi (nº 145) la possibilité de cette réduction et donné le moyen de l'opérer géométriquement. Mais ce moyen n'étant pas toujours d'un emploi facile, parce qu'il suppose des constructions de lignes dans l'espace, voici comment on peut y substituer le calcul.

Soient R la résultante de translation appliquée en O (*fig.* 181) et (S, —S) le couple résultant, dont l'ensemble est équivalent au système des forces données F, F′, F″, ... Désignons par G la longueur de l'axe $\overline{OG}$ du couple. Les deux quantités R et G, qui suffisent pour définir le système, au point de vue de l'équivalence, peuvent être connues en grandeur, direction et sens, au moyen de leurs projections sur trois axes coordonnés rectangulaires Ox, Oy, Oz, issus du point O. En effet, l'équivalence du système R, S, —S et du système primitif exige d'abord l'égalité des projections sur ces axes, savoir :

Fig. 181.



$$R_x = F_x + F'_x + F''_x + \ldots,$$
$$R_y = F_y + F'_y + F''_y + \ldots,$$
$$R_z = F_z + F'_z + F''_z + \ldots,$$

ce qui détermine R. Secondement, l'égalité des moments par rapport aux mêmes axes donnera les projections G_x, G_y, G_z respectivement égales à la somme des moments des forces F, F′, F″, ... par rapport à O_x, O_y, O_z, d'où l'on déduira G. Lorsqu'un système matériel quelconque est en équilibre, toutes les forces extérieures agissant sur lui satisfont à cette condition que les six sommes R_x, R_y, R_z, G_x, G_y, G_z sont toutes nulles (nº 129); il en est par conséquent de même pour R et G. Donc on peut dire que :

1º *Les forces extérieures agissant sur un corps en équilibre ont une résultante de translation nulle;* 2º *le couple résultant produit par le transport des forces parallèlement à elles-mêmes, en un point quelconque, est également nul.*

Cet énoncé exprime des conditions toujours nécessaires (n° 129), qui deviennent suffisantes dans le cas d'un corps solide (n° 133). Dans tous les cas, la vérification n'a besoin d'être faite que pour un seul point O.

147. *Expression analytique de la condition pour qu'un système de forces ait une résultante unique.* — Nommons

X, Y, Z les composantes, suivant trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, de la résultante de translation R;

L, N, Q les sommes de moments des forces relativement aux mêmes axes, égales aux composantes de l'axe G du couple résultant, produit par le transport des forces en O.

On a vu (n° 145) que la condition pour l'existence d'une résultante unique consiste en ce que l'axe du couple soit perpendiculaire à la direction de la résultante. Or l'axe G fait avec les axes des angles ayant leurs cosinus égaux à

$$\frac{L}{G}, \frac{N}{G}, \frac{Q}{G};$$

les cosinus directeurs de la résultante R sont, d'un autre côté,

$$\frac{X}{R}, \frac{Y}{R}, \frac{Z}{R};$$

donc le cosinus de l'angle des deux directions s'exprime par

$$\frac{1}{GR}(LX + NY + QZ).$$

Si aucune des deux grandeurs G et R n'est supposée nulle, leurs directions ne peuvent être rectangulaires qu'autant que l'on a

$$(2) \qquad LX + NY + QZ = 0;$$

et d'ailleurs cette condition suffit, puisqu'il en résulte

$$\cos(G, R) = 0.$$

Si G s'annule, il n'y a pas d'autre condition à remplir pour que le système de forces admette une résultante unique, car

il se réduit à la résultante de translation R; dans ce cas l'équation (2) se trouve encore vérifiée, puisque L, N, Q s'annulent en même temps que G. Si c'est R qui s'annule, il en est de même de X, Y, Z, de sorte que l'équation (2) se vérifie; et cependant il n'y a plus alors de résultante, puisque les forces sont réduites à un couple G, lequel ne peut se remplacer par une seule force (nº 141).

En résumé, dans tous les cas où il y aurait une résultante unique, la condition (2) devrait se vérifier; réciproquement, si la condition (2) est vérifiée, les forces sont réductibles à une résultante unique, sauf dans le cas où l'on aurait simultanément

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

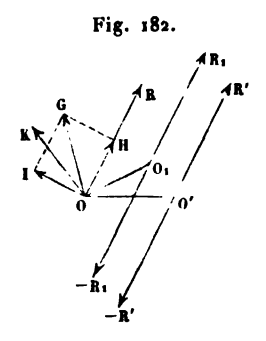
148. *Minimum du couple répondant aux diverses positions de la résultante de translation.* — Le point O (*fig.* 179), auquel on a transporté toutes les forces parallèlement à elles-mêmes, est indéterminé; imaginons qu'on le fasse varier et qu'on répète, pour diverses positions attribuées à ce point, les constructions indiquées au nº 145, par lesquelles on a réduit le système des forces F, F′, F″, ... à la résultante de translation R, agissant en O, et à un couple résultant, représenté par l'axe $\overline{OG} = G$. Il est clair, en premier lieu, que le système de forces appliqué en O ne fera que se déplacer parallèlement à lui-même, ainsi que la résultante de translation R; mais chacun des couples, tels que (F, — F), produits par le transport des forces en O, pourra varier d'intensité et en même temps se trouver placé dans un autre plan, ce qui aura généralement pour conséquence de faire varier l'axe $\overline{OG}$ en grandeur et direction.

Afin d'étudier ces variations de la manière la plus simple possible, nous pouvons, au lieu du système primitif F, F′, F″, ..., considérer le système équivalent, composé de la résultante de translation R agissant en O (*fig.* 182) et du couple dont $\overline{OG} = G$ est l'axe représentatif. Nous aurons encore un système équivalent si nous appliquons deux forces égales et contraires, R′ et — R′, égales et parallèles à R, en un point quelconque O′ invariablement lié au solide sur lequel sont censées agir toutes les forces. Ce nouveau système com-

prendra : 1° la résultante de translation $R' = R$, agissant en O'; 2° le couple G; 3° le couple formé par R et $-R'$, dont l'axe représentatif est une droite $\overline{OK}$ perpendiculaire au plan ROO'R'. Le système primitif de forces est ainsi remplacé par la résultante de translation R', agissant en O', et par un couple résultant de la composition des deux précédentes. On peut alors faire les remarques suivantes.

Si l'on imagine l'axe $\overline{OG}$ décomposé en un axe $\overline{OH}$ suivant la résultante R, et un axe $\overline{OI}$ dans une direction perpendiculaire, la première composante restera invariable quand le point O prendra une autre position quelconque O'. En effet, le nouvel axe qui doit alors remplacer $\overline{OG}$ est la résultante de $\overline{OG}$ et $\overline{OK}$, ou de $\overline{OH}$, $\overline{OI}$ et $\overline{OK}$. Or $\overline{OI}$ et $\overline{OK}$ sont deux droites perpendiculaires à R; leur somme géométrique fournira la composante de l'axe résultant dans la direction perpendiculaire à R, et la composante dans la direction de R sera $\overline{OH}$, aussi bien pour le couple répondant au transport des forces en O' que pour le couple obtenu quand le transport s'était fait en O.

Fig. 182.



La constance de la projection de l'axe G sur la direction de R s'exprime par l'équation

$$G \cos(G, R) = \text{const.},$$

ou bien, en remplaçant le cosinus par sa valeur trouvée au n° 147, et remarquant que R ne varie pas non plus avec le point O,

$$LX + NY + QZ = \text{const.}$$

Cette équation signifie que son premier membre ne dépend en aucune façon ni de l'origine des axes rectangulaires, ni de leur orientation; sa valeur reste invariable, ainsi que celle de la résultante de translation, pour un ensemble donné de forces, quels que soient les trois axes rectangulaires choisis pour calculer les six quantités X, Y, Z, L, N, Q.

L'invariabilité qu'on vient de constater des deux lignes R

et $G \cos(G, R)$ permet de démontrer bien simplement un théorème remarquable, donné par Chasles en 1828, et dont voici l'énoncé :

De quelque manière qu'on réduise un système donné de forces à deux équivalentes, le tétraèdre construit sur ces deux équivalentes, prises comme arêtes opposées, a un volume constant.

Supposons en effet que les deux équivalentes soient R' et $\overline{BC}$ ou $-S$ (*fig.* 180, p. 383); en appliquant en O deux forces égales et contraires, ayant la direction et l'intensité de $\overline{BC}$, on reviendrait au système équivalent, considéré d'abord au n° **145**, formé de la résultante de translation R et du couple $(S, -S)$, dont $OG = G$ est l'axe représentatif. Or, si l'on prend OCB pour base du tétraèdre R'OBC, on voit qu'il est équivalent en volume au tétraèdre ROBC, qui a même base et même hauteur, car RR' est une parallèle au plan de la base commune. La hauteur de ce dernier est $R \cos(G, R)$, et sa base OBC a pour surface $\frac{1}{2} G$; le volume R'OBC est donc

$$\frac{1}{6} GR \cos(G, R),$$

quantité qui reste bien constante pour un même système de forces, puisqu'elle est $\frac{1}{6}$ du produit des deux facteurs constants R et $G \cos(G, R)$.

Le point O' peut être choisi et placé en O_1, de manière que les couples représentés par $\overline{OK}$ et $\overline{OI}$ soient égaux et de sens contraires. A cet effet, on devra prendre O_1 sur la perpendiculaire Ov au plan GIOR, dans un sens convenable pour que le couple $(R, -R_1)$ ait son axe représentatif suivant le prolongement de IO, et à une distance $\overline{OO_1}$ calculée d'après l'égalité

$$R \times \overline{OO_1} = \overline{OI} = G \sin(G, R).$$

Quand on transportera toutes les forces en O_1, le système se réduira à la résultante de translation R_1, égale et parallèle à R, et au couple $\overline{OH} = G \cos(G, R)$ contenu dans un plan

perpendiculaire à cette résultante. Le résultat serait identique pour tout point pris sur la droite O_1R_1; mais pour un autre point quelconque, en dehors de cette droite, l'axe $\overline{OH}$ devrait se composer avec un autre tel que $\overline{OI}$, perpendiculaire à sa direction, et l'axe résultant serait plus grand que $\overline{OH}$. La droite O_1R_1 est donc celle pour laquelle le couple à joindre à la résultante de translation est le plus petit possible; Poinsot l'a nommée *axe central des moments*.

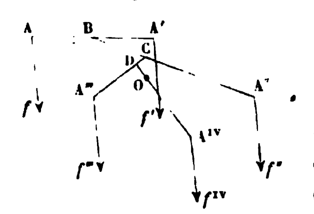
Il est impossible de ne pas remarquer la complète analogie qui existe entre les théorèmes démontrés, du n° 139 au n° 148 inclusivement, sur la composition des forces et des couples, et ceux qu'on a établis dans la Cinématique (n°s 32 à 37), sur la composition des mouvements d'un solide invariable. A chaque propriété des forces répond une propriété analogue des axes représentatifs des rotations, et chaque propriété des axes représentatifs des couples répond de même à une propriété semblable des translations. Ainsi, par exemple, les rotations représentées par des axes concourants ou parallèles se composent suivant les mêmes règles que les forces concourantes ou parallèles; les translations se composent comme les axes des couples; un système quelconque de forces et de couples est réductible à deux forces non situées dans un même plan, comme un système quelconque de mouvements se ramène à deux rotations n'ayant pas leurs axes dans un même plan; l'axe central des moments est l'analogue de l'axe central du mouvement, etc., etc. Il ne semble pas d'ailleurs qu'on puisse établir cette analogie directement, au moyen de quelque raison philosophique, par laquelle on serait dispensé de faire une des deux théories après avoir fait l'autre.

149. *Centre des forces parallèles.* — On suppose divers points A, A′, A″, ... (*fig.* 183), invariablement liés entre eux, auxquels sont appliquées des forces parallèles f, f', f'', ...; ces forces peuvent avoir une direction quelconque, et, en ce qui concerne leurs intensités, on sait seulement qu'elles sont respectivement proportionnelles à des nombres constants m, m', m'', ..., positifs ou négatifs, le changement de signe du coefficient indiquant un changement de sens dans la force correspondante. Dans ces conditions, on peut déterminer un

point O par lequel passe constamment la résultante des forces f, lorsque leur direction commune varie de toutes les manières possibles.

En effet, la résultante $f+f'$ des deux premières forces f et f' passe en un point déterminé B de la ligne AA', tel qu'on ait

Fig. 183.



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B}}=\frac{f'}{f}=\frac{m'}{m},$$

entre A et A' ou en dehors, suivant que m et m' auront même signe ou des signes contraires. Joignant B avec le point d'application A'' d'une troisième force f'', on déterminera de même un point C où passe toujours la résultante de f'' et de $f+f'$, c'est-à-dire la résultante $f+f'+f''$ des trois premières forces; le point C sera tellement placé sur BA'' que le rapport

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{CA''}}=\frac{f''}{f+f'}=\frac{m''}{m+m'}.$$

On combinera de même cette résultante avec une quatrième force f''', et l'on aura une résultante $f+f'+f''+f'''$ passant par un point constant D sur la ligne CA''', et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à la résultante de toutes les forces, ce qui aura toujours lieu (n° 142), sauf dans le cas où il y aurait un couple résultant. Il est clair que les divers points B, C, D, ..., O successivement obtenus par la construction qu'on vient d'indiquer, comme points d'application des résultantes partielles et finales, ne dépendent en rien de la direction des forces et sont uniquement déterminés par les rapports entre leurs intensités.

Le dernier de ces points, le point O par où passe constamment la résultante générale de toutes les forces, prend le nom de *centre des forces parallèles*.

On pourrait varier l'ordre suivi dans la composition des forces, ou former des résultantes partielles, que l'on composerait ensuite pour en déduire la résultante générale; mais il est facile d'établir que le point final O qu'on obtient, quand

on est arrivé à trouver cette dernière résultante, doit nécessairement rester invariable. Supposons, en effet, que, après avoir trouvé une première résultante appliquée en O, on arrive, par un autre moyen quelconque, à une seconde résultante appliquée en un point différent O'. Les deux résultantes sont équivalentes entre elles, puisqu'elles équivalent à un même système de forces, ce qui exige (n° **138**) qu'elles agissent suivant une même droite. Cela ne peut avoir lieu que si les deux résultantes passent à la fois par O et O'. En supposant ces deux points distincts, on serait donc ainsi arrivé à trouver la direction de la résultante des forces parallèles sans connaître celle des composantes, avec la seule définition de leurs rapports de grandeurs, ce qui est absolument inadmissible. Donc O et O' ne sont qu'un seul et même point.

Si l'on construisait un polyèdre convexe ayant pour sommets un certain nombre des points A, A', A", ... et renfermant les autres dans son intérieur, la construction ci-dessus employée montre que le point O y serait également renfermé, pourvu toutefois que toutes les forces fussent de même sens. Si tous les points A, A', A", ... étaient dans un même plan, le sens de toutes les forces restant encore le même, le point O devrait être dans l'intérieur du polygone convexe circonscrit à ces points.

La détermination du centre des forces parallèles peut s'effectuer en employant le calcul, au lieu des constructions géométriques indiquées ci-dessus, que l'on peut considérer plutôt comme un moyen d'en établir l'existence. Imaginons un système quelconque de trois axes rectangulaires; soient x, y, z les coordonnées d'un quelconque des points d'application des forces parallèles, f la force agissant en ce point, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point O cherché, par où passe toujours la résultante des forces, quelle que soit leur direction commune. Cette résultante aura une intensité Σf, égale à la somme algébrique des composantes (n° **142**); puisqu'elle est équivalente à l'ensemble des forces f, elle a même moment relativement à un axe quelconque. Appliquons cette propriété d'abord pour les axes des y et des x, en supposant les forces parallèles à l'axe des z, puis pour l'axe des y en donnant aux

forces la direction de l'axe des x; il viendra

$$x_1 \Sigma f = \Sigma f x, \quad y_1 \Sigma f = \Sigma f y, \quad z_1 \Sigma f = \Sigma f z,$$

ou, remplaçant les forces par des nombres proportionnels, ce qui revient à multiplier les deux membres de ces équations par un même facteur,

$$x_1 \Sigma m = \Sigma m x, \quad y_1 \Sigma m = \Sigma m y, \quad z_1 \Sigma m = \Sigma m z.$$

Les équations précédentes déterminent le centre O des forces parallèles, par ses trois coordonnées x_1, y_1, z_1. Ce point, que nous savons d'avance être unique, ne peut dépendre en rien du choix des axes; et il serait effectivement facile de constater, au moyen des formules de la transformation des coordonnées, que les mêmes équations, employées avec un autre système d'axes rectangulaires ou obliques, conduiraient à retrouver le même point.

On fait généralement peu d'usage du centre des forces en Mécanique, sauf dans un cas particulier dont nous allons maintenant nous occuper d'une manière exclusive : c'est celui où les nombres m, m', m'', ..., proportionnels aux forces, sont précisément égaux aux masses des points matériels auxquels ces forces sont appliquées. Dans ce cas, le centre des forces parallèles, déterminé par les équations ci-dessus, prend le nom de *centre de gravité*, parce que les forces f agissant sur les divers points matériels sont alors proportionnelles à leurs poids mg. Ce point a, comme on le verra par la suite, une grande importance, non seulement dans l'étude de l'équilibre de certains systèmes matériels, mais encore dans celle du mouvement des systèmes matériels quelconques. C'est pourquoi il est bon d'entrer dans quelques détails sur sa détermination et d'en donner un certain nombre d'exemples particuliers. Ce sera d'abord l'objet du § III ci après, où l'on s'occupera en outre de l'équilibre des systèmes pesants à liaisons.

§ III. — Du centre de gravité d'un système matériel; équilibre des systèmes pesants à liaisons.

150. *Centre de gravité.* — Le centre de gravité d'un corps ou système matériel est le point dont les coordonnées x_1, y_1, z_1

sont définies par les équations

$$(1) \qquad x_1 \Sigma m = \Sigma mx, \quad y_1 \Sigma m = \Sigma my, \quad z_1 \Sigma m = \Sigma mz,$$

dans lesquelles m désigne la masse et x, y, z les coordonnées d'un point quelconque du système ([1]). Si le corps est solide, le centre de gravité n'est autre chose que le centre de forces parallèles et proportionnelles aux masses de ses divers points, c'est-à-dire le point par lequel passe constamment la résultante de ces forces quand leur direction varie. Les actions de la pesanteur, en particulier, font naître sur chaque point une action de direction constante et d'intensité proportionnelle à la masse, du moins on peut l'admettre pour un corps de dimensions modérées ([2]); leur résultante passe donc au centre de gravité et continuerait à y passer si la pesanteur prenait une autre direction, ou, ce qui revient au même, si l'on changeait la position du corps relativement à la verticale. Il faut admettre, dans ce dernier cas, que les axes de coordonnées accompagnent le corps dans son changement et que l'on considère toujours le point défini par les mêmes coordonnées x_1, y_1, z_1.

Lorsque le corps n'est pas solide, on peut toujours le concevoir solidifié et déterminer alors, par les formules ci-dessus, le centre de forces parallèles et proportionnelles aux masses; on conserve encore à ce point le nom de *centre de gravité* du système. Sans doute, puisqu'il ne s'agit plus d'un solide, la résultante, fictivement appliquée au centre de gravité, ne pourrait pas, en général, se substituer aux composantes qui agissent réellement sur chaque point, sans changer les con-

---

([1]) Le produit mx de m par sa distance au plan des yz est ce qu'on appelle quelquefois *moment* de m relativement à ce plan. Le facteur m peut exprimer une force ou grandeur quelconque, mais sans qu'on y attache l'idée d'une direction. Moyennant cette définition, les équations (1) expriment que *la somme algébrique des moments des masses élémentaires relativement à l'un des plans coordonnés* (c'est-à-dire un plan quelconque) *est égale au moment de la masse totale condensée au centre de gravité, relativement au même plan.*

([2]) A la rigueur, la direction de la verticale varie d'un point à un autre, ainsi que la grandeur de l'accélération g; mais ces variations sont insignifiantes pour les corps ordinaires, et l'on doit en faire abstraction dans les questions de Mécanique pratique.

ditions d'équilibre; mais la résultante produit toujours même somme de projections sur un axe ou même somme de moments que les composantes, et peut se substituer à elles dans tous les calculs où l'on a besoin de faire entrer ces sommes, comme cela est nécessaire, par exemple, quand on veut appliquer les équations générales de l'équilibre (n° 129).

On considère souvent le centre de gravité de lignes, surfaces ou volumes géométriques. S'il s'agit d'une ligne, on imagine que chaque élément de longueur ds, compté à partir du point défini par les coordonnées x, y, z, a une masse exprimée par ρds, en désignant par ρ une fonction connue des coordonnées. Si l'on applique alors les formules (1), les sommes se changeront en intégrales définies prises dans toute la longueur de la ligne dont on veut avoir le centre de gravité, et les coordonnées de ce point seront déterminées par les équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1\int \rho\, ds &= \int \rho x\, ds,\\ y_1\int \rho\, ds &= \int \rho y\, ds,\\ z_1\int \rho\, ds &= \int \rho z\, ds.\end{aligned}\right.$$

Les mêmes équations resteraient applicables pour une surface ou un volume; il faudrait seulement considérer ds comme représentant l'élément de surface ou de volume, auquel on supposerait une masse ρds et l'on devrait aussi, bien entendu, prendre les intégrales dans toute l'étendue de la surface ou du volume, suivant le cas.

Le facteur ρ exprime, en quelque sorte, la densité de chaque élément, puisque, à égalité de dimensions, la masse lui est proportionnelle. Dans l'hypothèse de lignes, surfaces ou volumes homogènes, ce facteur aurait une valeur constante en tous les points; dès lors il pourrait sortir du signe $\int$ et disparaîtrait comme facteur commun aux deux membres de chacune des équations précédentes. On aurait

$$(3)\qquad x_1\int ds = \int x\, ds,\quad y_1\int ds = \int y\, ds,\quad z_1\int ds = \int z\, ds.$$

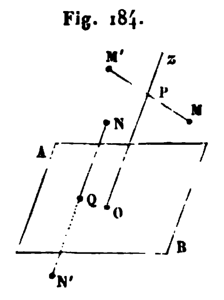
Tous les exemples donnés plus loin, pour la détermination des centres de gravité de lignes, surfaces ou volumes géométriques, supposeront toujours le fait de l'homogénéité.

151. *Théorèmes divers pouvant faciliter la recherche des centres de gravité.* — Les formules générales du n° **150** donnent les coordonnées du centre de gravité d'un corps quelconque, à la condition de calculer certaines sommes ou intégrales. On peut souvent éviter ce calcul, ou tout au moins le diminuer, en se servant des remarques ou théorèmes qui suivent.

THÉORÈME I. — *S'il existe dans un corps un diamètre ou un plan diamétral, le centre de gravité du corps est sur cette ligne ou dans ce plan.*

Nous appelons *diamètre* une ligne droite Oz (*fig.* 184) telle que si l'on projette sur elle, en P, un point M quelconque du corps, parallèlement à un plan fixe AB, et si l'on prolonge ensuite MP d'une quantité $\overline{PM'} = \overline{MP}$, il se trouve dans la position M' ainsi déterminée un autre point matériel appartenant au corps et ayant même masse que M.

Fig. 184.



De même, un plan quelconque AB sera dit plan diamétral, lorsque, ayant mené par un point quelconque N du corps une parallèle NQ à une droite fixe Oz, jusqu'à sa rencontre Q avec le plan AB et l'ayant prolongée de l'autre côté du plan jusqu'en N', de manière que $\overline{QN'} = \overline{NQ}$, le point N' ainsi obtenu est la position occupée par un point matériel appartenant au corps et ayant une masse égale à celle de N.

Cela posé, admettons d'abord l'existence d'un diamètre tel que Oz. En faisant agir sur tous les points du corps des forces parallèles et proportionnelles aux masses, les deux forces égales appliquées à M et M' auront une résultante passant en P. Tous les points du corps pouvant se grouper par deux de la même manière, l'ensemble de toutes les forces pourra ainsi se réduire à un système de résultantes partielles,

de même direction, en nombre deux fois plus petit, et dont les points d'application seront tous situés sur Oz. Si l'on effectue ensuite la composition de ces résultantes partielles, suivant la méthode générale du n° 149, il est bien évident que le point final où doit toujours passer la résultante totale, indépendamment de la direction attribuée aux composantes, ne pourra pas sortir de Oz. Ce point final n'est autre, dans le cas actuel, que le centre de gravité : le théorème se trouve donc démontré, en ce qui concerne es diamètres.

Supposons maintenant un plan diamétral, tel que AB. Les forces égales et parallèles, appliquées en deux points conjugués N, N', donneront une résultante passant en Q. En opérant de même sur tous les groupes de deux points de masses égales en lesquels se décompose le corps, on obtient une série de résultantes partielles dont les points d'application se trouvent tous dans le plan AB. Le procédé du n° 149 prouve alors que le centre de ces résultantes partielles, c'est-à-dire le centre de gravité du corps, doit nécessairement se trouver dans ce même plan.

Théorème II. — *Dans tous les corps doués d'un centre de figure, si les points diamétralement opposés sont de même masse, le centre de figure coïncide avec le centre de gravité.*

En effet, un système de forces parallèles et proportionnelles aux masses, appliquées à tous les points du corps, pourra être regardé comme formé d'un certain nombre de groupes de deux forces égales, agissant en des points diamétralement opposés. Chacun de ces groupes donnera une résultante passant au centre de figure ; donc la résultante générale y passera aussi, quelle que soit la direction commune des forces. Donc enfin ce point est bien le centre de gravité.

Théorème III. — *Si un corps est composé de deux parties ayant des masses* M, M' *et leurs centres de gravité en* A *et* A' (*fig.* 185), *le centre de gravité* G *de l'ensemble se trouvera sur la ligne* AA' *et la divisera en deux segments* $\overline{AG}$ *et* $\overline{A'G}$ *inversement proportionnels à* M *et* M'.

En effet, quand on fait agir sur tous les points du corps des forces parallèles et proportionnelles aux masses, celles de la

première partie donnent une résultante proportionnelle à M et passant au centre A; celles de la seconde partie se remplacent également par une autre résultante de même direction, passant au centre A′ et proportionnelles à M′. La composition de ces deux résultantes partielles (n° 140) conduit toujours, quelle que soit leur direction, à une résultante générale passant par un point G de AA′ entre A et A′, et tel qu'on ait

Fig. 185.

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{A'G}} = \frac{M'}{M}.$$

Cela justifie l'énoncé, car G est le centre de forces parallèles et proportionnelles aux masses, agissant sur les divers points du corps; c'est donc bien le centre de gravité.

Remarques. — 1° On pourrait supposer connus le centre de gravité G d'un corps, celui A d'une de ses parties, et demander le centre de gravité A′ de l'autre partie. Le théorème qu'on vient d'établir fait voir d'abord que A se trouve en ligne droite avec A et G, du côté opposé à A relativement à G; on peut ensuite achever la détermination de A′ en prenant

$$\overline{GA'} = \frac{M}{M'}\,\overline{AG}.$$

On aurait pu également considérer la force M′, agissant au point inconnu A′, comme la résultante de la force $M + M'$ appliquée en G et de la force M de sens contraire, appliquée en A. On obtiendrait alors A′ en suivant la règle pour la composition des forces parallèles de sens contraires (n° 141).

2° D'une manière générale, si un corps est formé de diverses parties ayant les masses M, M′, M″, ... et les centres de gravité A, A′, A″, ..., le centre de gravité de l'ensemble s'obtiendra en cherchant le centre de forces parallèles et proportionnelles à M, M′, M″, ..., respectivement appliquées en A, A′, A″, ... Il suffit, pour justifier cette règle, de faire usage du théorème III ci-dessus et d'en déduire successivement le centre de gravité du corps comprenant M et M′, puis celui du corps formé par la réunion de $M + M'$ avec M″, puis

celui du corps formé de $M + M' + M''$ et de M''', et ainsi de suite.

Théorème IV. — *Si tous les points d'un corps sont sur une ligne droite ou dans un même plan, le centre de gravité se trouve sur cette droite ou dans ce plan.*

La proposition est pour ainsi dire évidente; elle résulte immédiatement du procédé général indiqué au n° 149 pour trouver le centre des forces parallèles.

Théorème V. — *Les centres de gravité de deux corps semblables sont deux points homologues.*

Nous disons que deux corps sont semblables lorsque leurs figures le sont, dans le sens géométrique du mot, et que de plus les masses placées en deux points homologues quelconques sont dans un rapport constant.

Cela posé, rapportons le premier corps (A) à un système d'axes Ox, Oy, Oz, le second corps (A′) à un autre système semblablement placé par rapport à lui, $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, et appelons

m la masse d'un point de (A) et x, y, z ses coordonnées;

m', x', y', z' les mêmes quantités pour le point homologue de (A′);

x_1, y_1, z_1, x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées des deux centres de gravité, chacun dans le système d'axes indiqué pour le corps auquel il appartient;

α le rapport constant $\frac{m'}{m}$;

β le rapport de similitude, c'est-à-dire celui de deux dimensions homologues.

Les formules (1) du n° 150 donnent d'abord les valeurs de x_1, y_1, z_1, savoir :

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m};$$

les mêmes formules permettent aussi d'avoir x'_1, y'_1, z'_1, qui s'expriment d'une manière toute semblable :

$$x'_1 = \frac{\Sigma m'x'}{\Sigma m'}, \quad y'_1 = \frac{\Sigma m'y'}{\Sigma m'}, \quad z'_1 = \frac{\Sigma m'z'}{\Sigma m'}.$$

Si maintenant on fait dans ces dernières expressions

$$m' = \alpha m, \quad x' = \beta x, \quad y' = \beta y, \quad z' = \beta z,$$

elles deviennent

$$x'_1 = \frac{\alpha\beta \Sigma mx}{\alpha \Sigma m} = \beta x_1, \quad y'_1 = \frac{\alpha\beta \Sigma my}{\alpha \Sigma m} = \beta y_1, \quad z'_1 = \frac{\alpha\beta \Sigma mz}{\alpha \Sigma m} = \beta z_1;$$

on voit, par conséquent, que les coordonnées du centre de gravité de (A') dans le système $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ sont bien égales à celles du centre de gravité de (A) dans le système Ox, Oy, Oz, multipliées par le rapport de similitude; donc les deux points sont bien des points homologues, c'est-à-dire semblablement placés dans leurs systèmes respectifs.

152. *Exemples particuliers de la recherche des centres de gravité de lignes, surfaces ou volumes, dans l'hypothèse de l'homogénéité.* — Nous nous contenterons d'un petit nombre d'exemples, destinés surtout à montrer l'application des théorèmes du n° 151.

(*a*) *Centre de gravité d'une droite.* — Puisque la droite est supposée homogène, il est clair que son milieu est un centre géométrique; c'est donc aussi le centre de gravité.

(*b*) *Centre de gravité d'un arc de cercle.* — Soient l'arc AMB (*fig.* 186), OM le rayon perpendiculaire à la corde AB, O le centre du cercle. Désignons par

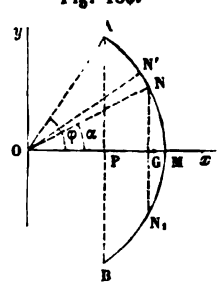


Fig. 186.

r le rayon $\overline{OM}$;

α l'angle entre ce rayon et un autre rayon ON quelconque;

φ le demi-angle au centre AOM;

x, y les coordonnées d'un point N quelconque de l'arc, relativement à des axes contenus dans son plan, dont l'un Ox coïncide avec Om, et l'autre Oy est suivant la direction perpendiculaire;

x_1, y_1 les coordonnées du centre de gravité G.

D'abord ce centre de gravité doit se trouver dans le plan de

l'arc (nº 151, théorème IV); ensuite il doit se trouver sur OX, parce que cette droite présente le caractère d'un diamètre de l'arc (nº 151, théorème I), chaque point N ayant son conjugué N_1 de l'autre côté de Ox et à la même distance. On a donc $y_1 = 0$, et il suffit de chercher x_1. A cet effet, nous emploierons la formule générale (nº 150),

$$x_1 \int ds = \int x\,ds;$$

ici l'on a

$$x = r\cos\alpha, \quad ds = \overline{NN'} = r\,d\alpha,$$

et par suite

$$x_1 \int_{-\varphi}^{\varphi} d\alpha = r \int_{-\varphi}^{\varphi} \cos\alpha\,d\alpha$$

ou, en effectuant les intégrations et résolvant l'équation,

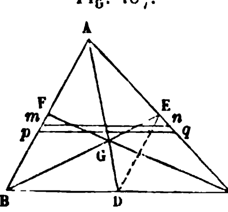
$$x_1 = r\,\frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

On voit par là que le rapport $\frac{x_1}{r}$ ou celui de $\overline{OG}$ à $\overline{OM}$ est égal à $\frac{\sin\varphi}{\varphi}$ ou au rapport de la corde AB à l'arc AMB.

(*c*) *Centre de gravité d'un parallélogramme, d'un cercle, d'une ellipse, de la surface d'une sphère ou d'un ellipsoïde, etc.* — Toutes ces surfaces, considérées comme homogènes, sont douées d'un centre géométrique ; ce point est en même temps le centre de gravité (nº 151, théorème II).

(*d*) *Centre de gravité d'un triangle.* — Considérons le triangle homogène ABC (*fig.* 187). Joignons le sommet A au milieu D de la base BC, et concevons la surface totale divisée en tranches élémentaires par une infinité de parallèles à BC. L'une quelconque de ces tranches, telle que *mnpq*, peut, à la limite, être regardée comme une simple droite pesante, présentant les mêmes masses élémentaires à droite et à gauche de son mi-

Fig. 187.



lieu, qui se trouve sur AD. Cette droite AD est donc un diamètre, conformément à la définition du n° 151, théorème I; donc elle contient le centre de gravité G. Par une raison toute semblable, ce point se trouve également sur les droites qui joignent les sommets B et C aux milieux E et F des côtés opposés; donc il est à leur point de rencontre.

Si l'on joint DE, cette ligne sera parallèle à AB, comme partageant les deux autres côtés du triangle en parties proportionnelles. Par suite, les deux triangles DGE, AGB sont semblables et donnent la proportion

$$\frac{\overline{GD}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2};$$

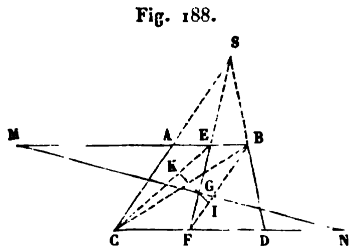
on en conclut que $\frac{\overline{GD}}{\overline{AG}+\overline{GD}}$ ou $\frac{\overline{GD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{3}$, et enfin que le centre de gravité se trouve sur chaque médiane, telle que AD, au tiers de cette ligne à partir de la base, ou aux deux tiers à partir du sommet.

On peut remarquer enfin que le centre de gravité du triangle est le même que celui de trois masses égales placées aux trois sommets. Il faudrait en effet, pour avoir ce dernier centre de gravité, chercher le centre de trois forces parallèles égales, agissant en A, B, C. Les deux dernières donneraient une résultante double passant en D, et celle-ci, composée à son tour avec la force agissant en A, donnerait la résultante finale passant au point de AD qui divise cette droite en segments dans le rapport $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire au point G.

(*e*) *Centre de gravité du trapèze.* — Le trapèze donné est ABCD (*fig.* 188); nous nommons h sa hauteur, $l = \overline{AB}$ sa petite base, $L = \overline{CD}$ sa grande base. D'abord, si l'on imagine qu'on prolonge les côtés non parallèles CA, DB jusqu'à leur point de rencontre S et qu'on joigne S au milieu F de $\overline{CD}$, on aura une ligne SF passant aussi au milieu E de $\overline{AB}$ et divisant en deux parties égales toute droite menée dans le trapèze parallèlement aux deux bases. Cette droite SF, qu'on peut tracer en joignant simplement les milieux des bases (sans

chercher le point S), est donc une ligne diamétrale; on le démontrerait exactement de la même manière que pour la ligne joignant le sommet d'un triangle au milieu de la base opposée (*d*). Donc le centre de gravité G du trapèze se trouve sur EF.

Fig. 188.



Divisons maintenant le trapèze en deux triangles, par la diagonale CB. Le triangle ABC a pour centre de gravité le point K, situé sur CE, à la distance $\frac{2}{3}h$ de CD; le triangle BCD a le centre de gravité I, situé sur BF, à la distance $\frac{1}{3}h$ de la même base CD; en outre, ces triangles sont censés avoir des masses proportionnelles à leurs surfaces, ou à l et L. Le centre de gravité G se trouve donc sur IK, et c'est le point de cette ligne où passe la résultante de deux forces parallèles appliquées en I et K et proportionnelles à L et l. Supposons les forces perpendiculaires au plan de la figure et prenons les moments par rapport à CD; en désignant par y la distance de G à cette ligne, il viendra

$$(L+l)y = \frac{1}{3}hL + \frac{2}{3}hl = \frac{h}{3}(L+2l),$$

équation exprimant que le moment de la résultante est la somme des moments des composantes. Si l'on avait pris les moments par rapport à AB, on aurait trouvé de même

$$(L+l)(h-y) = \frac{h}{3}(l+2L).$$

Donc on a

$$\frac{\overline{EG}}{\overline{GF}} = \frac{h-y}{y} = \frac{l+2L}{L+2l}.$$

L'une quelconque des trois équations ci-dessus conduit sans peine à la détermination de y. La dernière peut se traduire par la construction géométrique suivante : prolonger BA d'une quantité $\overline{AM} = \overline{CD} = L$, prolonger CD d'une quantité $\overline{DN} = \overline{AB} = l$, et joindre MN; le point G où cette ligne coupe EF est le centre de gravité cherché. On a en effet, par la similitude des triangles EGM, FGN,

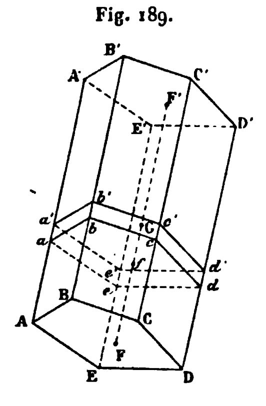
$$\frac{\overline{EG}}{\overline{GF}} = \frac{\overline{EM}}{\overline{FN}} = \frac{\frac{l}{2} + L}{\frac{L}{2} + l} = \frac{l + 2L}{L + 2l};$$

le point de rencontre de MN avec EF divise donc cette dernière ligne en deux segments ayant entre eux le même rapport que les segments déterminés par le centre de gravité, et par conséquent il y a coïncidence entre ces deux points.

(f) *Centre de gravité du volume d'un parallélépipède, d'une sphère, d'un ellipsoïde, etc.* — Tous ces volumes ont un centre géométrique, lequel, dans l'hypothèse de leur homogénéité, est aussi un centre conformément à la définition du n° 151 (théorème II). Ce point est donc aussi leur centre de gravité.

(g) *Centre de gravité d'un prisme ou d'un cylindre.* — Divisons d'abord le prisme ou cylindre ABCDEA'B'C'D'E' (*fig.* 189) en tranches élémentaires par des plans infiniment rapprochés et parallèles aux bases; l'une quelconque de ces tranches pourra être regardée, à la limite, quand son épaisseur diminuera indéfiniment, comme une surface pesante dont chaque élément superficiel possède une masse proportionnelle à son étendue. Le centre de gravité de la tranche $abcdea'b'c'd'e'$, par exemple, coïncide donc, à la limite, avec le centre de gravité f de la surface $abcde$.

Fig. 189.



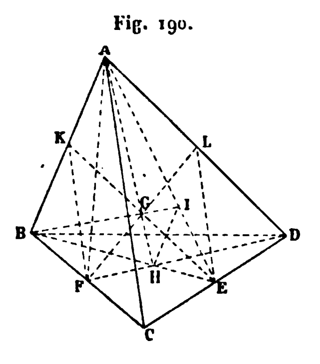
Or toutes les sections $abcde$ sont comme des positions parti-

culières que prendrait la base ABCDE, en glissant, par un mouvement de translation parallèle aux arêtes du prisme (ou aux génératrices du cylindre), et par conséquent le point f se trouve sur la ligne FF′, joignant les centres de gravité F et F′ des deux bases. On voit ainsi que le prisme total se décompose en parties dont les centres de gravité sont situés sur FF′; le centre de gravité de l'ensemble sera donc aussi sur cette ligne (n° 151, théorème IV).

D'un autre côté, il est facile de reconnaître qu'un plan parallèle aux bases, mené par le milieu de la distance qui les sépare, partage en deux parties égales tous les prismes élémentaires déterminés, dans le prisme ou cylindre total, par des plans parallèles aux arêtes ou génératrices; c'est un plan diamétral, dans le sens défini au n° 151, théorème I, et il contient aussi le centre de gravité G cherché. On en conclut immédiatement que ce point est au milieu de la ligne $\overline{FF'}$.

(*h*) *Centre de gravité d'un tétraèdre.* — Soit un tétraèdre ABCD (*fig.* 190); le plan mené par AB et le milieu E de CD divise en deux parties égales toutes les droites parallèles à CD et contenues dans l'intérieur du tétraèdre; par suite, c'est un plan diamétral, dans lequel se trouve le centre de gravité cherché. En vertu de la même raison, il est aussi dans le plan mené par AD et le milieu F de BC; donc il est sur la ligne d'intersection AH de ces plans, laquelle joint le sommet A avec le centre de gravité H de la base opposée. (Le point H est bien le centre de gravité du triangle BCD, puisqu'il est à la rencontre des lignes BE, DF joignant deux sommets aux milieux des côtés opposés.) Maintenant, si dans le plan ABE l'on mène HI parallèle à AB, la droite AE sera divisée dans la même proportion que BE et l'on aura

Fig. 190.



$$\frac{\overline{IE}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{HE}}{\overline{BE}} = \frac{1}{3};$$

donc I est le centre de gravité de la base ACD, et, en le joignant au sommet opposé B, on aura encore une droite BI passant par le centre de gravité du tétraèdre, qui se trouve alors à la rencontre G des droites AH et BI. D'un autre côté, les triangles semblables ABG et HIG d'une part, ABE et IHE d'autre part, donnent les proportions

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{HI}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GH}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{HE}} = 3;$$

donc $\overline{GH} = \frac{1}{3}\overline{AG}$, d'où résulte $\overline{GH} = \frac{1}{4}\overline{AH}$.

Donc, en résumé, *le centre de gravité d'un tétraèdre est sur la ligne qui joint un des sommets avec le centre de gravité de la base opposée, au quart de cette ligne à partir de la base.*

Si l'on coupe le tétraèdre et les plans ABE, ADF par un plan parallèle à BCD, on obtiendra dans ce plan une figure semblable à BCDEHF; le point où la droite AH coupe le plan sécant est donc le centre de gravité de la section triangulaire déterminée par ce plan, car il se trouvera, comme le point H, à la rencontre de deux droites joignant chacune un sommet du triangle au milieu du côté opposé. Le point où la droite AH rencontre la section menée au quart de la hauteur du tétraèdre sera, par suite, le centre de gravité de cette section, et ce sera aussi, comme on vient de le voir, le centre de gravité du tétraèdre. Donc :

Le centre de gravité d'un tétraèdre coïncide avec celui d'une section parallèle à l'une de ses faces, faite au quart de la distance entre cette face et le sommet opposé.

On peut encore remarquer que le centre de gravité d'un tétraèdre est celui de quatre masses égales placées aux quatre sommets. En effet, le centre de gravité des trois masses égales placées en B, C, D serait le point H, comme on l'a vu plus haut; pour obtenir celui des quatre masses réunies, il resterait (n° 151, théorème III) à joindre H à A et à partager $\overline{AH}$ de manière qu'on eût deux segments dans le rapport de 3 à 1, ce qui donnerait bien le point G ci-dessus considéré.

Enfin on pourrait composer les deux forces parallèles et égales, appliquées aux sommets A et B, ce qui donnerait une

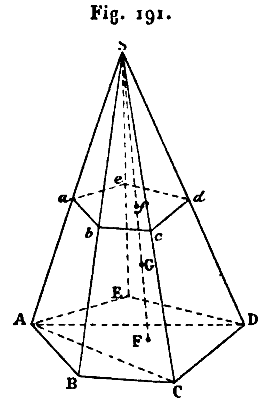
résultante double, passant au point K milieu de $\overline{AB}$; les deux forces appliquées en C et D donneraient de même une seconde résultante partielle, égale à la première et passant au milieu E de $\overline{CD}$. Ces deux résultantes partielles se réduiraient, puisqu'elles sont égales, à une résultante finale passant au milieu de KE. Ce dernier point est le centre de gravité des quatre masses égales placées aux quatre sommets; donc il coïncide avec le centre de gravité G du tétraèdre. Donc :

Le centre de gravité d'un tétraèdre est au milieu d'une des trois lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées.

Voici une autre démonstration du même théorème. On a vu que le centre de gravité se trouve dans le plan ABE, passant par une arête AB et le milieu E de l'arête opposée; par la même raison il est aussi dans le plan CDK, et par conséquent il est sur la ligne KE commune aux deux plans. On prouverait de la même manière qu'il se trouve sur la ligne FL joignant les milieux de BC et de AD; donc il est à la rencontre de ces deux lignes. Or les deux droites $\overline{KF}$ et $\overline{LE}$ sont toutes deux égales à $\frac{1}{2}\,\overline{AC}$ et parallèles à cette arête; donc la figure KLEF est un parallélogramme et par conséquent l'intersection de ses diagonales se fait au milieu de chacune d'elles.

(*i*) *Centre de gravité d'une pyramide quelconque ou d'un cône.* — Considérons la pyramide quelconque SABCDE (*fig.* 191) et supposons-la décomposée en tranches infiniment minces par une série de plans tels que *abcde*, parallèles à la base ABCDE. La tranche comprise entre *abcde* et la section infiniment voisine peut, à la limite, être assimilée à une surface pesante, et son centre de gravité se confond avec celui de la surface *abcde*. D'un autre côté, les surfaces ABCDE, *abcde* sont deux corps semblables; par conséquent leurs centres de gravité F et *f* sont deux points homologues (nº 151, théorème V). Donc *f* n'est

Fig. 191.



autre chose que le point de rencontre du plan *abcde* avec la ligne SF, menée du sommet de la pyramide (ou du centre de similitude des deux surfaces) au centre de gravité de la base. Il résulte de là que toutes les tranches ont leur centre de gravité sur une même droite SF, et par suite que cette droite contient aussi le centre de gravité G de leur ensemble (n° 151, théorème IV), c'est-à-dire de la pyramide.

Maintenant, pour savoir quelle est la position de ce point sur SF, on décomposera la pyramide en tétraèdres par des plans SAC, SAD, ..., menés par l'arête SA et les divers sommets de la base. Si h désigne la hauteur de la pyramide donnée, tous ces tétraèdres, ayant h pour hauteur commune, auront leurs centres de gravité à une même distance $\frac{h}{4}$ de la base ABCDE. Tous ces centres de gravité se trouvent par suite contenus dans un même plan; celui de la pyramide est donc aussi dans ce plan (n° 151, théorème IV), à la distance $\frac{h}{4}$ de la base.

Donc, en résumé,

Le centre de gravité d'une pyramide quelconque est sur la ligne joignant le sommet avec le centre de gravité de la base, et au quart de cette ligne à partir de la base.

Le même énoncé s'applique à un cône droit ou oblique, à base quelconque. On peut en effet regarder le cône comme une pyramide ayant pour base un polygone dont les côtés seraient en nombre infiniment grand.

(*j*) *Centre de gravité d'une zone sphérique ou d'un secteur sphérique.* — Soit AD (*fig.* 192) l'arc de grand cercle qui engendre la zone en tournant autour du rayon OC; divisons la hauteur totale de la zone en parties infiniment petites, égales entre elles, et menons, par tous les points de division, des plans perpendiculaires à OC. Ces plans partagent la zone donnée en zones élémentaires de même surface. Chacun de ces éléments devient, à la limite, assimilable à une circonférence pesante; le centre de gravité de l'élément compris entre les plans *mp*, *nq*, par exemple, sera donc le point I, centre de la circonférence *mp*. En imaginant que le poids de

chaque zone élémentaire soit appliqué à son centre de gravité, on voit qu'on obtiendra une suite de poids égaux et équidistants appliqués tout le long de la droite FH; leur résultante passera donc au milieu de G de cette ligne, et ce point, indépendant de la direction de la pesanteur, est le centre de gravité demandé.

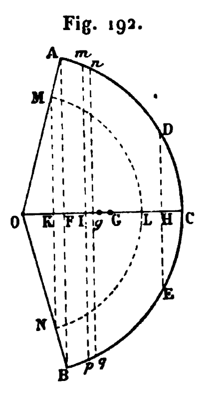


Fig. 192.

Si maintenant on considère le secteur sphérique dont la zone ACB serait la base, on pourra le décomposer en une infinité de secteurs de même volume, ayant pour base des éléments superficiels équivalents pris sur la zone ACB. Ces secteurs élémentaires, assimilables à des pyramides, ont leurs centres de gravité aux trois quarts du rayon à partir du centre; leurs poids sont uniformément distribués sur une zone MLN homothétique à ACB, ayant un rayon égal à $\frac{3}{4}\overline{OC}$. Donc le centre de gravité de leur ensemble coïncide avec celui de la zone MLN et se trouve au milieu g de la hauteur $\overline{KL}$ de cette zone; sa distance Og au centre de la sphère est égale à

$$\frac{1}{2}(\overline{OK}+\overline{OL}) \quad \text{ou} \quad \frac{3}{8}(\overline{OF}+\overline{OC}).$$

(*k*) *Centre de gravité d'un segment de parabole ou de paraboloïde de révolution.* — Dans tous les exemples qui précèdent, les centres de gravité ont été déterminés, à peu près exclusivement, par des procédés géométriques. Nous ajoutons ce dernier exemple afin de montrer l'emploi du calcul.

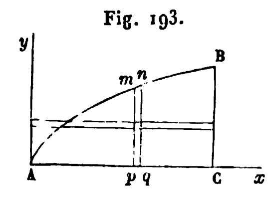


Fig. 193.

Supposons en premier lieu une parabole AB ayant Ax pour axe et Ay pour tangente au sommet (*fig.* 193); on demande le centre de gravité du segment compris entre la courbe, la portion AC de l'axe et la parallèle BC à Ay. L'équation de la courbe sera, en posant

$\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = b$,

$$x = a\frac{y^2}{b^2},$$

car les abscisses varient proportionnellement au carré des ordonnées; on sait aussi que sa surface $\int_0^a y\,dx$ a pour valeur $\frac{2}{3}ab$.

Si la surface est décomposée en éléments $dx\,dy$ par des parallèles aux axes, les formules (3) du n° 150 donneront ici, pour déterminer les coordonnées x_1, y_1 du centre de gravité,

$$\frac{2}{3}ab\,x_1 = \int\int x\,dx\,dy,\quad \frac{2}{3}ab\,y_1 = \int\int y\,dx\,dy,$$

les intégrales doubles devant être prises dans toute l'étendue de la surface ABC. Une première intégration, faite pour une rangée d'éléments telle que $mnpq$, parallèle aux y, conduit d'abord aux équations

$$\frac{2}{3}ab\,x_1 = \int_0^a y\,x\,dx,\quad \frac{2}{3}ab\,y_1 = \frac{1}{2}\int_0^a y^2 dx,$$

x, y désignant alors les coordonnées du point m de la parabole. On remplacera ensuite x par sa valeur $\frac{a\,y^2}{b^2}$, et l'on aura

$$\frac{2}{3}ab\,x_1 = \frac{2a^2}{b^4}\int_0^b y^4 dy,\quad \frac{2}{3}ab\,y_1 = \frac{a}{b^2}\int_0^b y^3 dy,$$

soit finalement, après avoir effectué les intégrations et supprimé les facteurs communs,

$$x_1 = \frac{3}{5}a,\quad y_1 = \frac{3}{8}b.$$

En second lieu, nous chercherons le centre de gravité du segment de paraboloïde engendré par la révolution de la figure ABC autour de Ax. La tranche plane $mnpq$ engendre un volume qu'on peut, à la limite, assimiler à un cercle pesant; ce volume élémentaire a pour expression $\pi y^2 dx$ et son centre

de gravité est en p sur l'axe de révolution. Le centre de gravité de l'ensemble est donc aussi sur cette ligne et son abscisse x_1 doit satisfaire à l'équation de moments

$$\pi x_1 \int_0^a y^2 dx = \int_0^a \pi y^2 x \, dx$$

ou, en remplaçant y^2 par sa valeur $\frac{b^2 x}{a}$ et supprimant le facteur $\frac{\pi b^2}{a}$,

$$x_1 \int_0^a x \, dx = \int_0^a x^2 dx,$$

ou enfin, tout calcul effectué,

$$x_1 = \frac{2}{3} a.$$

On pourrait multiplier à l'infini les exemples relatifs aux centres de gravité des lignes, surfaces ou volumes. Nous pensons en avoir donné un nombre suffisant pour bien faire comprendre l'esprit des méthodes à suivre dans ce genre de recherches.

153. *Expression du travail de la pesanteur dans le déplacement d'un système matériel quelconque.* — Soit donné un système matériel quelconque en mouvement; proposons-nous de calculer le travail total produit par le poids de chacun de ses points, pendant qu'il prend un déplacement d'une étendue quelconque.

Nommons, à cet effet,

m la masse de l'un des points;
z et z_0 ses distances initiale et finale à un plan horizontal supérieur, pris pour plan de comparaison;
Z et Z_0 les hauteurs correspondantes du centre de gravité, au-dessous du même plan.

Le travail du poids élémentaire mg appliqué au point dont m désigne la masse sera (nº 102) le produit de mg par la projection verticale $z - z_0$ du déplacement de ce point; donc le

travail total T dû à l'ensemble des actions de la pesanteur s'exprimera par

$$T = \Sigma mg(z - z_0) \quad \text{ou} \quad T = g\Sigma m(z - z_0),$$

la somme Σ devant s'étendre à tous les points matériels du système. Or on sait que les coordonnées Z et Z_0 vérifient les équations (n° 150)

$$Z\Sigma m = \Sigma mz, \quad Z_0\Sigma m = \Sigma mz_0;$$

il en résulte, par soustraction membre à membre,

$$(Z - Z_0)\Sigma m = \Sigma m(z - z_0),$$

et, par suite, le travail T devient

$$T = g(Z - Z_0)\Sigma m = (Z - Z_0)\Sigma mg.$$

On énonce le résultat qu'on vient d'obtenir, en disant :

Le travail de la pesanteur dans le déplacement d'un système matériel quelconque est égal à celui que produirait le poids total Σmg considéré comme agissant au centre de gravité.

Remarque I. — Il peut arriver que les volumes occupés par le système dans les deux positions considérées aient une partie commune (A); supposons en outre que cette partie commune comprenne, dans les deux positions, des masses égales et placées aux mêmes points géométriques; enfin soient (B_0) et (B) les parties non communes dans les deux mêmes positions. Si nous mettons l'expression de T sous la forme

$$T = \Sigma mgz - \Sigma mgz_0,$$

on voit alors que la partie (A) produit les mêmes termes dans les deux sommes à retrancher l'une de l'autre, et que par conséquent elle disparaît. Le travail de la pesanteur est donc le même que si l'on avait substitué au déplacement réel des divers points un déplacement fictif dans lequel on aurait simplement transporté la masse de (B_0) dans la position finalement occupée par la masse de (B). Il suffira de restreindre à ces deux volumes le calcul de la différence $\Sigma mgz - \Sigma mgz_0$.

En appelant M′ leur masse totale, Z'_0 et Z' les ordonnées de leurs centres de gravité au-dessous d'un même plan horizontal de comparaison, le travail de la pesanteur pendant le déplacement du système total sera

$$T = M'g(Z' - Z'_0).$$

Remarque II. — Tout ce qu'on vient de dire au sujet de la pesanteur resterait évidemment vrai si l'accélération g changeait de grandeur et de direction. Donc on peut étendre les résultats obtenus à un système quelconque de forces parallèles et proportionnelles aux masses de leurs points d'application. Leur travail total serait toujours égal à celui d'une force unique, égale à leur somme et considérée comme agissant au centre de gravité de l'ensemble des points.

On a vu (nº 137) que deux systèmes de forces équivalents entre eux font le même travail total dans un déplacement quelconque de leurs points d'application, pourvu que ces points forment un système invariable pendant le déplacement. On peut donc toujours, quand il s'agit d'un corps rigoureusement solide, sollicité par des forces réductibles à une résultante unique, dire que le travail de la résultante est égal à la somme des travaux des composantes. Quand on considère, en particulier, un système de forces parallèles et proportionnelles aux masses, comme le sont les actions dues à la pesanteur, on peut les réduire à une résultante passant par le centre de gravité et égale à leur somme; cette résultante, appliquée en un point quelconque de sa ligne d'action, serait toujours équivalente à elle-même et au groupe des forces primitives, qu'elle pourrait par conséquent remplacer sans changer la valeur du travail total. Mais il est remarquable que cette propriété subsiste encore sans avoir besoin de supposer l'invariabilité du corps, pourvu que la résultante des forces parallèles et proportionnelles aux masses soit censée appliquée au centre de gravité.

154. *Équilibre d'un système pesant, à liaisons.* — Nous allons nous occuper de l'équilibre de certains systèmes matériels, dans lesquels existent des liaisons remplissant la condition essentielle formulée au nº 130, laquelle consiste en ce

que les forces produites par les liaisons font un travail total nul dans tous les déplacements que ces liaisons laissent possibles. Nous faisons en outre une supposition particulière sur les forces que nous avons nommées *forces directement appliquées,* et qui ne proviennent pas des liaisons : c'est que ces forces sont uniquement dues aux actions de la pesanteur.

Cela posé, appliquons le théorème général du n° **131.** Soient

P le poids total du système;
z l'ordonnée de son centre de gravité, dans une position d'équilibre, au-dessous d'un plan horizontal de comparaison;
δz un abaissement virtuel que prendrait ce point, si le système éprouvait, à partir de la position d'équilibre considérée, un déplacement compatible avec les liaisons.

Le théorème dont il s'agit, combiné avec celui du n° **153**, nous donne pour condition nécessaire et suffisante de l'équilibre

$$P\delta z = 0 \quad \text{ou simplement} \quad \delta z = 0.$$

L'équation $\delta z = 0$ signifie que le centre de gravité doit rester à la même hauteur, quand on suppose le système écarté infiniment peu de sa position d'équilibre, en satisfaisant toujours aux conditions imposées par les liaisons. Si, par exemple, les liaisons obligent le centre de gravité à se mouvoir sur une courbe ou sur une surface, les positions d'équilibre seront celles pour lesquelles la tangente à la courbe ou le plan tangent à la surface seront parallèles à un plan horizontal; d'une manière générale, si, en vertu des liaisons, la hauteur z dépend d'un nombre quelconque de variables, ces variables auront, dans les positions d'équilibre, des valeurs telles que la différentielle de z soit nulle et que, par conséquent, le centre de gravité soit le plus haut ou le plus bas possible.

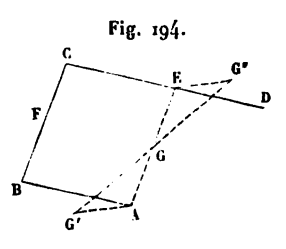
Il sera démontré plus loin (Cours de deuxième année) que dans le cas d'un maximum de z l'équilibre est *stable*, c'est-à-dire que le système tend à reprendre sa position d'équilibre quand on l'en écarte un peu.

Si les liaisons avaient pour effet de rendre le centre de gravité fixe ou seulement mobile dans un plan horizontal, on aurait $\delta z = 0$ dans toutes les positions qu'on pourrait donner

au système; donc, en le plaçant dans l'une quelconque de ces positions sans lui donner de vitesse, il persisterait dans l'immobilité. On dit alors que l'équilibre est *indifférent.*

155. *Exemple d'équilibre indifférent; pont-levis à flèche.* — Cet appareil comprend en premier lieu un tablier AB (*fig.* 194) mobile autour d'un axe horizontal projeté en A; ce tablier, quand il est placé horizontalement, permet de franchir une excavation située au-dessous; mais en le relevant, on intercepte le passage quand on veut. A une certaine distance au-dessus du tablier se trouve un bâti CD appelé *flèche,* qui peut tourner autour d'un axe E parallèle à A et qui porte un certain contrepoids sur la partie DE; enfin deux chaînes, toutes deux projetées sur BC et articulées avec le tablier et la flèche en des points dont B et C sont les projections, relient ces deux corps l'un à l'autre. L'ensemble de l'appareil est symétrique par rapport à un plan vertical que nous supposons coïncider avec celui de la figure. Si l'on fait abstraction des frottements qui s'exercent toujours dans les articulations ou sur les appuis fixes du tablier et de la flèche, on aura là un système pesant à liaisons. Ce système est construit de telle manière que son centre de gravité reste immobile, pendant que, au moyen d'une force convenable appliquée sur la flèche, on oblige AB et CD à tourner autour de leurs axes respectifs, afin d'intercepter ou de rendre libre le passage sur le tablier. S'il en est ainsi, les poids des diverses parties du système se feront équilibre, et la force appliquée ne devra avoir que l'intensité nécessaire pour vaincre les frottements.

Fig. 194.



Voyons maintenant comment on peut s'arranger pour rendre immobile le centre de gravité de l'ensemble.

Les chaînes étant de construction uniforme sur toute leur longueur, leur centre de gravité particulier se trouve en F milieu de $\overline{CB}$, point où l'on pourrait condenser leur masse totale m, sans changer le centre de gravité général; nous avons aussi le droit de les remplacer par deux masses, cha-

cune égale à $\frac{m}{2}$, placées en B et en C. Soit alors G' le centre de gravité du tablier, en lui supposant jointe la masse $\frac{m}{2}$, en B; soit G" le centre de gravité de la flèche et du contrepoids, y compris aussi la masse $\frac{m}{2}$ placée au point C; désignons par M' et M" les masses totales dont les centres de gravité sont G' et G". On comprend qu'on puisse faire varier à volonté le point G", en choisissant la dimension $\overline{DE}$ ainsi que l'emplacement et l'intensité du contrepoids. Il est donc possible de faire en sorte que EG" soit parallèle à AG', dans une disposition du système, et de satisfaire en outre à la relation

$$M'.\overline{AG'} = M''\overline{EG''}.$$

Si enfin on a eu la précaution de faire $\overline{AE} = \overline{BC}$ et $\overline{CE} = \overline{AB}$, il est facile de constater qu'on aura atteint le but, et que le centre de gravité du système reste bien immobile, dans toutes les positions qu'on peut faire prendre à celui-ci.

En effet, la figure ABCE reste toujours un parallélogramme, puisque ses côtés opposés sont égaux; donc CE et AB sont toujours parallèles. Comme EG" est parallèle à AG' dans une position particulière, il en résulte que les angles constants G'AB et G"ED sont égaux entre eux; par conséquent les droites AG' et EG" restent aussi constamment parallèles, car elles font un même angle avec les directions parallèles AB et CE. Il suit de là que, si l'on joint G'G", les deux triangles GAG', GEG" seront équiangles et semblables, ce qui donne les égalités

$$\frac{\overline{AG'}}{\overline{EG''}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{GE}}, \quad \frac{\overline{GG'}}{\overline{GG''}} = \frac{\overline{AG'}}{\overline{EG''}} = \frac{M''}{M'};$$

la première démontre que le point G est toujours le même sur la droite AE, car il partage sa longueur dans un rapport constant; la seconde fait voir que ce point immobile est le centre de gravité du système, car il se trouve sur la droite qui joint les centres de gravité des deux parties auxquelles on a pu réduire l'ensemble des masses, et il divise cette droite

dans le rapport inverse des masses M′, M″ de ces parties (n° 151, théorème III).

156. *Balances en général; exemple de la balance à bascule.* — Les appareils divers connus sous le nom de *balances* et destinés à mesurer les poids comprennent, comme parties essentielles, deux plateaux tellement liés entre eux et à des supports fixes, qu'ils ne peuvent prendre que des mouvements de translation en sens contraires l'un de l'autre; ces mouvements sont d'ailleurs verticaux et leurs grandeurs ont un rapport connu, déterminé par les conditions d'établissement de l'appareil. Sur l'un des plateaux on pose le corps dont on veut mesurer le poids; sur l'autre on met des poids connus d'avance et marqués, et l'on en met une quantité suffisante pour que la balance soit en équilibre dans une certaine position déterminée, que des repères établis sur elle permettent toujours de retrouver facilement. Soient

P le poids à mesurer;

P′ le poids marqué au moyen duquel on lui fait équilibre;

δp un déplacement virtuel attribué, à partir de la position d'équilibre, au plateau sur lequel est posé le poids P;

$\delta p'$ le déplacement correspondant que prendrait le plateau supportant le poids marqué P′.

Si nous supposons que les poids propres des diverses pièces de la balance ont été choisis de manière à se faire séparément équilibre quand l'appareil ne porte aucune charge, la condition d'équilibre, quand il sera chargé, sera simplement (n° 131)

$$P\,\delta p - P'\,\delta p' = 0,$$

pourvu cependant que les liaisons remplissent la condition essentielle indiquée au n° 130. Cela exige notamment que les pièces soient très peu déformables et qu'on réduise autant que possible les frottements des surfaces en contact. Sous cette réserve, l'équation ci-dessus donne pour valeur de P l'expression $P'\frac{\delta p'}{\delta p}$. Pour la commodité des opérations, on s'arrange ordinairement de manière à rendre le rapport $\frac{\delta p'}{\delta}$

égal à 1 ou à 10. Dans le premier cas, le poids à mesurer est égal au poids marqué; dans le second, il en est le décuple, et chaque hectogramme compris dans P′ correspond à 1kg dans l'évaluation de P.

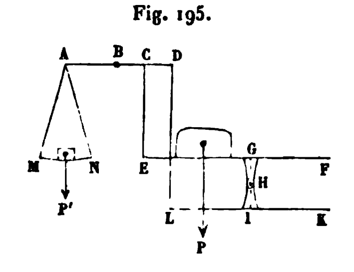
On se rend facilement compte de la raison pour laquelle les deux plateaux doivent être assujettis à ne prendre que des mouvements de translation. Supposons en effet qu'il en soit différemment et que δp et $\delta p'$ varient d'un point à un autre pour chaque plateau; décomposons, d'autre part, les poids P et P′ en éléments ϖ et ϖ' dont chacun répondrait à un point de l'un des plateaux. L'équation d'équilibre deviendrait alors

$$\Sigma \varpi \, \delta p - \Sigma \varpi' \, \delta p' = 0,$$

les deux sommes devant être étendues, la première à tous les éléments ϖ, la seconde à tous les éléments ϖ'. On voit qu'on ne pourrait plus en tirer le rapport $\frac{P}{P'}$; le poids marqué nécessaire pour équilibrer un corps à peser dépendrait de la manière dont ces poids seraient répartis sur chaque plateau, et l'usage de la balance deviendrait pour le moins extrêmement compliqué, sinon impossible, dans la pratique.

Nous donnerons comme exemple la *balance à bascule*, qu'on appelle souvent aussi *balance de Quintenz*, du nom de son auteur. On a un levier AD (*fig.* 195) placé horizontalement dans sa position d'équilibre et assujetti à tourner autour d'un axe horizontal projeté en B; en A est suspendu un plateau analogue à un plateau de balance ordinaire, destiné à recevoir les poids marqués P′; en C et D sont articulées deux tringles verticales. La première s'articule en E avec le plateau horizontal EF, sur lequel se placent les corps dont on veut mesurer le poids P; la seconde s'articule en L avec un second levier horizontal LK, mobile autour de l'axe horizontal K, ce levier devant, concurremment avec la tringle CE,

Fig. 195.



supporter le plateau EF, avec lequel il est réuni par une articulation cylindrique H dont l'axe est également horizontal.

Supposons maintenant une rotation virtuelle $\delta\alpha$ du levier AD autour de son axe B. Le point C s'abaisse de $\overline{BC}.\delta\alpha$, de même que le point E; les points D et L s'abaissent de $\overline{BD}.\delta\alpha$; par suite, le levier KL tourne de l'angle $\frac{\overline{BD}.\delta\alpha}{\overline{LK}}$, et les points I et G placés sur la verticale de H descendent d'une quantité exprimée par $\frac{\overline{IK}.\overline{BD}.\delta\alpha}{\overline{LK}}$; pour que le plateau ait un mouvement de translation, ce déplacement doit être égal à celui du point E, ce qui donne la condition

$$\overline{BC} = \frac{\overline{IK}.\overline{BD}}{\overline{LK}} \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{LK}},$$

à observer dans l'établissement de la balance. Cette condition est d'ailleurs suffisante, parce que tous les points de l'horizontale projetée en G se déplacent de la même quantité, et que le plan du plateau est déterminé par cette droite et le point E.

L'égalité précédente étant supposée vérifiée, les déplacements δp, $\delta p'$ auront pour expressions

$$\delta p = \overline{BC}.\delta\alpha, \quad \delta p' = \overline{AB}.\delta\alpha;$$

le rapport de P à P' sera donc

$$\frac{P}{P'} = \frac{\delta p'}{\delta p} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

On prend généralement le nombre 10 pour valeur de ce rapport.

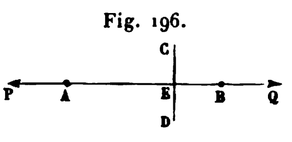
§ IV. — Équilibre des systèmes funiculaires.

157. *Définition; équilibre d'un cordon sollicité par deux forces appliquées en ses points extrêmes.* — On appelle *systèmes funiculaires* ceux qui sont composés de fils ou cordons auxquels on attribue, par hypothèse, la flexibilité et l'inextensibilité parfaites. Peu importe que le fil soit fabriqué en

métal ou en matière textile, pourvu qu'il possède ces deux propriétés, qui, du reste, ne sont jamais absolument réalisées dans la nature.

Lorsqu'un fil ou cordon AB (*fig.* 196), ayant la forme rectiligne, est seulement soumis à des forces P et Q appliquées en ses points extrêmes A et B, il faut, en premier lieu, pour que l'équilibre existe, que ces forces satisfassent aux conditions générales de l'équilibre (n° 129). La nullité de leur projection totale sur une droite quelconque permet d'abord d'affirmer qu'elles sont égales et de sens contraires; de plus, elles doivent être directement opposées, c'est-à-dire agir toutes deux suivant la ligne AB, car autrement on pourrait mener par le point A des axes qui ne rencontreraient pas Q, et la somme des moments ne serait pas nulle par rapport à ces axes. On trouve donc, comme conditions nécessaires de l'équilibre, que P doit être égal à Q et que ces forces doivent agir toutes deux suivant AB et en sens contraires. Maintenant il faut examiner si cela suffit.

Fig. 196.



Ici deux cas sont à distinguer. En premier lieu, si les forces P et Q tendent à écarter l'un de l'autre les points A et B, comme le représente la figure, l'inextensibilité du cordon suffira pour empêcher cet effet de se produire; le système supposé en repos initial y persistera donc, et il y aura équilibre. Les conditions ci-dessus indiquées seront alors suffisantes; mais, si l'on change le sens des forces égales P et Q, nous regardons comme un fait résultant de la nature du cordon (fait établi d'ailleurs par l'expérience) que ce cordon se courbera et sera incapable d'empêcher les points A et B de se rapprocher, en sorte que l'équilibre n'existerait pas et que les conditions ne seraient plus suffisantes.

Nous avons supposé le cordon rectiligne. Dans le cas contraire, l'équilibre serait toujours impossible, car deux forces égales et contraires appliquées aux extrémités le déformeraient nécessairement en diminuant ou augmentant sa courbure, suivant qu'elles tendraient à écarter ou à rapprocher leurs points d'application.

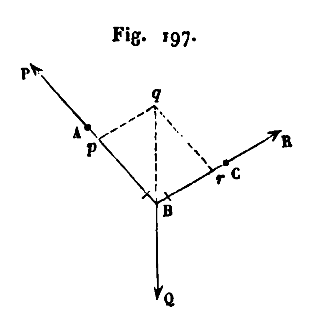
En résumé, les conditions nécessaires et suffisantes de l'é-

quilibre consistent donc en ce que : 1° le cordon doit être rectiligne; 2° les forces doivent être égales et agir en sens contraires suivant la ligne du cordon; 3° leur sens doit être tel qu'elles tendent à augmenter la distance de leurs points d'application.

Si maintenant on imagine un plan quelconque CD rencontrant le fil ou cordon en E, l'équilibre de la partie AE exige que l'autre partie EB exerce sur la première une force égale et directement opposée à P, et de même l'équilibre de la partie EB montre que cette partie doit recevoir de AE une force égale et contraire à Q. Cette seconde force exercée en E sur EB est égale et contraire à celle qui est exercée au même point sur AE, puisqu'on a $P = Q$ (¹); il y a donc en E deux actions mutuelles des deux parties l'une sur l'autre, ou, si l'on veut, l'action et la réaction. Cette action réciproque en vertu de laquelle les deux parties ne peuvent pas se séparer, malgré les forces P et Q qui tendent à opérer la séparation, constitue ce qu'on nomme la *tension* du fil ou cordon. Comme on le voit, elle est constante dans toutes les sections, s'il y a équilibre, et sa valeur est celle des forces extérieures appliquées aux deux bouts.

158. *Équilibre d'un cordon soumis à trois forces.* — Supposons trois forces P, Q, R appliquées aux trois points A, B, C d'un cordon (*fig.* 197) et se faisant équilibre. La partie AB ne supportant aucune force dans l'intervalle de ses points extrêmes A et B, l'équilibre exige, comme on vient de le voir, qu'elle soit droite et soumise à une tension constante, égale à P; il faut de plus que P agisse suivant la droite AB dans le sens voulu pour produire une tension. De même l'é-

Fig. 197.



(¹) L'égalité des forces mutuelles exercées dans la section E aurait encore lieu (n° 95), même dans le cas où P serait différent de Q et où l'équilibre du cordon n'existerait pas.

quilibre de BC démontre que cette partie est droite, que R agit suivant sa direction et produit une tension égale à R en tout point de BC. Maintenant si nous imaginons deux sections faites dans AB et BC infiniment près de B, la petite quantité de matière ou le point matériel compris dans leur intervalle sera soumis à trois forces, savoir : la force Q et les deux tensions, respectivement égales à P et R, qui agissent dans les directions BA et BC. Puisque le point B reste en équilibre, Q doit être égale et contraire à la résultante de P et de R; donc, en prenant $\overline{Bp} = P$, $\overline{Br} = R$ et achevant le parallélogramme $Bpqr$ sur ces deux droites, la diagonale $\overline{Bq}$ devra être égale à Q et se trouver en prolongement de cette force.

Réciproquement, si cette condition est satisfaite, l'équilibre existera. En effet, l'équilibre existerait nécessairement en rendant fixe le point B, et il ne sera pas troublé quand on restituera sa liberté à ce point, car il ne pourra sortir du repos sous l'action de trois forces dont la résultante est nulle.

Les rapports de grandeur de ces trois forces s'obtiennent facilement par la considération du triangle Bqr; la proportionnalité des sinus aux côtés opposés donne les relations déjà connues (nº 11)

$$\frac{P}{\sin(Q,R)} = \frac{Q}{\sin(R,P)} = \frac{R}{\sin(P,Q)}.$$

On voit par là que, si les forces P, Q, R conservent entre elles des rapports finis, il doit en être de même pour les sinus; il serait donc impossible de supposer un cordon rectiligne tendu par les forces P et R et soumis en même temps à une force transversale Q, car on aurait alors

$$\sin(R,P) = 0, \quad \sin(Q,R) = \sin(P,Q),$$

et les équations ci-dessus ne pourraient être satisfaites qu'en prenant

$$Q = 0, \quad P = R.$$

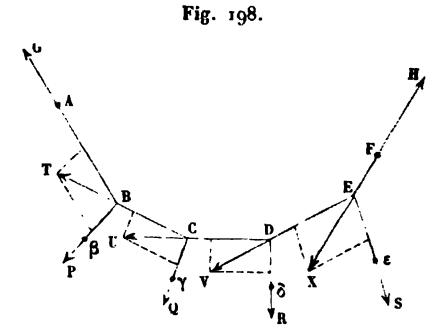
Nous remarquerons enfin que si la force Q, au lieu d'être appliquée directement au point B du cordon AC, agissait par l'intermédiaire d'un autre cordon noué en B avec le premier, ce second cordon devrait, dans l'hypothèse de l'équilibre

être tendu en ligne droite dans la direction de la force Q. Sa tension produirait alors sur le point B la force que nous y avions d'abord appliquée directement; la même condition d'équilibre et les mêmes rapports de grandeur entre les trois forces se trouveraient donc conservés.

On pourrait supposer un nombre quelconque de cordons réunis par un nœud et soumis chacun à une force; on verrait de même que les conditions d'équilibre consistent en ce que 1° chaque cordon doit être rectiligne; 2° chaque force doit agir dans la direction de son cordon et dans le sens voulu pour le tendre; 3° les forces considérées comme agissant toutes sur le point de réunion des cordons doivent se faire équilibre.

159. *Équilibre du polygone funiculaire.* — Soit ABCDEF (*fig.* 198) un cordon sollicité en ses points extrêmes A, F par

Fig. 198.



des forces G, H, et aux points intermédiaires B, C, D, E par des forces P, Q, R, S, qui agissent immédiatement ou par l'intermédiaire de cordons noués sur ABCDEF. Comme on vient de le voir, cela revient au même; on a supposé la seconde alternative en dessinant la figure. Il s'agit d'indiquer les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de ce système.

Considérons d'abord la partie du système composée des cordons qui aboutissent en un point intermédiaire; prenons par exemple le point C, auquel se réunissent le cordon Cγ et les portions BC, CD du cordon ABCDEF. Ce système partiel

doit être en équilibre sous l'action de la force Q et des forces exercées en ses points extrêmes B, D, lesquelles peuvent toujours se réduire à une résultante unique pour chacun d'eux. On rentre ainsi dans les conditions de la question traitée au n° 158, et, en appliquant au système partiel dont il s'agit ici les résultats ci-dessus obtenus, nous pourrons dire que les trois cordons Cγ, BC, CD doivent être rectilignes et sollicités chacun par une force suivant sa direction et dans le sens voulu pour le tendre. La répétition d'un raisonnement tout pareil pour chacun des autres points intermédiaires B, D, E nous conduit à dire la même chose de tous les cordons ou parties de cordons aboutissant à ces points; donc :

1° *Dans l'état d'équilibre le cordon principal* ABCDEF *affecte la forme d'un polygone à côtés rectilignes, ayant ses sommets aux points où il est rencontré par les lignes d'action des forces intermédiaires* P, Q, R, S; *les cordons secondaires* Bβ, Cγ, Dδ, Eε *sont également rectilignes; chacun de ces cordons secondaires est, ainsi que les parties extrêmes* AB, EF *du cordon principal, sollicité par une force ayant sa direction, et le sens convenable pour le tendre.*

Ce premier point établi, remarquons que le point B doit être en équilibre sous l'action de deux forces connues G, P et d'une force inconnue T, égale à la tension du côté BC. Pour cela il faut que cette dernière soit égale et contraire à la résultante des deux premières; si donc, après avoir transporté celles-ci en B, on construit sur elles un parallélogramme, la diagonale de ce parallélogramme devra se trouver dans le prolongement du côté CB, et sa grandeur fera connaître la tension T. Nous passons ensuite au point C, et nous observons qu'il se trouve en équilibre sous l'action de la force T, maintenant connue, de la force Q connue aussi et d'une force inconnue U, exercée par le côté CD et égale à sa tension. La diagonale du parallélogramme construit sur T et Q, transportée en C, doit donc coïncider avec DC prolongé, et sa grandeur égale la tension U de ce côté. En appliquant le même procédé successivement à tous les sommets, on vérifiera que les diagonales des parallélogrammes ont bien les directions et sens voulus, et l'on déterminera en même temps

les valeurs des tensions inconnues *a priori;* de plus, quand on arrivera au dernier sommet E, la tension X qu'on aura trouvée pour le côté EF devra être égale à la force donnée H, sans quoi ce côté ne pourrait rester en équilibre.

On remarquera que T est la résultante des deux premières forces G, P; U est la résultante de T et de Q, et par suite celle des trois premières forces G, P, Q; de même V est la résultante de G, P, Q, R; la tension X est la résultante de G, P, Q, R, S; et enfin la résultante de l'ensemble complet des forces G, P, Q, R, S, H est la même que celle de X et de H, c'est-à-dire zéro, comme on vient de le voir. Donc les conditions d'équilibre fournies par la recherche des tensions subies par les divers côtés peuvent se résumer ainsi :

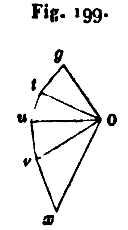
2° *Si l'on compose toutes les forces agissant sur le polygone, depuis une de ses extrémités* (A *par exemple*) *jusqu'à un sommet quelconque, y compris celle qui agit sur ce sommet, elles doivent se réduire à une résultante unique ayant la direction du côté suivant et le sens voulu pour le tendre. En outre, le système complet des forces extérieures doit se réduire à une résultante nulle.*

Nous allons démontrer que ces conditions, jointes à celles que nous avons déjà indiquées, sont suffisantes. En effet, tous les côtés du polygone étant droits, ainsi que les cordons sur lesquels agissent les forces intermédiaires P, Q, R, S, et chaque force extérieure étant supposée dans la direction du cordon qu'elle sollicite et dans le sens voulu pour le tendre, il est évident qu'on rendra l'équilibre nécessaire et inévitable en fixant tous les sommets B, C, D, E. Maintenant nous pouvons, sans le troubler, rendre la liberté au sommet B, car la résultante T des forces G et P, qui lui sont appliquées, ne fait que tendre la partie du cordon BC et ne peut déplacer B, en raison de la fixité du point C. Nous rendrons ensuite la liberté à C également sans détruire l'équilibre, car ce point ne pourra sortir du repos sous l'action des forces T et Q, dont la résultante U tend simplement le cordon CD, attaché au point fixe D. On verrait de la même manière qu'on peut rendre la liberté à D; et l'on pourra aussi la rendre au dernier sommet, parce que les deux forces égales et directement op-

posées X et H tendront le cordon EF, sans lui faire prendre aucun déplacement. L'équilibre existera donc indépendamment de la fixité des sommets.

160. *Construction de Varignon.* — La deuxième série de conditions d'équilibre du polygone funiculaire (n° 159, 2°) se vérifie très élégamment par une construction due à Varignon, laquelle fournit en même temps les tensions inconnues. Supposons la *fig.* 199 construite à côté de la *fig.* 198, de la manière suivante : on mènera par un point O pris arbitrairement la droite Og égale et parallèle à la force G, et de même sens; au bout de cette ligne on transportera parallèlement à elle-même la force $P = \overline{gt}$, puis successivement et bout à bout les forces Q, R, S, représentées en grandeur, direction et sens par les droites $\overline{tu}$, $\overline{uv}$, $\overline{vx}$. Enfin on joindra le point O à tous les points t, u, v, x, par les droites Ot, Ou, Ov, Ox. Il est clair, d'après cette construction, que Ot est la résultante de $\overline{Og} = G$ et de $\overline{gt} = P$; donc $\overline{Ot}$ représente la tension T et la fait connaître en grandeur, direction et sens. On constatera de même que les diagonales suivantes représentent les grandeurs, directions et sens des tensions $U = \overline{Ou}$, $V = \overline{Ov}$, $X = \overline{Ox}$, lesquelles sont ainsi déterminées. Dès lors les conditions dont il s'agit se traduisent en disant que :

Fig. 199.



Les diagonales intermédiaires, allant de O *à tous les points* t, u, v, *doivent être parallèles respectivement aux côtés* BC, CD, DE, *dont elles représentent les tensions; elles doivent avoir le sens voulu pour tendre ces côtés quand elles sont rétablies dans leur vraie position, en les transportant parallèlement en* B, C, D; *enfin, la dernière diagonale* Ox *doit être égale, parallèle et de sens contraire à la force donnée* H.

Au lieu de cette dernière partie de l'énoncé, on peut dire que, si l'on achève le polygone des forces, en menant par le point x une droite égale et parallèle à H, ayant aussi même sens, cette droite doit se terminer en O, de manière à fermer le polygone.

161. *Cas particuliers du polygone funiculaire.* — Nous allons étudier certaines modifications, intéressantes à divers points de vue, des données générales du nº 159.

(*a*) *Les extrémités* A *et* F (*fig.* 198) *du polygone sont attachées à des points fixes.* — Les forces données n'agissent plus qu'aux sommets intermédiaires B, C, D, E; en A et F les appuis fixes produisent des réactions G et H, *a priori* inconnues. L'équilibre du système a toujours lieu sous l'ensemble des forces G, P, Q, R, S, H; les raisonnements du nº 159 sont encore applicables et démontrent d'abord que le polygone doit avoir ses côtés droits; que les cordons secondaires Bβ, Cγ, Dδ, Eε doivent être également rectilignes et tendus par les forces P, Q, R, S agissant suivant leurs directions respectives et dans le sens voulu; enfin que les réactions inconnues G et H agissent dans les directions et sens BA, EF. Imaginons ensuite qu'on applique la construction de Varignon (nº 160). Rien n'empêchera de construire d'abord la partie *gtuvx* (*fig.* 199) du polygone des forces, laquelle comprend seulement les forces connues P, Q, R, S portées bout à bout; puis, comme les diagonales extrêmes O*g*, O*x* sont parallèles à AB et EF, on mènera ces parallèles par les points *g* et *x*, et l'on obtiendra le point O par leur rencontre. Les conditions d'équilibre résultant de la construction de Varignon consistent donc ici en ce que : 1º les deux parallèles dont nous venons de parler doivent se couper; 2º les diagonales intermédiaires O*t*, O*u*, O*v* doivent être respectivement parallèles aux côtés BC, CE, DE; 3º les droites $\overline{Og}$, $\overline{Ot}$, $\overline{Ou}$, $\overline{Ov}$, $\overline{Ox}$, qui représentent les tensions des côtés AB, BC, DE, EF, doivent avoir les sens voulus pour produire une tension dans chacun d'eux, quand on les suppose respectivement transportées en A, B, C, D, E.

On remarque enfin que les réactions G et H des points fixes sont représentées en grandeur, direction et sens par $\overline{Og}$, pour le point A, et par $\overline{xO}$ pour le point B.

(*b*) *Cas où toutes les forces sont parallèles à un plan.* — Supposons toutes les forces intermédiaires P, Q, R, S (*fig.* 198) et l'une des forces extrêmes, G par exemple, parallèles à un même plan (Π). Il est facile de constater qu'alors le poly-

gone $Ogtuvx$O (*fig.* 199) résultant de la construction de Varignon est tout entier dans un même plan parallèle à (Π), et qu'il en est de même du polygone funiculaire ABCDEF, dans l'hypothèse de l'équilibre, puisqu'il doit avoir ses côtés parallèles aux droites Og, Ot, Ou, ...

(*c*) *Les forces intermédiaires* P, Q, R, S *sont parallèles à une même droite.* — Les côtés gt, tu, uv, ... du polygone des forces (*fig.* 199) se trouvent alors tous en ligne droite; quelque position qu'on donne au point O, ce polygone sera compris dans un plan parallèle à la direction commune des forces. Par suite, il en est de même, si l'équilibre existe, pour le polygone funiculaire correspondant.

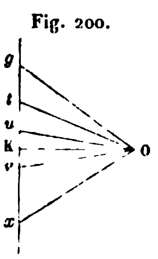


Fig. 200.

La *fig.* 200 représente ce que devient la *fig.* 199 dans le cas particulier dont nous nous occupons maintenant. Les diagonales $\overline{Og}$, $\overline{Ot}$, $\overline{Ou}$, ... donnent en grandeur, direction et sens les forces qui tendent les côtés successifs AB, BC, CD, ... du polygone funiculaire. Or, en nommant α, α_1, α_2, ... les angles de ces droites avec gx, et traçant la perpendiculaire OK à cette direction, on aura

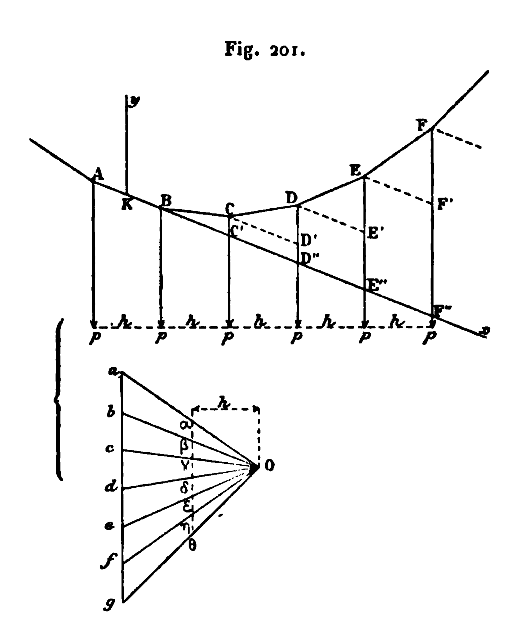
$$\overline{Og}=\frac{\overline{OK}}{\sin\alpha},\quad \overline{Ot}=\frac{\overline{OK}}{\sin\alpha_1},\quad \overline{Ou}=\frac{\overline{OK}}{\sin\alpha_2},\quad \ldots;$$

d'où l'on déduit que les tensions des divers côtés du polygone funiculaire sont inversement proportionnelles aux sinus des angles que ces côtés font avec la direction commune des forces extérieures appliquées aux sommets intermédiaires. On remarquera aussi qu'elles ont toutes une même projection $\overline{OK}$ sur une ligne perpendiculaire à la direction commune des forces.

(*d*) *Polygone chargé de poids égaux et également espacés; application aux ponts suspendus.* — Le polygone funiculaire ABCDEF... (*fig.* 201) est formé d'une suite de côtés AB, BC, CD, ... ayant tous une même projection horizontale h; en chacun des sommets A, B, C, ... on attache un poids constant p. Pour appliquer la construction de Varignon (n° **160**), on portera donc sur une même verticale ag une suite de lon-

gueurs égales entre elles, dont chacune représente l'un des poids p; puis on mènera par les deux points extrêmes a et g des parallèles au côté du polygone qui précède le sommet A et à celui qui suit le sommet F; enfin l'on joindra le point de rencontre O de ces deux parallèles aux points de division intermédiaires b, c, d, e, f. On sait que, si l'équilibre existe, ce faisceau de droites issues du point O donne les directions des divers côtés du polygone ainsi que leurs tensions; de plus on peut en déduire, comme nous allons le voir, une propriété intéressante concernant la figure ABCDEF.

Fig. 201.



Cherchons en effet l'expression des coordonnées des divers points B, C, D, E, F, ... (que nous savons déjà être dans un même plan vertical), relativement à un système d'axes obliques, l'un Kx formé par le prolongement du côté AB, l'autre Ky pris suivant la verticale du milieu de ce côté. Si l'on pose $\overline{AB} = 2l$, il est clair qu'on aura d'abord pour les abscisses la suite de valeurs

$$l,\ 3l,\ 5l,\ 7l,\ \ldots,$$

ce qui permet d'écrire, d'une manière générale, pour le $n^{\text{ième}}$ sommet,

$$x = (2n - 1)l.$$

Menons ensuite par les points C, D, E, F, ... des parallèles à Kx et, d'autre part, traçons une verticale à la distance h de O, laquelle sera coupée en parties égales par les droites Oa, Ob, Oc, ... Le triangle BCC' est égal à O$\beta\gamma$, comme ayant ses côtés parallèles et même hauteur h; donc l'ordonnée du point C est la longueur $\overline{\beta\gamma}$, que nous désignerons par k. Le triangle CDD' est égal à O$\beta\delta$, par la même raison, de sorte que l'ordonnée $\overline{\mathrm{DD}''}$ du point D se compose de $\overline{\mathrm{D}''\mathrm{D}'} = k$ et de $\overline{\mathrm{D}'\mathrm{D}} = \overline{\beta\delta} = 2k$. On trouverait de la même manière l'ordonnée de E, composée de $\overline{\mathrm{E}''\mathrm{E}'} = k + 2k$ et de $\overline{\mathrm{EE}'} = 3k$; en continuant à suivre une marche toute semblable, on formerait le Tableau des ordonnées, savoir :

Pour le point	B...	Ordonnée	o,
»	C...	»	k,
»	D...	»	$k(1+2)$,
»	E...	»	$k(1+2+3)$,
»	F...	»	$k(1+2+3+4)$,
....	....	....	....

et généralement, pour le $n^{\text{ième}}$ sommet,

$$y = k(1+2+3+\ldots+n-1) = \frac{n(n-1)k}{2}.$$

L'élimination de n entre les expressions de x et de y conduit à la relation

$$y = \frac{k}{8}\left(\frac{x^2}{l^2} - 1\right);$$

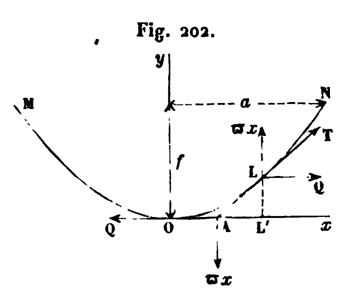
c'est l'équation d'une parabole à axe vertical, sur laquelle doivent se trouver tous les sommets du polygone.

Supposons maintenant, pour plus de simplicité, le cas particulier où le polygone aurait un côté horizontal; supposons en outre ses côtés en nombre infini, en même temps que nous ferons décroître indéfiniment la distance h et le poids p. Dans ce cas, le polygone se change en une courbe, et il devient

très facile d'en avoir directement l'équation, ainsi que la valeur de la tension en un point quelconque.

Soient MN (*fig.* 202) la courbe funiculaire, toujours contenue dans un plan vertical, comme les polygones dont elle est la limite; O son point le plus bas; Ox, Oy deux axes coordonnés dont l'un est la tangente horizontale à la courbe en O, l'autre la verticale de ce point. Nommons Q et T les tensions en O et en un autre point L quelconque, répondant aux coordonnées x, y. Une partie quelconque de la courbe,

Fig. 202.



comprise entre les abscisses x et x' supporte des poids p en nombre égal à $\frac{x-x'}{h}$, soit un poids total $\frac{p}{h}(x-x')$ ou $\varpi(x-x')$, en nommant ϖ le quotient constant $\frac{p}{h}$, qui exprime le poids supporté par chaque unité de longueur comptée horizontalement. Si l'on fait $x'=0$, on aura ϖx pour charge totale de la portion OL, et, comme les poids élémentaires sont uniformément répartis suivant l'axe des x, la résultante ϖx passe au milieu de l'abscisse $\overline{OL'}$, ou à la distance $\frac{x}{2}$ de O.

Considérons maintenant l'équilibre de cette portion OL sous l'action des trois forces Q, T et ϖx. Pour qu'il se réalise, il faut nécessairement que T soit égale et contraire à la résultante de Q et de ϖx; par conséquent, ces composantes étant rectangulaires, on a d'abord

$$(1)\qquad T=\sqrt{Q^2+\varpi^2x^2};$$

puis on a l'équation des moments par rapport à L

$$(2)\qquad Qy=\varpi x\times\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\varpi x^2.$$

L'équation (1) exprime la loi suivant laquelle varie la tension aux divers points de la courbe; cette tension a une composante horizontale constante Q et une composante verticale

égale au poids compris entre le sommet et le point L considéré. L'équation (2) est celle de la courbe et montre que c'est une parabole à axe vertical dont le sommet se trouve en O.

Si l'on donnait, outre le sommet, un second point N de la courbe, répondant aux coordonnées $x = a$, $y = f$, on aurait, en substituant ces valeurs dans l'équation (2),

$$Q = \frac{\varpi a^2}{2f},$$

valeur qui, portée dans les équations (1) et (2), donnera

$$(3) \qquad T = \frac{\varpi a^2}{2f}\sqrt{1 + \left(\frac{2fx}{a}\right)^2},$$

$$(4) \qquad y = \frac{fx^2}{a^2}.$$

On connaîtra ainsi les valeurs de la tension et l'équation de la courbe en fonction de quantités immédiatement données.

Ces calculs sont approximativement applicables aux chaînes ou câbles des ponts suspendus. On ne peut évidemment pas considérer ces chaînes comme douées d'une flexibilité parfaite, mais elles sont néanmoins très flexibles ; nous en dirons autant des câbles formés par la réunion d'un certain nombre de fils de fer, dont la section transversale est petite et la longueur comparativement grande. A ces chaînes ou câbles sont attachées des tiges verticales et équidistantes en assez grand nombre, de sorte que la portion comprise entre deux tiges peut être assimilée à un élément de courbe; ces tiges sont également chargées et, par conséquent, transmettent aux chaînes ou câbles une action verticale uniformément répartie suivant l'horizontale. A cette action s'ajoute le poids propre des chaînes ou câbles, dont la loi de répartition est, à la rigueur, uniforme suivant la courbe; mais nous admettrons que ce poids est petit en comparaison du précédent et qu'on peut, sans grande erreur, le regarder aussi comme réparti uniformément suivant l'horizontale. On se trouve alors dans les conditions voulues pour faire usage des équations (3) et (4).

Supposons que les points extrêmes de la parabole soient à

une distance $2a$, sur une même horizontale, et que f soit la distance du sommet à cette horizontale, c'est-à-dire la flèche de la courbe. Dans les circonstances ordinaires, $2a$ est donnée et le constructeur dispose de f entre certaines limites. La parabole est alors déterminée, car son sommet se trouve sur la verticale menée à égale distance des points extrêmes, et il est aussi sur une horizontale connue; on peut donc tracer les axes Ox, Oy de la *fig.* 202, et comme f et a sont les coordonnées d'un des points extrêmes, on aura l'équation (4) qui définira complètement la courbe. Quant à la tension, l'équation (3) montre qu'elle est croissante du sommet à un point extrême, entre la valeur minimum $\frac{\varpi a^2}{2f}$ et la limite supérieure

$$T_1 = \frac{\varpi a^2}{2f}\sqrt{1 + \frac{4f^2}{a^2}}$$

répondant à $x = a$. Les chaînes ou câbles doivent avoir une section transversale suffisante pour résister convenablement à cette tension T_1.

§ V. — Équilibre des systèmes polygonaux articulés sans frottement.

162. *Définitions; propriétés caractéristiques des articulations sans frottement.* — On appelle *articulation* la liaison réciproque de deux corps solides en vertu de laquelle ils ne peuvent prendre, relativement l'un à l'autre, que des mouvements de rotation autour d'axes passant par un point appartenant géométriquement aux deux corps et fixe dans chacun d'eux. Ce point se nomme le *centre d'articulation*.

L'articulation est dite *cylindrique* lorsque l'axe de la rotation relative est une ligne déterminée dans chaque corps; elle est dite *sphérique* dans le cas contraire. L'assemblage à charnière donne la réalisation pratique de la première espèce d'articulation; il consiste essentiellement, comme on le sait, en deux cylindres circulaires de même rayon, l'un creux et attaché au premier corps, l'autre plein et attaché au second corps. Pareillement l'articulation sphérique se réalise dans

l'appareil qu'on nomme *assemblage à genou*, consistant essentiellement en deux sphères concentriques et de même rayon, l'une creuse et l'autre pleine, respectivement attachées aux deux corps.

L'articulation sans frottement, qu'elle soit sphérique ou cylindrique, jouit de la propriété essentielle qui définit les liaisons considérées au n° **130**. Elle est en effet toujours réalisée par le glissement de deux surfaces solides l'une sur l'autre, et nous admettons que la réaction mutuelle de ces surfaces est constamment dirigée suivant la normale commune. On rentre donc immédiatement dans l'un des cas où l'on a vérifié que la somme des travaux des forces dues aux liaisons est nulle pour tous les déplacements que ces liaisons permettent. Par conséquent, le théorème général du n° **131** est applicable aux systèmes articulés sans frottement et permet d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes de leur équilibre.

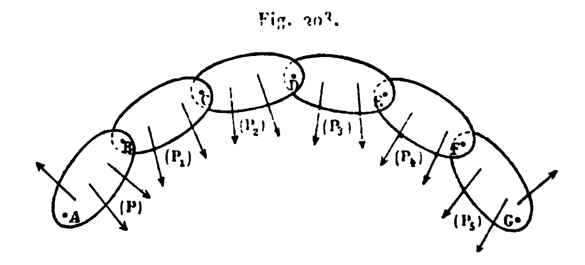
Dans ce qui va suivre, nous supposerons toujours toutes les articulations sphériques, alors même que le système en présenterait quelques-unes de l'autre espèce. Les conditions d'équilibre trouvées de cette manière pourront parfois ne pas être toutes nécessaires, mais elles seront certainement suffisantes. En effet, quand on substitue à une articulation sphérique une articulation cylindrique (l'axe de cette dernière passant, bien entendu, par le centre de la première), une certaine partie des mouvements qui primitivement étaient compatibles avec les liaisons perd cette qualité, pendant que l'autre partie la conserve; la substitution ne peut donc avoir d'autre résultat que de supprimer la nécessité d'un certain nombre de conditions, parmi celles qu'on aurait trouvées en ne la faisant pas. Ce nombre peut d'ailleurs tomber quelquefois à zéro, et c'est ce qui arriverait si la somme des travaux virtuels produits par les forces directement appliquées était identiquement nulle, dans tous les mouvements virtuels rendus incompatibles avec les liaisons par le changement dont il s'agit ici.

Dans une articulation sphérique sans frottement, toutes les forces exercées sur l'un des deux solides par l'effet de la liaison étant normales à la surface d'une sphère, ces forces concourantes peuvent se remplacer par une résultante unique

passant au point de concours, qui est le centre de la sphère, c'est-à-dire le centre d'articulation.

163. *Équilibre d'un système polygonal articulé.* — Nous allons prendre un système ABCDEFG (*fig.* 203) formé d'une série de corps solides, dont les corps intermédiaires présentent chacun deux articulations, l'une avec le corps précédent, l'autre avec le suivant; B, C, D, E, F sont les centres

Fig. 203.



d'articulation. Indépendamment de leurs actions mutuelles, les solides supportent diverses forces extérieures directement appliquées. Il s'agit d'établir les conditions d'équilibre et de trouver les actions mutuelles qui s'exercent dans les articulations.

Désignons collectivement par (P), (P_1), (P_2), ..., les systèmes de forces appliqués directement aux corps AB, BC, CD, ..., ces systèmes n'étant pas censés comprendre les actions que chaque corps intermédiaire reçoit de ses deux voisins, mais devant comprendre, au contraire, les réactions des articulations extrêmes A et G, si elles existent. Soient N_1 la résultante de translation de (P) (n° 145), N_2 la résultante de translation de (P) et de (P_1), N_3 celle de (P), (P_1) et (P_2), et ainsi de suite. Les groupes (P), (P_1), (P_2), ... sont regardés provisoirement comme des données immédiates, d'où l'on déduira sans peine N_1, N_2, N_3, ...

Cela posé, considérons un certain nombre de corps consécutifs à partir d'une extrémité, trois par exemple à partir de la gauche. Ce système ABCD est en équilibre, et les forces extérieures agissant sur lui doivent satisfaire aux six conditions générales de l'équilibre (n° 129); en particulier la somme

des moments de ces forces doit être nulle relativement à trois axes rectangulaires D_x, D_y, D_z passant par le point D. Or les forces extérieures dont nous parlons comprennent les systèmes (P), (P_1), (P_2) et la réaction exercée par le quatrième solide sur le troisième. Comme cette réaction passe au centre d'articulation D (n° 162), son moment est nul par rapport à tout axe issu du même point; donc la somme des moments de (P), (P_1), (P_2) doit être aussi nulle relativement aux axes D_x, D_y, D_z. De là résulte l'énoncé suivant :

Lorsqu'un système polygonal articulé se trouve en équilibre, si l'on considère l'ensemble d'un certain nombre de corps consécutifs qui en font partie, depuis une extrémité jusqu'à un centre d'articulation quelconque, la somme des moments des forces extérieures appliquées à cet ensemble doit être nulle, relativement à trois axes rectangulaires menés par le centre dont on vient de parler.

Il faut de plus que le système pris en entier satisfasse aux six conditions générales de l'équilibre que doivent toujours remplir les forces extérieures appliquées à un système matériel en équilibre (n° 129).

Réciproquement, si toutes ces conditions sont remplies, les forces se feront équilibre, c'est-à-dire que les solides AB, BC, ..., FG, supposés primitivement en repos, ne se mettront pas en mouvement. C'est ce que nous allons démontrer en appliquant le théorème du travail virtuel pour les systèmes à liaisons (n° 131). Il faut établir que la somme des travaux des forces directement appliquées (P), (P_1), ..., (P_5) est nulle, dans tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

On obtiendra un déplacement de cette nature, et le plus général possible, en procédant comme il suit : donner à l'ensemble complet, après l'avoir solidifié, un mouvement (M) arbitraire; imprimer simultanément au système ABCDEF également solidifié une rotation (α) autour d'un axe passant par F, cette rotation étant un mouvement relatif par rapport au solide FG supposé fixe; donner de même une rotation relative simultanée (α') au système ABCDE solidifié, par rapport au corps EF, puis une rotation relative (α'') à ABCD par rapport à DE, une rotation α''' à ABC relativement à CD, et enfin une

rotation (α^{iv}) au premier corps AB relativement au second BC. Il est bien évident que de cette manière chaque corps a le mouvement le plus général qu'il puisse prendre en satisfaisant toujours aux liaisons, car l'ensemble a été déplacé arbitrairement et l'on a fait jouer, arbitrairement aussi, toutes les articulations. Maintenant, pour avoir la somme des travaux virtuels de toutes les forces dans le déplacement résultant, on peut faire la somme des travaux qui se produiraient si chaque mouvement composant existait seul. Or il est facile de constater que, dans chaque mouvement composant, la somme des travaux des forces est nulle. 1° Les six équations générales de l'équilibre des forces extérieures agissant sur le système entier expriment cette nullité pour le mouvement (M), comme on l'a vu au n° 129. 2° Dans la rotation (α) le corps FG reste immobile et l'ensemble ABCDEF tourne comme un solide unique; le groupe (P_5) ne fait aucun travail, et les autres groupes (P), (P_1), ..., (P^{iv}) ayant une somme de moments nulle par rapport à trois axes rectangulaires menés par le centre F, leur travail total est nul dans la rotation (α) (n° 134). Le même raisonnement s'appliquerait à chacune des rotations (α'), (α''), (α'''), (α^{iv}). Donc les conditions d'équilibre ci-dessus données sont bien suffisantes, puisqu'il en résulte que la somme totale des travaux virtuels des forces directement appliquées est nulle dans le déplacement le plus général compatible avec les liaisons.

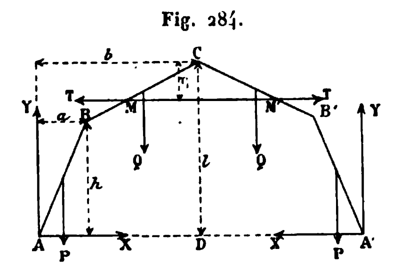
Il reste encore à trouver les actions mutuelles des corps du système les uns sur les autres. Si l'on veut, par exemple, avoir la réaction exercée en D par le quatrième corps sur le troisième, on observera qu'elle fait équilibre aux groupes (P), (P_1), (P_2), sur le système ABCD; une des conditions de cet équilibre est que la résultante de translation soit nulle (n° 146); donc la réaction dont il s'agit est égale et contraire à la résultante de translation N_3 des groupes (P), (P_1), (P_2). Les autres se trouveraient de même, et l'on obtiendrait N_1, N_2, ... changées de sens, pour les forces exercées en B, C, ..., par le corps de droite sur celui de gauche; ou bien encore, ces forces N_1, N_2, ..., prises dans le sens qu'elles ont, seraient les actions exercées aux mêmes points par le corps de gauche sur celui de droite.

Dans tous les raisonnements qui précèdent, on peut prendre pour extrémités du système tels centres d'articulation qu'on veut, pourvu qu'on tienne compte des forces exercées en ces points sur la partie conservée, par celles qu'on laisse de côté. De même, s'il y a des appuis fixes assimilables à des articulations, les réactions de ces appuis devraient être comptées dans les groupes de forces tels que (P). Ces réactions seraient des inconnues auxiliaires qu'on déterminerait en se servant des conditions d'équilibre.

Le nombre de ces conditions est facile à établir. Nous avons d'abord les six conditions générales que doit vérifier l'ensemble de toutes les forces extérieures du système pris en entier, puis trois équations de moments pour chaque centre d'articulation B, C, ..., F. En désignant par n le nombre des solides articulés entre eux, cela fait $6+3(n-1)$ ou $3n+3$ conditions. Dans le cas, assez ordinaire, où le système aurait deux centres d'articulation fixes, vers ses extrémités A et G, les trois composantes des réactions de ces points, suivant trois axes coordonnés, deviendraient des inconnues auxiliaires, et après leur élimination il ne resterait que $3n-3$ conditions d'équilibre.

164. *Exemple particulier.* — Soit un système de quatre corps ABCB'A' (*fig.* 204) présentant cinq centres d'articulation A, B, C, B', A' dans un même plan, pris pour celui de la figure; les deux extrémités A, A' sont fixes. On suppose qu'il y a symétrie relativement à CD, non seulement pour la forme du polygone ABCB'A', mais encore pour les forces directement appliquées aux corps du système; ces forces se réduisent pour

Fig. 284.



chaque corps à une résultante parallèle à CD, ayant une intensité P pour les corps AB, A′B′, et une intensité Q pour les deux autres BC, B′C; nous admettrons que ces résultantes passent aux milieux des quatre côtés $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CB'}$, $\overline{B'A'}$. On demande d'indiquer les conditions d'équilibre et de déterminer les forces que chaque corps subit en vertu de ses liaisons avec les corps voisins ou les appuis fixes.

On reconnaît d'abord que toutes ces forces provenant des liaisons sont, comme les forces directement appliquées P, Q, situées dans le plan de la figure. Considérons, en effet, la partie du système comprise entre l'une quelconque des articulations, B par exemple, et l'extrémité A′. Cette partie est en équilibre sous l'action des forces Q, Q, P directement appliquées à BC, CB′, B′A′, des réactions qui s'exercent à ses extrémités B et A′, et de ses forces intérieures. Appliquons l'une des conditions générales de l'équilibre (n° 129), en égalant à zéro la somme des moments des forces extérieures, relativement à un axe arbitraire mené par A′ dans le plan de la figure. Les forces Q, Q, P et la réaction du point fixe A′ ont un moment nul, parce qu'elles sont dans un même plan avec l'axe; donc le moment de la réaction exercée en B par AB sur BC doit être aussi nul, ce qui ne pourrait avoir lieu pour tous les axes menés par A′, si la force n'était pas dans le plan de la figure. Le même raisonnement s'appliquerait évidemment à toutes les articulations autres que B.

D'après cela, on peut décomposer la réaction exercée en A sur le système, par suite de la fixité de ce point, en deux forces, l'une X dirigée suivant AA′, l'autre Y dans une direction parallèle à P et de sens contraire. Si l'on opère une décomposition analogue en A′, on trouvera nécessairement deux composantes symétriques, car les équations qui détermineraient celle du point A s'appliqueraient tout aussi bien pour celles de A′. Pour avoir les valeurs de X et de Y, on prendra : 1° l'équation de projection de toutes les forces extérieures sur la direction CD, ce qui donne

$$(1) \qquad Y = P + Q;$$

2° l'équation des moments, relativement à B, des forces agis-

sant sur AB, laquelle est, en désignant par a et h les projections de $\overline{AB}$ sur AA′ et sur DC,

$$Xh - Ya + \frac{Pa}{2} = 0.$$

La première de ces équations fait connaître Y, et l'on déduit ensuite de la seconde

$$(2) \qquad X = \frac{a}{2h}(P + 2Q).$$

En considérant désormais comme connues les réactions que le système des quatre corps reçoit en A et A′, la théorie générale du n° 163 nous apprendrait qu'il y a 3.4 + 3 ou 15 conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre; mais ici ce nombre se réduit considérablement, eu égard à la nature particulière des données et à l'emploi déjà fait d'une partie de ces conditions. D'abord les six conditions générales de l'équilibre du système dans son entier sont satisfaites; car les deux forces X se détruisent algébriquement dans ces équations, et les deux forces Y donnent une résultante égale et contraire à celle des quatre forces P, Q, Q, P. En second lieu, on peut imaginer par chacun des points B, C, B′ trois axes rectangulaires, dont un perpendiculaire au plan de la figure et les deux autres dans ce plan; les moments des forces seront toujours nuls par rapport à ces derniers, de sorte que, sur les neuf équations de moments fournies par la théorie générale, il y en aura six qui se réduiront à des identités. Enfin, nous avons déjà fait usage de l'équation des moments par rapport à l'axe B; et comme la somme des moments relativement à l'axe B′ aurait même valeur, par raison de symétrie, cette somme est également nulle. En résumé, quatorze conditions sur quinze sont déjà remplies; il n'en reste plus qu'une à satisfaire, et on l'obtiendra en égalant à zéro la somme des moments, relativement à C, des forces appliquées entre A et C, d'où résulte, en nommant b et l les projections de ABC sur AA′ et DC,

$$(3) \qquad Xl - Yb + P\left(b - \frac{a}{2}\right) + Q\left(\frac{b-a}{2}\right) = 0.$$

La substitution des valeurs (1) et (2) de Y et de X transforme cette équation en la suivante :

$$(4) \qquad P\left(\frac{l}{h} - 1\right) + Q\left(\frac{2l}{h} - \frac{b}{a} - 1\right) = 0;$$

c'est la seule condition à remplir par les forces données et les dimensions du système pour que l'équilibre ait lieu si le système est supposé en repos initial.

Nous avons encore à déterminer les actions mutuelles en B, C, B'. Conformément à ce qu'on a vu au n° **163**, la réaction exercée en B par le corps AB sur BC est égale à la résultante des forces $Y = P + Q$, $X = \frac{a}{2h}(P + 2Q)$ et P; elle aura donc une composante égale à Q dans le sens et la direction de Y, et une composante égale à X. Au point B' s'exercerait une force symétrique de la part de A'B' sur B'C. Quant à la réaction en C, on voit de même, par l'équilibre de la partie ABC, que cette partie reçoit de CB'A' une réaction égale et directement opposée à X. La question est donc entièrement résolue dans les termes où elle a été posée.

On pourrait rendre le système articulé indéformable et son équilibre obligatoire, indépendamment de toute relation entre P et Q, en réunissant deux points symétriques M, M', pris sur BC et CB' par un tirant MM' articulé en ces deux points. Si nous supposons, pour plus de simplicité, que ce tirant ne soit soumis à aucune force directement appliquée, son équilibre exigera qu'il reçoive, par l'effet des articulations M, M', deux forces T égales et contraires qui constitueront sa tension. Réciproquement, le tirant exercera sur BC et CB' des réactions égales à T, qui seront en sens contraire des forces T subies par lui. La réaction T, appliquée en M, devra être introduite dans l'équation (3) des moments; si nous désignons par η la distance de C à MM', cette équation deviendra

$$Xl - Yb + P\left(b - \frac{a}{2}\right) + Q\left(\frac{b-a}{2}\right) + T\eta = 0.$$

Après la substitution des valeurs de X et Y, on obtiendrait, non pas une condition d'équilibre, puisque l'équilibre est forcé, mais une équation déterminant l'inconnue auxiliaire T; cette

équation résolue par rapport à T donnerait

$$(5)\qquad T = \frac{a}{2\gamma_1}\left[Q\left(1+\frac{b}{a}-\frac{2l}{h}\right)-P\left(\frac{l}{h}-1\right)\right].$$

Dans le cas où le tirant serait assimilable à un fil et incapable de supporter une pression, au lieu d'une tension proprement dite, il faudrait encore que la force T eût réellement le sens que nous lui avons attribué; on vérifierait que cette condition est remplie en constatant que le second membre de l'équation (5) est positif. S'il ne l'était pas, le tirant ne rendrait plus la distance $\overline{MM'}$ invariable, et l'équilibre ne pourrait avoir lieu.

Il est à remarquer que tous les calculs du n° **164** subsisteraient sans aucune modification si les articulations en A, B, C, B′, A′ étaient simplement cylindriques, avec des axes perpendiculaires au plan de la figure.

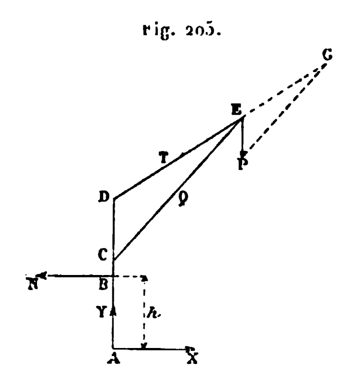
Les deux problèmes qui suivent ne sont pas, à proprement parler, des applications de la théorie du n° **163**. Leurs solutions reposent sur des considérations particulières; toutefois les systèmes dont on étudie l'équilibre sont toujours formés de corps solides réunis par des articulations sans frottement.

165. *Pressions et tensions dans la charpente d'une grue.* — La grue est un appareil employé pour l'élévation ou la descente des fardeaux; nous la supposons en équilibre dans une certaine position, et nous allons rechercher les actions mutuelles qui se développent entre les pièces dont elle se compose.

L'appareil consiste essentiellement en un arbre vertical AD (*fig.* 205), articulé en C et D avec deux pièces inclinées DE, CE, appuyé en B sur un collier et terminé en A par un pivot entrant dans une crapaudine. La pièce DE se nomme le *tirant*, et CE la *contrefiche*. Le poids P est suspendu en E, centre d'articulation commun à DE et CE; on admet que ce poids a une intensité assez grande pour qu'on puisse négliger, comme comparativement très petits, les poids propres des trois pièces AD, DE, CE. Il s'agit de déterminer les réactions supportées par l'arbre en A, B, C, D, ce qui fera connaître en même temps les pressions ou tensions des pièces CE et DE.

Chacune de ces deux pièces n'est soumise, par hypothèse, à l'action de forces qu'en ses points extrêmes; leur équilibre exige que les deux forces agissant aux points extrêmes soient égales et opposées, et, par conséquent, les deux pièces sont simplement tendues ou comprimées suivant leur longueur. Si l'on nomme Q la compression de CE et T la tension de DE, le point E doit rester en équilibre sous l'action de trois forces, savoir : 1° le poids P; 2° la force Q dirigée dans le prolongement de CE; 3° la force T dirigée de E vers D. Il faut donc que P soit égal et contraire à la résultante des deux autres forces; par suite, si l'on mène en P une parallèle à CE jusqu'à la rencontre G avec le prolongement de DE, on aura

Fig. 203.



$$Q = \overline{PG}, \quad T = \overline{GE},$$

car la résultante de ces deux forces est bien $\overline{PE}$, c'est-à-dire P pris en sens contraire. D'ailleurs, ces deux lignes représentatives des forces Q et T subies par le point E ont bien le sens qu'on leur avait attribué *a priori*, ce qui montre qu'il y a effectivement compression dans la contrefiche et tension dans le tirant.

La similitude des triangles DCE, EPG prouve que les trois forces P, Q, T sont dans le même rapport que les côtés de DCE; on a donc

$$Q = P\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}}, \quad T = P\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}},$$

ce qui permet de connaître Q et T sans avoir à construire la ligne PG.

Il faut maintenant trouver la réaction horizontale N fournie par le collier et la réaction de la crapaudine. Cette dernière se décomposera en une force horizontale X et une force verticale Y. On reconnaît d'abord facilement que N et X doivent

se trouver dans le plan de la figure, car sans cela on ne pourrait satisfaire à l'équation des moments de toutes les forces extérieures du système, relativement à un axe quelconque mené dans ce plan par l'un des points A ou B. Il suit de là que toutes ces forces extérieures se trouvent dans un même plan; les trois équations d'équilibre auxquelles elles doivent satisfaire (nº 133, 3º) suffiront pour déterminer les trois inconnues N, X, Y. En prenant les projections sur l'horizontale et la verticale, on a

$$N = X, \quad Y = P;$$

on voit alors que les forces se réduisent à deux couples (N, X), (P, Y), et si l'on nomme h et p leurs bras de levier respectifs, l'équation des moments sera, relativement à un point quelconque du plan,

$$Nh = Pp.$$

Les valeurs des inconnues sont donc définitivement

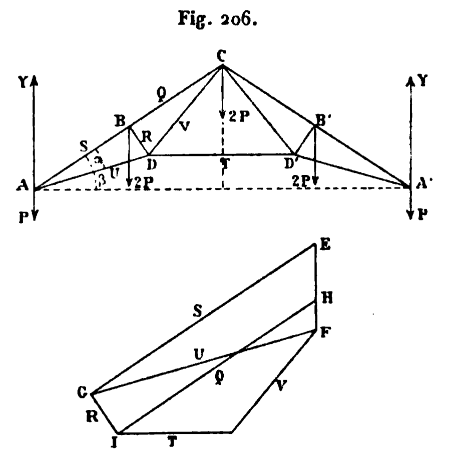
$$Y = P, \quad X = N = \frac{Pp}{h}.$$

L'expression des réactions horizontales montre l'utilité de ne pas trop diminuer la distance $h = \overline{AB}$, afin de ne pas soumettre le collier, ainsi que le pivot et la crapaudine, à des efforts trop considérables, qui pourraient amener la rupture et produiraient tout au moins des frottements nuisibles.

166. *Pressions et tensions dans une ferme avec arbalétriers soutenus par des tirants et contrefiches.* — La *fig.* 206 représente une disposition de ferme qui offre assez de ressemblance avec les fermes usitées dans les gares de chemins de fer et connues sous le nom de leur inventeur, M. Polonceau. Toutes les pièces sont comprises dans un plan vertical et symétriquement placées de part et d'autre de la verticale passant par le sommet C. Aux points A, B, C, B', A', que nous considérons comme des centres d'articulation, sont suspendus des poids P, 2P, 2P, 2P, P, devant lesquels on néglige les poids propres des pièces. Les deux arbalétriers AC et A'C sont soutenus en leurs milieux par des contrefiches BD, B'D', reliées elles-mêmes par des tirants AD, DC, A'D', D'C, DD'. Tous les assem-

blages sont censés réalisés au moyen d'articulations sans frottement. Dès lors, chaque pièce n'est soumise à des forces qu'en ses deux points extrêmes, et il est nécessaire, pour son équilibre, que les deux résultantes appliquées à ces points soient égales et contraires; donc toutes les pièces sont tendues ou comprimées par des forces qui agissent suivant leur longueur, et l'on demande de déterminer toutes ces pressions et tensions.

Fig. 206.



La ferme repose en A et A′ sur deux plans horizontaux fixes; nous supposons l'un des deux appuis, A′ par exemple, établi de manière à ne pouvoir donner qu'une réaction verticale. Cela étant, l'autre appui A ne pourra également produire qu'une réaction verticale; car, si sa réaction avait une composante horizontale, comme ce serait la seule force extérieure non verticale, la résultante de translation ne s'annulerait pas et l'équilibre ne pourrait avoir lieu. Quant aux deux composantes verticales qui forment toute la réaction de chacun des points A et A′, elles sont égales par raison de symétrie; de plus, l'équilibre des forces extérieures exige que leur somme égale le poids total 8P; donc

$$Y = 4P,$$

c'est-à-dire que chaque appui donne une réaction verticale ascendante, ayant pour valeur 4P. En réduisant cette force

avec le poids P, il ne subsisterait plus que la force verticale ascendante 3P, en A et en A′.

Désignons maintenant par

Q, R, S les compressions subies par les pièces BC, BD, BA;
T, U, V les tensions des tirants DD′, DA, DC;
β l'inclinaison des arbalétriers AC, CA′ sur le plan horizontal;
α l'angle des tirants AD et DC avec l'arbalétrier AC.

Les forces Q, R, S, T, U, V sont des inconnues à déterminer. En les qualifiant, les unes de compressions, les autres de tensions, nous leur avons attribué *a priori* un certain sens arbitraire; ainsi, par exemple, dire que CD éprouve une tension V, c'est affirmer que les forces, encore inconnues, qui agissent aux deux extrémités de CD et suivant la ligne CD tendent à écarter l'un de l'autre leurs points d'application. Il n'y a aucun inconvénient à faire cette supposition arbitraire; si dans la réalité CD devait subir une compression, la force V figurerait dans tous nos calculs avec un signe contraire à celui qu'elle devrait avoir, et l'on serait averti de l'erreur en trouvant pour cette force une valeur négative. Voici maintenant comment on peut obtenir les valeurs de ces inconnues.

Le point A reste en équilibre sous l'action de la force $Y - P = 3P$, de la force U dirigée suivant AD et de la force S agissant suivant le prolongement de BA. Chacune des trois forces devant être proportionnelle aux sinus de l'angle formé par les deux autres (nº 11), cette propriété s'exprime ici par les deux équations

$$\frac{3P}{\sin\alpha} = \frac{S}{\cos(\beta - \alpha)} = \frac{U}{\cos\beta},$$

d'où résultent les inconnues

$$S = \frac{3P\cos(\beta - \alpha)}{\sin\alpha}, \quad U = \frac{3P\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

Si l'on considère maintenant l'équilibre du point B, on voit qu'il a lieu sous l'action de la force donnée 2P, de la force S qu'on vient de calculer et qui agit sur B dans le sens BC, et des forces inconnues Q et R, la première agissant dans le sens BA, la seconde suivant DB prolongé. Les projections de

ces forces sur les directions CA et DB donnent les équations

$$Q = S - 2P\sin\beta = P\left[\frac{3\cos(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} - 2\sin\beta\right],$$
$$R = 2P\cos\beta.$$

Enfin nous connaissons déjà deux des quatre forces U, R, T, V qui sollicitent le point D, respectivement dans les sens de DA, BD prolongé, DD′, DC; les deux équations de projections nécessaires pour l'équilibre de ce point permettront de trouver T et V. En projetant encore sur CA et DB, on aura

$$(U - V)\cos\alpha - T\cos\beta = 0,$$
$$(U + V)\sin\alpha - T\sin\beta - R = 0$$

ou bien, eu égard aux valeurs trouvées pour R et U,

$$T\cos\beta + V\cos\alpha = \frac{3P\cos\beta\cos\alpha}{\sin\alpha},$$
$$T\sin\beta - V\sin\alpha = P\cos\beta.$$

On tire facilement de là

$$T = \frac{4P\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad V = \frac{P\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\left(\frac{3\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha} - \cos\beta\right),$$

ce qui complète la détermination des forces inconnues; car les mêmes pressions et tensions se reproduisent symétriquement dans la seconde moitié de la ferme.

Ces calculs peuvent se remplacer par une construction géométrique bien simple. Prenons sur une verticale quelconque la ligne $\overline{FE}$ représentant, en grandeur, direction et sens, la force Y — P ou 3P appliquée en A; puis menons par E une parallèle à CA et par F une parallèle à DA. La force $\overline{EF}$, égale à Y — P changée de sens, est la résultante de deux forces représentées par $\overline{EG}$ et $\overline{GF}$, et, comme c'est là justement la condition qui détermine S et U, on a

$$\overline{EG} = S, \quad \overline{GF} = U.$$

On voit que le sens ainsi trouvé pour S et U s'accorde bien avec l'hypothèse d'une compression dans AB et d'une tension dans AD. Si l'on passe ensuite au point B, la compression

de AB produit sur lui une force représentée par GE, qui, combinée avec $2P = \overline{EH}$, donnerait la résultante $\overline{GH}$; cette force prise en sens contraire, c'est-à-dire la force $\overline{HG}$, est la résultante des forces R et Q, agissant suivant DB et BA. On aura donc ces forces en menant par H une parallèle à CA et par G une parallèle à DB, car $\overline{HG}$ est la résultante de $\overline{HI}$ et de $\overline{IG}$; donc

$$\overline{HI} = Q, \quad \overline{IG} = R,$$

et l'on constate encore que le sens de ces forces est bien celui qu'on avait admis *a priori*. Enfin la tension U agissant sur le point D se compose avec la pression R sur le même point, au moyen du triangle FGI, et donne une résultante représentée par une droite égale et parallèle à $\overline{FI}$; celle-ci changée de sens est la résultante de T et V dirigées suivant DD' et DC. Si donc on mène par I et F des droites respectivement parallèles à DD' et DC, les forces $\overline{IK}$ et $\overline{KF}$, ayant IF pour résultante, seront égales à T et V, et l'on aura

$$\overline{IK} = T, \quad \overline{KF} = V.$$

Ici encore les sens trouvés pour T et V sont conformes à ce que l'on avait supposé.

Toutes les forces inconnues se trouvent ainsi déterminées par la construction de sept lignes droites parallèles à des directions données.

CHAPITRE TROISIÈME.

ÉQUILIBRE DE DIVERS APPAREILS, EN TENANT COMPTE DU FROTTEMENT, DE LA RÉSISTANCE AU ROULEMENT ET DE LA RAIDEUR DES CORDES.

---

§ I. — Lois générales déduites de l'expérience.

167. *Résistance au glissement réciproque des solides; frottement.* — Quand deux surfaces solides doivent toujours se toucher, soit dans l'état d'équilibre, soit dans l'état de mouvement, nous avons admis jusqu'à présent que leurs actions mutuelles en chaque point de contact sont dirigées suivant la normale commune; du moins toutes les théories et applications particulières des deux chapitres précédents, ainsi que celles de la seconde Partie, ont été faites dans cette hypothèse. Cependant l'expérience montre qu'elle ne se réalise jamais bien complètement dans la nature. Si, par exemple, on considère un solide pesant en équilibre, reposant par une base plane sur un plan horizontal d'appui, la réaction totale du plan doit être une force verticale, égale et contraire au poids P du corps; elle est donc dans ce cas normale à la surface de contact, et les actions mutuelles se réduisent alors à des pressions normales. Mais on constate que l'équilibre n'est pas troublé quand on applique à ce même corps une seconde force Φ, horizontale et tendant à le faire glisser sur son plan d'appui, pourvu qu'on observe certaines précautions et que, notamment, l'intensité de Φ reste au-dessous d'une certaine limite F. Puisque l'équilibre persiste, il faut que la réaction du plan soit égale et contraire à la résultante de P et de Φ; par suite elle n'est plus dirigée suivant la normale commune, et l'on peut la décomposer en une réaction normale et une réaction tangentielle, respectivement égales et opposées à P

et Φ. L'équilibre est rompu et le glissement se produit, quand la force additionnelle Φ dépasse la limite F; mais alors on observe que l'accélération du mouvement pris par le corps est moindre que celle qui aurait lieu sous l'action de Φ; l'effet de cette force se trouve donc partiellement détruit par la résistance tangentielle du plan.

Par une induction fondée sur un grand nombre d'expériences, on a pu généraliser ces remarques et reconnaître que, si deux solides naturels sont serrés l'un contre l'autre par des pressions mutuelles d'une intensité déterminée, agissant suivant la normale commune à la surface de contact, il se développe presque toujours des actions tangentielles, lesquelles, pour chaque solide, sont en sens contraire du glissement qu'il pourrait prendre relativement à l'autre; ces actions sont d'une intensité variable, pouvant diminuer jusqu'à zéro, mais ne pouvant dépasser une certaine limite supérieure, qu'elles atteignent quand le glissement se produit ou est sur le point de naître. Dans cette hypothèse d'un glissement effectif ou imminent, les actions tangentielles se nomment *frottement de glissement,* dénomination dont on ne conserve le plus souvent que le premier mot.

Les lois du frottement ont été étudiées par Amontons, vers la fin du XVIIe siècle, et par La Hire à peu près à la même époque; Coulomb a produit un travail plus complet en 1781, et les résultats obtenus par lui ont été confirmés par les expériences du général Morin, commencées en 1831. Les lois indiquées par Coulomb se résument dans les énoncés suivants :

I. Le frottement varie proportionnellement à la pression normale, toutes choses égales d'ailleurs.

II. Il est indépendant de l'étendue des surfaces en contact.

III. Quand le glissement a commencé, le frottement ne dépend pas de la vitesse.

IV. Il dépend de la nature et de l'état de poli des surfaces en contact, ainsi que de la nature des enduits.

V. Le frottement au départ, c'est-à-dire à l'instant où le glissement va commencer, est généralement plus grand que le frottement pendant le mouvement.

Quelques remarques sont nécessaires pour bien faire com-

prendre la véritable signification des propositions qu'on vient de formuler. La première suppose que la pression ne grandisse pas au delà d'une certaine limite; sous des pressions trop considérables les enduits sont expulsés, les surfaces s'échauffent et s'altèrent, des fragments se détachent de l'un des deux corps ou des deux à la fois, et, en supposant qu'il n'y ait pas rupture immédiate, le rapport du frottement à la pression peut du moins se trouver considérablement augmenté. Par la seconde on veut dire que, si entre deux surfaces de même nature il y a toujours la même pression totale, leur frottement restera le même, quelle que soit leur étendue; ainsi, par exemple, il faudra toujours la même force F horizontale pour déterminer le glissement, sur un plan horizontal d'appui, d'un polyèdre pesant homogène, qu'on poserait successivement sur ses diverses faces. Ajoutons cependant que la surface d'appui ne doit pas devenir trop petite, car dans ce cas un des corps au moins pourrait s'altérer, ou pénétrer dans l'autre à la manière d'un outil tranchant ou pointu.

En ce qui concerne la troisième loi, il faut aussi que la vitesse ne devienne pas trop considérable, sans quoi le frottement pourrait être sensiblement moindre que dans le cas d'une vitesse modérée. Suivant M. Bochet, inspecteur général des Mines, si l'on nomme

F le frottement relatif à ce dernier cas;
F' le frottement à grande vitesse, sous la même pression;
v la vitesse de glissement exprimée en mètres par seconde;

on aura la relation

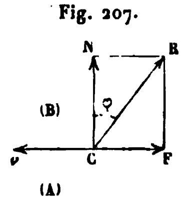
$$F' = \frac{F}{1 + 0,03\,v}.$$

La nature et le poli des surfaces ont sur la grandeur du frottement une influence que tout le monde connaît et que l'expérience de tous les jours rend à chaque instant évidente. On voit le frottement diminuer à mesure que les corps en contact deviennent plus durs et plus polis; on est par suite porté à croire qu'il disparaîtrait entièrement si ces qualités étaient poussées jusqu'à la perfection absolue. Le frottement tient sans doute à ce que les inégalités et rugosités des surfaces qui terminent les solides naturels s'enchevêtrent et en-

grènent, pour ainsi dire, les unes dans les autres, et cela d'autant plus que la pression est plus grande; en outre, le corps le plus petit s'enfonce un peu dans l'autre, en le déformant, et, pour qu'il puisse glisser, il faut qu'il rabatte comme une espèce de bourrelet placé en avant de lui. On comprend sans peine que ces causes de frottement s'atténuent de plus en plus quand les corps deviennent eux-mêmes de plus en plus durs et polis.

En résumé, si l'on suppose le contact établi entre deux corps (A) et (B), et s'il y a une pression normale N sur un élément superficiel C de la surface de séparation (*fig.* 207); si l'on admet, en outre, que les deux corps glissent effectivement ou sont sur le point de glisser l'un sur l'autre, aux environs de C, alors la réaction de l'élément C de (A) sur le même élément de (B) sera une force oblique R, composée d'une force normale N et d'une force tangentielle F, directement opposée à la vitesse relative v avec laquelle le point C de (B) glisse sur le même point de (A). En vertu de la première loi, on aura

Fig. 207.



$$(1) \qquad F = fN,$$

f désignant un rapport invariable tant que la nature des deux surfaces ne changera pas, sauf cette restriction que f devra être augmenté (cinquième loi) quand le glissement ne sera pas encore effectif, mais seulement imminent. Ce rapport f se nomme *coefficient du frottement*. On peut le considérer comme la tangente d'un certain angle φ, qu'on appelle *angle du frottement;* alors l'équation ci-dessus donne

$$(2) \qquad F = N \operatorname{tang} \varphi,$$

et comme l'on a, d'après la figure, $F = N \operatorname{tang}(R, N)$, il en résulte que l'angle du frottement n'est autre chose que celui de la réaction résultante avec la normale. Nous remarquerons encore que le triangle rectangle RCN permet d'écrire la relation

$$(3) \qquad F = R \sin\varphi = \frac{fR}{\sqrt{1+f^2}}.$$

On représente souvent par f_1 le sinus de l'angle du frottement, dont f est la tangente; dans les cas les plus ordinaires, f ne dépassant pas 0,10 ou 0,15, les deux coefficients f_1 et f sont assez peu différents l'un de l'autre.

Il est très essentiel de ne pas oublier que les relations (1), (2) et (3) supposent le glissement existant ou sur le point de naître. S'il y avait repos et s'il fallait une force tangentielle de grandeur appréciable pour déterminer le glissement de l'un des corps sur l'autre, ces relations ne subsisteraient plus: le rapport $\frac{F}{N}$ serait indéterminé et pourrait prendre telle valeur qu'on voudrait entre 0 et f. Comme on l'a déjà dit, le fait du glissement ne se produit ou ne devient imminent que si la force tangentielle atteint une certaine limite; le fait contraire prouve donc seulement qu'on est resté plus ou moins en dessous de cette limite, dont le produit fN exprime la valeur.

Lorsque le corps (B) est pressé contre le corps fixe (A) par une force oblique S, faisant un angle α avec la normale, si l'équilibre existe, il faut que la réaction R de (A) sur (B) soit égale et contraire à S. En nommant N et Φ les composantes normale et tangentielle de R, on aurait donc

$$N = S\cos\alpha, \quad \Phi = S\sin\alpha.$$

Or, puisqu'il y a équilibre, le glissement ne se produit pas, et, par conséquent, le rapport $\frac{\Phi}{N}$ ne dépasse pas f, ou, ce qui revient au même, on a

$$\tang\alpha \leqq f, \quad \alpha \leqq \varphi.$$

Dans le cas de l'égalité, l'équilibre serait instable, puisqu'il y aurait imminence du glissement; dans le cas contraire, où le second membre des inégalités est supérieur au premier, la différence ayant une valeur finie, la direction de S peut changer dans une certaine mesure sans que (B) sorte du repos, et, à ce point de vue, on peut dire que l'équilibre est stable. La condition $\alpha \leqq \varphi$ se traduit en disant que, dans le cas d'équilibre dont il s'agit, *la résultante* S *doit faire avec la*

normale un angle inférieur ou tout au plus égal à l'angle du frottement.

Le Tableau suivant, emprunté au *Traité de Mécanique* de M. Collignon (t. II, p. 156), donne les valeurs numériques de f et de φ pour les cas les plus usuels. Il est bien entendu que tous ces nombres ne sont pas absolument constants, mais varient un peu suivant les circonstances particulières où l'on se trouve; ce sont les résultats moyens fournis par les mesures expérimentales.

Tableau des valeurs de f et de φ.

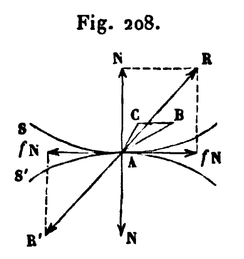
NATURE DES SURFACES FROTTANTES.	A L'ÉTAT de mouvement		AU DÉPART	
	f	φ	f	φ
Bois sur bois, à sec	0,36	19°.18′	0,50	26°,34′
— avec enduit gras.	0,07	4. 0	0,20	11,19
Bois et métaux à sec	0,42	22.47	0,60	30,58
— avec enduit gras.	0,08	4.35	0,12	6,51
Métaux sur métaux, à sec	0,19	10.46	0,19	10,46
Métaux sur métaux, avec enduit gras	0,09	5. 9	0,10	5,43
Corde mouillée sur bois.	0,33	18.16	0,87	41, 2
Corde sur fonte	0,15	8.32	//	//
Cuir sur bois ou sur métal, à sec.	0,30	16.42	0,47	25,11
Cuir sur bois ou sur métal, avec enduit gras	0,20	11.19	//	//
Fer forgé sur pierre	0,45	24.14	//	//
Pierre sur bois	0,40	21.48	//	//
Pierre sur pierre	0,76	37.14	//	//

168. *Travail des actions mutuelles de deux surfaces glissant l'une sur l'autre avec frottement.* — Lorsque deux surfaces solides S, S′ sont en contact par un point A et glissent l'une sur l'autre, on sait (n° **41**) que le mouvement élémentaire de S est composé : 1° du mouvement de S′; 2° d'une rotation autour d'un axe passant par A; 3° d'une translation parallèle au plan tangent commun. D'un autre côté, on a vu (n° **167**) que les actions mutuelles comprennent, pour chaque

surface : 1° une force normale; 2° une force tangentielle, égale à la précédente, multipliée par le coefficient f du frottement, et dirigée en sens contraire du glissement de cette surface sur l'autre.

Soient donc N et fN (*fig.* 208) les deux composantes de l'action de S′ sur S, N′ et fN′ celles de la réaction égale et contraire exercée par S sur S′. Pour avoir le travail total des actions mutuelles résultantes R, R′ dans les déplacements élémentaires pris par les deux surfaces, on peut faire la somme des travaux de R dans chacun des trois mouvements de S (n° **102**), et y ajouter le travail de R′. Or, ce dernier travail détruit évidemment celui de R dans le premier mouvement composant de S; de plus, le travail de R est nul dans le second mouvement, qui ne comporte pas un déplacement de son point d'application A. Il ne reste donc que le travail de R (ou de ses composantes N et fN) dans le troisième mouvement, lequel travail se réduit à celui de fN, car N est perpendiculaire à tout déplacement parallèle au plan tangent en A. D'ailleurs, fN est directement opposé au glissement de S sur S′, c'est-à-dire au déplacement tangentiel dont nous venons de parler; si donc on nomme ds la grandeur absolue du glissement élémentaire, la somme des travaux correspondants de R et de R′ sera $-fN\,ds$.

Fig. 208.



On voit que les composantes normales N, N′ font un travail total égal à zéro, de sorte que le travail total des réactions résultantes est égal à celui des frottements fN, fN′; ce dernier travail, exprimé par $-fN\,ds$, est toujours négatif. Mais il n'en serait pas de même si l'on considérait séparément le travail de R et celui de R′. Supposons, en effet, que, dans le mouvement élémentaire absolu des deux surfaces, le point A de S vienne en C et le point A de S′ en B. La ligne $\overline{BC}$ étant nulle ou parallèle au plan tangent en A (n° **41**), les déplacements $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ont bien même projection sur la normale, d'où il résulte que N et N′ font des travaux qui se détruisent, comme l'on a déjà eu occasion de le constater (n° **130**), sans que chacun de ces travaux soit nul; secondement, comme

$\overline{BC}$ représente le glissement de S sur S', cette ligne est parallèle à fN, ce qui montre que la somme des travaux de fN et de fN' est $-fN.\overline{BC}$, tandis que la force fN prise seule ferait le travail positif $fN.\overline{AC}\cos(AC, fN)$.

Si les surfaces avaient plusieurs points de contact, on pourrait répéter pour chacun d'eux des calculs et raisonnements tout semblables.

Le théorème du travail virtuel pour les systèmes à liaisons (n° 131) suppose que la somme des travaux des forces provenant des liaisons est nulle, dans tous les déplacements qu'elles permettent. La condition ne serait pas remplie pour une liaison qui consisterait à maintenir deux surfaces solides en contact l'une avec l'autre, si l'on tenait compte du frottement. Afin de pouvoir toujours appliquer le théorème dont il s'agit, on devrait ne considérer comme forces dues aux liaisons que les composantes normales, dont le travail total reste nul, et compter les frottements fN, fN' parmi les forces directement appliquées. Il est évident que de cette manière on ne commettrait aucune erreur, car cela revient à supprimer par la pensée le frottement, en ayant soin de le remplacer par les forces qu'il produit; seulement on aurait perdu l'avantage de faire disparaître complètement les forces de liaisons, puisque l'intensité de N figure dans le travail $-fN\,ds$. Aussi renonce-t-on le plus souvent à l'emploi du théorème du travail virtuel, pour établir dans ce cas les conditions d'équilibre; on verra plus loin divers exemples des procédés auxquels on peut avoir recours.

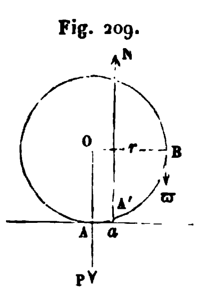
169. *Résistance au roulement.* — Pour faire connaître les lois de cette résistance et les conditions dans lesquelles elle se produit, nous allons d'abord considérer deux cas simples, qu'on pourra généraliser par induction.

Supposons en premier lieu un cylindre posé sur un plan horizontal et soumis à une pression totale P appliquée au milieu de l'axe. Si l'on fait agir une autre force verticale ϖ en dehors de l'axe, par exemple en suspendant un poids qui agit tangentiellement à la section moyenne du cylindre (*fig.* 209), on observe que l'équilibre subsiste tant que cette force n'atteint pas une valeur limite p. Lorsqu'on aura $\varpi = p$, le

cylindre sera sur le point de se déplacer en roulant sur son plan d'appui; pour une valeur plus grande de ϖ, le mouvement aura réellement lieu.

Tant que l'équilibre existe, la réaction N du plan sur le cylindre doit être égale et contraire à la résultante de P et de ϖ; c'est donc une force verticale ascendante, égale à $P + \varpi$ et partageant la distance $\overline{OB}$ des deux composantes en parties inversement proportionnelles à celles-ci (n° 140). En désignant par r le rayon $\overline{OB}$ du cylindre, β la distance $\overline{Aa}$ entre N et P, on aura

Fig. 209.



$$\frac{\beta}{r-\beta} = \frac{\varpi}{P}, \quad \text{d'où résulte} \quad \beta = \frac{\varpi r}{P+\varpi}.$$

Ainsi la réaction totale du plan passe en avant du point de contact géométrique A, du côté où le roulement tend à se produire; sa distance à A croît avec ϖ depuis o jusqu'au maximum $\frac{pr}{P+p}$, qui correspond au cas où l'équilibre est sur le point d'être rompu. Nous désignerons ce maximum par δ.

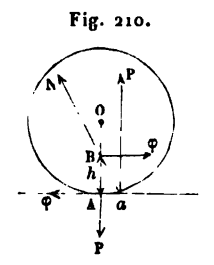
Il serait impossible que la réaction du plan fût exercée en un point différent de A, si le contact des deux corps n'avait lieu que suivant la génératrice du cylindre projetée sur ce point. Toutes les réactions élémentaires se trouveraient, dans cette hypothèse, distribuées le long de la génératrice dont il s'agit; leur moment total par rapport à cette droite étant nul, elles ne pourraient avoir une résultante qui ne la couperait pas. Mais on conçoit que les corps éprouvent une certaine déformation sous la pression qu'ils supportent, que le cylindre s'aplatisse un peu aux environs de la génératrice A et qu'en même temps il se forme comme une rigole dans le plan, de telle sorte qu'il y ait contact suivant une bande AA' d'une certaine largeur. La réaction, répartie sur cette bande, peut donner une résultante passant en a.

Il résulte des expériences de Coulomb que, pour des cylindres faits avec la même matière et placés sur le même plan horizontal : 1° le rapport $\frac{p}{P+p}$ ne change pas lorsque P varie

sans changement de rayon r; 2° que, si l'on fait varier r, le même rapport varie en raison inverse. Il suit de là que la quantité $\frac{pr}{P+p}$ reste invariable quand il s'agit de cylindres d'une nature donnée s'appuyant sur un plan de nature également donnée, la charge P pouvant, ainsi que le rayon r, prendre toutes les valeurs possibles dans les limites de la pratique. Comme, d'ailleurs, cette quantité est égale à la distance limite ci-dessus désignée par δ, on voit que δ dépendrait uniquement de la nature des corps en contact.

Maintenant, au lieu d'appliquer au cylindre la force verticale ϖ, appliquons-lui une force horizontale φ à la distance $\overline{AB} = h$ de A (*fig.* 210). L'équilibre subsiste encore pour toutes les valeurs de φ inférieures à une certaine limite q, au delà de laquelle le cylindre roulera, pourvu cependant que h remplisse une condition dont nous parlerons tout à l'heure. S'il y a équilibre, il faut que la réaction N de l'appui soit égale et contraire à la résultante de P et de φ; par conséquent, elle est représentée par une ligne passant au point B de rencontre de ces deux forces et contenue dans l'angle formé par leurs prolongements : donc elle coupe le plan d'appui en avant du point de contact géométrique A en un point tel que a. On peut l'y supposer appliquée et la remplacer par des composantes respectivement égales et opposées à P et φ; le cylindre est alors en équilibre sous l'action de deux couples (P, — P), (φ, — φ), ce qui exige qu'on ait, en désignant encore par β la distance $\overline{Aa}$,

Fig. 210.



$$P\beta = \varphi h, \quad \text{soit} \quad \beta = \frac{\varphi h}{P}.$$

La distance β croît en même temps que φ depuis zéro jusqu'à la limite $\frac{qh}{P}$, répondant à $\varphi = q$.

Coulomb a vérifié par l'expérience que la limite $\frac{qh}{P}$ est la même que la limite $\frac{pr}{P+p}$ trouvée dans le cas du premier dis-

positif. Ainsi donc, lorsque le roulement est sur le point de naître par l'effet d'une force additionnelle verticale ou horizontale, la réaction du plan d'appui passe toujours à la même distance δ en avant du contact géométrique, et cette distance ne dépend que de la nature du cylindre et de son appui.

Dans le cas de la force additionnelle horizontale, on remarquera que le plan doit fournir une réaction tangentielle égale à q si l'équilibre est sur le point d'être rompu. Or le maximum qu'il puisse donner, sans qu'un glissement se produise, est le frottement répondant à la pression P (n° 167), soit fP, en nommant f le coefficient de frottement des surfaces en contact. Pour que le cylindre ne glisse pas avant de rouler, il faut donc remplir la condition

$$q < fP;$$

et, comme on a d'un autre côté

$$\delta = \frac{qh}{P},$$

on en conclut, par une multiplication membre à membre,

$$\delta = fh,$$

ce qui donne une limite inférieure au-dessous de laquelle ne doit pas descendre h pour des corps de nature donnée.

Si nous revenons au cas auquel se rapporte la *fig.* 209, nous voyons que la réaction N appliquée en a peut se transporter en A, pourvu que, simultanément, on applique au cylindre un couple (N, —N), ayant pour moment Nβ et opposé à la rotation qui tend à se produire autour de l'axe projeté en A. Cette force N appliquée au point de contact géométrique et le couple Nβ peuvent remplacer l'appui du cylindre. Dans l'hypothèse de corps parfaitement indéformables, on aurait, comme nous l'avons dit, $\beta = 0$, et la force N subsisterait seule; en même temps, la force additionnelle ϖ s'annulerait. Le fait de la résistance au roulement consiste donc en ce que le cylindre supporte de la part du plan, en plus de la réaction N appliquée au point de contact géométrique, un couple Nβ opposé à sa rotation instantanée; la grandeur de ce couple varie suivant la force ϖ qu'on fait agir, mais ne dépasse pas la limite Nδ qui

correspond à $\varpi = p$, c'est-à-dire à la valeur de ϖ pour laquelle le roulement est sur le point de naître.

Une observation toute semblable peut être présentée sur le cas où le cylindre est sollicité à rouler par une force φ parallèle à son plan tangent en A (*fig.* 210). Si les corps étaient parfaitement polis et indéformables, l'appui ne pourrait exercer sur lui que la réaction normale P appliquée en A. Mais, en vertu de l'existence du frottement, il peut d'abord donner en outre la réaction tangentielle φ (pourvu qu'elle reste inférieure ou, au plus, égale à fP), et, en second lieu, par sa faculté de résister au roulement, il transporte la réaction normale P en a, ou, ce qui revient au même, il fait naître un couple (P, — P), qu'il faut joindre à la réaction P agissant en A. Ce couple, opposé à la rotation autour de l'axe A, a un moment Pβ variable avec la force additionnelle φ, entre zéro et la limite Pδ, qu'il atteint lorsque le roulement est imminent.

En généralisant par une induction plausible les conclusions auxquelles conduisent les expériences de Coulomb, on peut énoncer la proposition suivante :

Quand deux surfaces S, S′ *appartenant à des solides naturels sont sur le point de sortir du repos en prenant, l'une relativement à l'autre, le mouvement nommé* roulement simple (n° 41), S *reçoit de la part de* S′ : 1° *une réaction normale* N *passant au point de contact géométrique;* 2° *une réaction tangentielle inférieure ou, au plus, égale au frottement correspondant à* fN *et appliquée au même point;* 3° *un couple opposé à la rotation instantanée que* S *tend à prendre relativement à* S′. *Le moment de ce couple est égal au produit de* N *par une distance* δ *qui ne dépend que de la nature des corps en contact.*

Cet énoncé suppose le fait de l'équilibre. Mais on démontrera plus tard qu'un système en mouvement peut être considéré comme en équilibre, pourvu qu'on joigne certaines forces fictives aux forces réellement agissantes. La proposition s'applique donc aussi dans le cas du mouvement, puisqu'on n'y a fait entrer aucune hypothèse particulière sur les forces auxquelles sont soumis les deux corps considérés; toutefois on

peut supposer, par analogie avec ce qui a lieu dans le cas du glissement (nº 167), qu'il y aurait peut-être un changement plus ou moins sensible pour la constante δ si le mouvement devenait effectif, au lieu d'être sur le point de se produire.

Voici enfin quelques indications sur les valeurs que peut prendre δ. Pour des cylindres en bois de gaïac roulant sur des règles en chêne, Coulomb a trouvé $\delta = 0^m,0048$. Pour des roues de voiture roulant sur une chaussée empierrée, on a trouvé :

$\delta = 0^m,015$ si l'empierrement est dans un état d'entretien parfait;
$\delta = 0^m,041$ si l'empierrement est dans un état d'entretien ordinaire;
$\delta = 0^m,063$ si l'empierrement est neuf et imparfaitement agrégé.

170. *Raideur des cordes.* — Les cordes, surtout celles d'un diamètre un peu fort, sont assez loin de posséder la flexibilité parfaite qu'on leur attribue ordinairement dans les spéculations ou calculs théoriques. Ce fait est mis en évidence, notamment lorsqu'on fait passer une corde sur une poulie fixe et qu'on soumet les deux brins qui se détachent de la poulie à des forces P et Q (*fig.* 211). Supposons qu'on puisse annuler les frottements sur l'arbre de la poulie et que la corde soit parfaitement flexible, alors il est facile de reconnaître que la condition d'équilibre est

Fig. 211.

O
P Q

$$P = Q,$$

de sorte que le moindre excès de P sur Q déterminerait la rotation de la poulie autour de son axe. En effet, une corde parfaitement flexible doit bien suivre le contour de la poulie et se détacher tangentiellement des deux côtés, à une même distance de l'axe O. Les deux forces P et Q agissent donc sur la poulie avec un même bras de levier, et, comme la condition d'équilibre consiste en ce que leurs moments soient égaux

(n° 135), on voit qu'elle entraîne l'égalité de P avec Q. La même condition doit encore être remplie, comme on le démontrera dans la suite du Cours, pour que le mouvement de la poulie se conserve avec une vitesse angulaire constante. Mais dans la réalité, même en s'arrangeant pour rendre tout à fait négligeables les frottements des supports, on constate qu'il faut prendre P notablement supérieur à Q si l'on veut que le mouvement soit sur le point de naître dans le sens de P, ou reste uniforme quand il est une fois acquis. On explique ce fait par la raideur ou le défaut de flexibilité de la corde qui l'empêche de s'appliquer bien exactement sur la poulie, du côté où se fait l'enroulement, c'est-à-dire du côté de la résistance Q; la corde ne se détache parallèlement à cette force qu'en faisant un certain intervalle entre elle et la circonférence extérieure de la poulie. Si donc on désigne par r le rayon de la poulie augmenté de celui de la corde, il en résulte que P agit à la distance r de l'axe O, pendant que Q agit à une distance r' plus grande. L'égalité des moments

$$Pr = Qr' \tag{1}$$

subsiste toujours comme condition d'équilibre de la poulie; mais, puisque r' est plus grand que r, il en résulte qu'on a $P > Q$.

Coulomb a conclu de ses expériences que l'excès $P - Q$ peut être approximativement représenté par la formule

$$P - Q = \frac{A - BQ}{D}, \tag{2}$$

dans laquelle A et B sont des coefficients constants pour chaque nature de corde, et D représente le diamètre $2r$. Cette équation, multipliée par r, devient

$$Pr - Qr = \frac{1}{2}(A + BQ),$$

ou bien, en vertu de (1),

$$Qr' = Qr + \frac{1}{2}(A + BQ). \tag{3}$$

Cette dernière équation montre qu'on obtient le moment réel

Qr' de la résistance Q appliquée à une poulie par l'intermédiaire d'une corde, en ajoutant au moment Qr, calculé comme si la corde était parfaitement flexible, un moment de même sens égal à $\frac{1}{2}(A+BQ)$. En d'autres termes, la raideur de la corde équivaut ici à un couple résistant exprimé par $\frac{1}{2}(A+BQ)$; si l'on en tient compte, on peut regarder la force Q comme agissant tangentiellement à la circonférence de rayon r.

Le Tableau suivant, calculé par Navier, donne, pour certaines cordes expérimentées par Coulomb, les valeurs des coefficients A et B, en supposant qu'on prenne le kilogramme pour unité de force et le mètre pour unité de longueur. Ces cordes étaient composées de trois *torons* ou cordes moins grosses, et les torons composés d'un certain nombre de brins nommés *fils de caret*.

Tableau des coefficients A et B.

INDICATION DES CORDES.	DIAMÈTRE.	POIDS par mètre de longueur.	A.	B.
	m	kg		
Cordes blanches de 30 fils...	0,020	0,283	0,222	0,0097
» 15 fils...	0,014	0,145	0,064	0,0055
» 6 fils...	0,009	0,052	0,011	0,0024
Cordes goudronnées de 30 fils.	0,024	0,333	0,350	0,0126
» 15 fils.	0,017	0,163	0,106	0,0061
» 6 fils.	0,010	0,069	0,021	0,0026

Ce Tableau montre que A varie à peu près proportionnellement à la quatrième puissance du diamètre de la corde, et B proportionnellement au carré de la même dimension. Quoique les expériences de Coulomb ne permettent pas de tenir compte du plus ou moins de vétusté de la corde, il est cependant bien certain que cette circonstance doit influer aussi sur la raideur; une corde à demi usée est toujours plus flexible que lorsqu'elle était neuve.

On a intérêt, d'après le même Tableau, à restreindre autant que possible le diamètre de la corde; mais il ne faut pas non plus soumettre cette corde à une tension trop considérable, eu égard à sa section, afin de ne pas s'exposer aux accidents que pourrait entraîner sa rupture. En général, on ne doit pas dépasser une limite de $2^{kg},5$ à 3^{kg} par millimètre carré de section.

§ II. — Applications diverses.

171. *Plan incliné.* — Considérons un solide naturel qui s'appuie sur un plan incliné, en le touchant par une face plane; supposons que ce solide, sollicité par une force unique R directement appliquée, soit en repos, mais sur le point de glisser le long du plan par un mouvement de translation, ou qu'il possède effectivement un mouvement rectiligne et uniforme de translation parallèle à ce même plan. Dans les deux cas on reconnaît sans peine que toutes les forces agissant sur le corps, y compris les réactions de l'appui et les forces intérieures, doivent se faire équilibre sur le corps considéré comme système rigoureusement invariable. En effet, si chaque point est en repos ou parcourt uniformément une droite, les forces agissant sur ce point ont une résultante nulle (nº 112); donc il y a équilibre pour chaque point en particulier, et par conséquent pour l'ensemble du système. D'ailleurs les forces extérieures prises seules doivent toujours satisfaire aux six conditions générales de l'équilibre, et celles-ci sont suffisantes quand le système est solidifié (nºs 129 et 133); donc, dans cette hypothèse, il y a équilibre entre la force R et les réactions du plan d'appui, et il faut que celles-ci se réduisent à une résultante R_1 égale et contraire à R.

Maintenant on remarquera que les réactions normales exercées par le plan d'appui sur le corps sont toutes répulsives, car elles tendent à empêcher la pénétration du corps dans son appui; ce sont donc des forces parallèles et de même sens. A chacune d'elles correspond un frottement proportionnel [1], de direction et de sens également constants, car il est en sens

[1] On admet ici que la nature du corps et celle de son appui sont les mêmes pour tous les points de contact.

directement opposé à la translation effective ou imminente du solide. La composition de chaque réaction normale avec le frottement qui lui correspond donnera donc aussi une série de forces parallèles et de même sens; et quand on composera toutes les résultantes partielles pour avoir la résultante générale R_1, on obtiendra une force ayant même direction et même sens que ses composantes et passant dans l'intérieur du polygone convexe formé par les points d'appui (nᵒˢ 140 et 149). Puisque R et R_1 sont des forces égales et directement opposées, on conclut de là que R doit remplir les conditions suivantes :

1° Sa composante normale N presse le corps contre son appui;

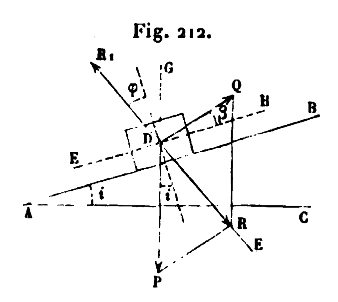
2° La force R rencontre le plan dans l'intérieur du polygone convexe des points d'appui;

3° Sa composante tangentielle F a la direction et le sens de la translation qui se produit ou est sur le point de se produire;

4° Les rapports entre R, N, F sont les mêmes que pour les forces élémentaires exercées en chaque point d'appui, c'est-à-dire que R fait avec la normale au plan un angle égal à l'angle φ du frottement.

Étudions maintenant le cas particulier d'un corps pesant qu'on veut faire [glisser uniformément le long d'un plan incliné AB (*fig.* 212), en lui appliquant une force Q suivant une ligne déterminée, qui rencontre en D la verticale du poids P du corps. La ligne d'action DQ est d'ailleurs contenue dans le plan vertical QDP, que nous prenons pour plan de la figure et que nous supposons perpendiculaire au plan incliné.

Fig. 212.



Alors ce dernier doit avoir ses horizontales perpendiculaires au plan de la figure qu'il coupe suivant une ligne de plus grande pente AB. Désignons par

i l'angle du plan incliné avec le plan horizontal, c'est-à-dire

l'angle de AB avec sa projection horizontale AC, ou de la verticale P avec la normale DN au plan;

β l'angle de Q avec la parallèle DH à AB, compté positivement lorsque l'extrémité Q va en s'élevant;

φ l'angle de frottement du corps sur le plan.

Si nous supposons d'abord le mouvement sur le point de naître dans le sens ascendant et parallèle à AB, ou se produisant effectivement avec une vitesse constante, dans ces mêmes direction et sens, là composante tangentielle de la réaction R_1 du plan sera descendante, et sa composition avec une réaction normale dirigée comme DN donnera une résultante inclinée sur DN, ainsi que l'indique la figure. La résultante R de P et Q passant au point de rencontre D de ces deux forces, il en est de même de R_1, et la direction commune de ces résultantes fait l'angle φ avec la normale. Cela permet d'avoir immédiatement les valeurs de Q et de R. En effet, dans le parallélogramme de composition QDPR, chaque force est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres (n° 11); donc

$$\frac{Q}{\sin(P,R)} = \frac{R}{\sin(Q,P)} = \frac{P}{\sin(R,Q)}.$$

On voit d'ailleurs facilement sur la figure les relations

$$(P,R) = i + \varphi, \quad (Q,P) = 90^\circ + \beta + i, \quad (R,Q) = 90^\circ - \varphi + \beta;$$

il en résulte

$$(1) \qquad Q = P\,\frac{\sin(i+\varphi)}{\cos(\varphi-\beta)}, \quad R = R_1 = P\,\frac{\cos(\beta+i)}{\cos(\varphi-\beta)}.$$

La force Q est représentée par la droite $\overline{PR}$ joignant l'extrémité de P à un point DE; la valeur minimum de cette force répond donc au cas où sa ligne d'action coïnciderait avec la perpendiculaire abaissée du point donné P sur la droite DE, et où l'on aurait par conséquent $\beta = \varphi$. L'expression analytique de Q conduit tout de suite à la même conclusion; en faisant varier l'angle β qui définit la direction de cette force, on ne fait varier que le dénominateur $\cos(\varphi - \beta)$, qui devient le plus grand possible pour $\beta = \varphi$ et donne le minimum dont il s'agit.

Il est bon de remarquer encore que l'équilibre entre les trois forces Q, P, R_1 deviendrait impossible si l'angle β croissait assez pour que la ligne DQ ne restât pas comprise dans l'intérieur de l'angle HDG formé par le prolongement de P avec une parallèle DH à AB, car alors les trois forces agiraient dans le sens de la descente, et la somme algébrique de leurs projections sur AB ne serait pas nulle. De là résulte la condition

$$\beta < 90^\circ - i \quad \text{ou} \quad \beta + i < 90^\circ.$$

Lorsque le corps est sur le point de se mouvoir en descendant parallèlement à BA, ou descend effectivement avec un mouvement de translation uniforme dans cette direction, la détermination de Q et de R n'offre pas plus de difficulté. La force de frottement change alors de sens; par suite, les résultantes R, R_1, qui doivent continuer toujours à faire avec la normale DN un angle φ, passent de l'autre côté de cette normale. Ici deux cas sont à distinguer.

1° *L'inclinaison i du plan est plus grande que l'angle φ du frottement.* — Comme la force verticale P fait l'angle i avec la normale au plan, la direction DR de la force R, résultante de P et de Q, se trouve dans l'intérieur de l'angle PDM (*fig.* 213); le parallélogramme des forces PDQR donne encore l'égalité des rapports

$$\frac{Q}{\sin(P,R)} = \frac{R}{\sin(Q,P)} = \frac{P}{\sin(R,Q)},$$

d'où l'on déduit sans peine, en remplaçant les angles par leurs valeurs en fonction de i, β, φ,

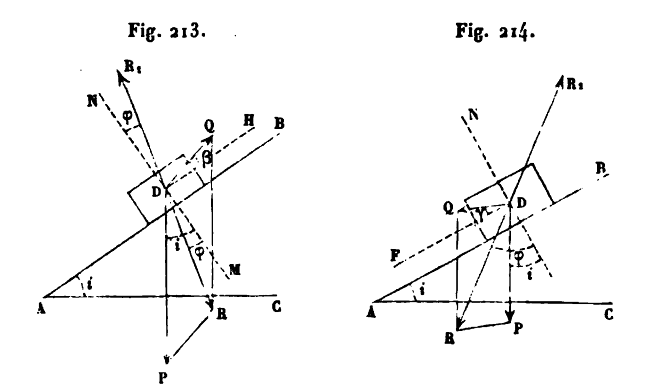
$$(2) \qquad \begin{cases} Q = P\dfrac{\sin(i-\varphi)}{\cos(\beta+\varphi)}, \\ R = R_1 = P\dfrac{\cos(\beta+i)}{\cos(\beta+\varphi)}. \end{cases}$$

Ici l'on aurait intérêt, pour diminuer Q, à prendre $\beta = -\varphi$, c'est-à-dire à faire agir Q suivant une ligne dirigée en dessous de la parallèle DH à AB et faisant l'angle φ avec cette parallèle.

On remarquera que les équations (2) peuvent se déduire

des équations (1) par le simple changement de φ en $-\varphi$. On voit aussi que la valeur (2) de Q est moindre que la valeur (1), à égalité des angles i, φ, β et du poids P, et en supposant toujours remplie la condition nécessaire $\beta + i < 90^\circ$; cela est facile à reconnaître aussi bien par leurs expressions que par la construction geométrique d'où nous les avons déduites.

Fig. 213. Fig. 214.



2° *L'angle i est plus petit que* φ. — La ligne DR des *fig.* 212 et 213 passe alors de l'autre côté de DP; il en résulte que la ligne $\overline{PR}$, qui représente Q en grandeur, direction et sens, passe aussi de l'autre côté de DP, et la figure prend alors une disposition analogue à celle de la *fig.* 214. La force Q agit dans le sens de la descente, suivant une ligne faisant un angle γ avec DF parallèle à BA. On a toujours

$$\frac{Q}{\sin(P, R)} = \frac{R}{\sin(Q, P)} = \frac{P}{\sin(R, Q)},$$

ce qui conduit de même à

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} Q &= P\,\frac{\sin(\varphi - i)}{\cos(\varphi - \gamma)}, \\ R &= R_1 = P\,\frac{\cos(i - \gamma)}{\cos(\varphi - \gamma)}. \end{aligned} \right.$$

La différence entre ce cas et le précédent consiste surtout en ce que, dans le premier, la force Q doit s'opposer à la descente du corps, tandis que, dans le second, elle doit néces-

sairement contribuer à la produire. Dans le cas intermédiaire $i = \varphi$, on aurait $Q = o$; le corps abandonné à la seule action de son poids descendrait uniformément, ou serait sur le point de sortir du repos en descendant.

Calcul du travail des forces dans le mouvement uniforme. — Nous considérerons successivement les trois hypothèses auxquelles se rapportent les *fig.* 212, 213, 214 et nous nommerons toujours T, T′, T″ les travaux respectifs, pris en valeur absolue, des trois forces Q, P, R_1, dans un déplacement x du corps. Comme la résultante de ces trois forces est nulle, la somme algébrique de leurs travaux l'est aussi; mais, comme les signes de T et de T′ varient suivant l'hypothèse particulière où l'on se place, l'équation exprimant cette propriété prend diverses formes.

1° *Mouvement ascendant.* — La force Q fait seule un travail positif; les forces P et R_1 font un travail négatif. On doit donc avoir

$$T - T' - T'' = o,$$

d'où résulte $T = T' + T''$ et par conséquent $T > T'$. Les expressions de ces travaux sont d'ailleurs

$$\begin{aligned} T &= Qx\cos\beta = Px\frac{\sin(i+\varphi)\cos\beta}{\cos(\varphi-\beta)}, \\ T' &= Px\sin i, \\ T'' &= R_1 x\sin\varphi = Px\frac{\sin\varphi\cos(\beta+i)}{\cos(\varphi-\beta)}. \end{aligned}$$

La force Q, qui agit seule ici dans le sens du mouvement, se nomme la *puissance* et son travail se nomme le *travail moteur;* le poids P qu'on élève au moyen du plan incliné, et qui est la seule force directement appliquée au corps en dehors de la force Q, prend le nom de *résistance principale*, et son travail changé de signe est le *travail résistant utile* qui correspond à l'élévation du poids P. Ce second travail T′ serait égal au premier T si le frottement disparaissait, car on aurait alors $\varphi = o$ et $T'' = o$. Mais en réalité φ n'est pas nul et T″ a une certaine valeur qui s'ajoute à T′ pour donner T, de sorte que la puissance doit fournir un travail supérieur au travail utile.

La force R_1 peut se remplacer par ses composantes normale et tangentielle; cette dernière, qui est le frottement, fait seule du travail. On la compte parmi les résistances dites *secondaires*, en vue desquelles l'appareil employé n'a pas été construit, mais qui sont la conséquence forcée des circonstances au milieu desquelles s'exécute l'opération qu'on avait à faire.

On vérifie sans peine, au moyen des expressions précédentes, que le rapport $\frac{T}{T'}$ est supérieur à l'unité. On a, en effet,

$$\frac{T}{T'}=\frac{\sin(i+\varphi)\cos\beta}{\cos(\varphi-\beta)\sin i}$$

et, par suite,

$$\frac{T}{T'}-1=\frac{\sin(i+\varphi)\cos\beta-\cos(\varphi-\beta)\sin i}{\cos(\varphi-\beta)\sin i};$$

or le numérateur du second membre peut s'écrire

$$(\sin i\cos\varphi+\cos i\sin\varphi)\cos\beta-(\cos\varphi\cos\beta+\sin\varphi\sin\beta)\sin i$$

ou, toute réduction faite,

$$\sin\varphi(\cos i\cos\beta-\sin i\sin\beta)\quad\text{ou encore}\quad\sin\varphi\cos(\beta+i);$$

donc

$$\frac{T}{T'}-1=\frac{\sin\varphi\cos(\beta+i)}{\sin i\cos(\varphi-\beta)},$$

expression nécessairement positive parce que i, φ et β sont des angles aigus d'après leur définition même, et qu'on a montré que $\beta+i$ l'est également.

2° *Mouvement descendant;* $i>\varphi$. — Les forces Q et R_1 sont opposées au mouvement; la force P agit, au contraire, dans le sens de ce mouvement. Donc T' est positif, T et T'' sont négatifs, et l'on a

$$T'=T+T'',\quad\text{d'où résulte}\quad T'>T;$$

la puissance P fait encore un travail supérieur à celui de la résistance principale Q. On a, d'ailleurs, pour expressions de

ces divers travaux,

$$\begin{aligned} T &= Qx\cos\beta = Px\,\frac{\sin(i-\varphi)\cos\beta}{\cos(\beta+\varphi)}, \\ T' &= Px\sin i, \\ T'' &= R_1 x\sin\varphi = Px\,\frac{\cos(\beta+i)\sin\varphi}{\cos(\beta+\varphi)}. \end{aligned}$$

3° *Mouvement descendant;* $i < \varphi$. — Les forces P et Q directement appliquées agissent toutes deux pour faire descendre le corps; ce sont deux puissances. Il n'y a plus de résistance principale et le seul travail négatif est celui du frottement. On posera donc

$$T + T' = T''$$

et l'on aura pour valeurs de ces travaux

$$\begin{aligned} T &= Qx\cos\gamma = Px\,\frac{\sin(\varphi-i)\cos\gamma}{\cos(\varphi-\gamma)}, \\ T' &= Px\sin i, \\ T'' &= R_1 x\sin\varphi = Px\,\frac{\cos(i-\gamma)\sin\varphi}{\cos(\varphi-\gamma)}. \end{aligned}$$

Ici, l'ordre de grandeur de T et T' n'est plus connu d'avance et dépend des trois angles i, γ, φ.

On verra plus tard l'importance que présente la détermination du travail des forces dans les machines.

172. *Coin isoscèle.* — Le coin isoscèle est un prisme triangulaire en métal ou en bois dur, ayant un triangle isoscèle pour section droite. Soit ABC ce prisme (*fig.* 215); une force P agit normalement au centre de la face AB, pour le faire pénétrer entre deux obstacles qu'on veut écarter, comme par exemple deux parties d'un corps qu'il s'agit de fendre. Supposons le coin sur le point de se mouvoir dans le sens de P; alors il éprouve, de la part des deux obstacles, des réactions qui ont une résultante égale à P. Les deux réactions totales exercées sur les faces AC, BC font un même angle φ, égal à celui du frottement, avec les normales à ces faces; elles sont donc également inclinées sur P, et par suite il faut nécessairement qu'elles soient égales pour que P puisse être leur résultante.

Désignons par R l'intensité commune à ces deux forces, représentées par les droites $\overline{DR}$, $\overline{ER}$. Comme l'angle φ doit être compté en dessus des normales DN, EN, afin que les composantes tangentielles des forces R ou frottements agissent en sens contraire du glissement du coin sur les obstacles, on voit que DR et ER font avec CP des angles égaux à $90° - \alpha - \varphi$, en nommant α le demi-angle au sommet C du coin. Alors, si l'on égale à zéro la somme algébrique des projections des forces R, R, P sur la direction de la dernière, on trouvera

Fig. 215.

$$P = 2R\sin(\alpha + \varphi),$$

relation qui fait connaître R en fonction de P. On en déduit la pression exercée normalement par le coin sur chacun des deux obstacles; elle est égale à $R\cos\varphi$, soit, d'après l'équation précédente, à

$$\frac{P}{2}\frac{\cos\varphi}{\sin(\alpha+\varphi)}.$$

Dans le cas d'un frottement nul, cette pression serait $\frac{P}{2\sin\alpha}$, puisqu'on aurait $\varphi = 0$; le frottement la réduit dans le rapport de $\frac{\cos\varphi\sin\alpha}{\sin(\alpha+\varphi)}$ ou de $\frac{1}{1+\frac{\tang\varphi}{\tang\alpha}}$ à l'unité. En supposant, par exemple,

$$\tang\alpha = 0,15, \quad \tang\varphi = 0,45,$$

on trouve ce rapport égal à $\frac{1}{4}$; le coin exercerait des pressions quatre fois moindres que celles qu'il serait susceptible de produire si le frottement disparaissait.

Supposons maintenant que le coin soit sur le point de remonter sous l'action de deux forces R' produites par les obstacles, malgré une force descendante P' appliquée au centre de la face AB. Le frottement change alors de sens et, puisque la composante tangentielle des forces R' est descen-

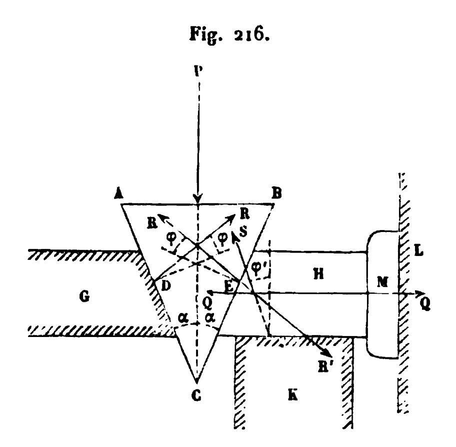
dante, l'angle φ de ces forces avec les normales aux faces AC, BC doit se compter en dessous, d'où il suit qu'elles font avec CP' des angles égaux à $90° - \alpha + \varphi$. La relation entre P' et R', obtenue par le même moyen que dans le premier cas, deviendrait

$$P' = 2R' \sin(\alpha - \varphi).$$

Si l'on avait $\alpha > \varphi$, cette relation donnerait pour P' une valeur positive, et il serait alors effectivement nécessaire d'appliquer au coin une force descendante, pour l'empêcher de remonter après qu'il aurait été enfoncé, ce qui en rendrait l'usage incommode. Au contraire, si le coin est suffisamment aigu pour qu'on ait $\alpha < \varphi$, P' deviendra négative, et il faudrait exercer un effort ascendant pour que le coin fût sur le point de remonter; donc, si l'on supprime cet effort, le mouvement en question ne sera pas sur le point de se produire, et le coin restera en équilibre stable dans la position qu'on lui avait précédemment fait prendre en l'enfonçant.

173. *Presse à coin.* — Un coin isoscèle, soumis à une force P qui agit au centre de la face supérieure AB (*fig.* 216), s'en-

Fig. 216.



fonce entre un obstacle fixe F et une pièce H nommée *bloc* qui, d'un côté, s'appuie sur un support fixe K, et de l'autre exerce une pression Q sur un corps M, retenu lui-même par

l'obstacle fixe L. Supposons le mouvement sur le point de naître sous l'action de P, dans le sens de cette force; alors le coin éprouve de la part de G et H deux réactions symétriques R, faisant avec les normales DN, EN des angles égaux à l'angle de frottement φ et données par l'équation (n° 172)

$$R = \frac{P}{2\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Considérons maintenant l'équilibre du bloc. Il est prêt à glisser sur le support K, sous l'action de trois forces, savoir : 1° une force R' exercée par le coin, égale et contraire à R, en vertu du principe de la réaction égale à l'action (n° 95); 2° une réaction exercée par le corps M, égale et contraire à Q, par la même raison; 3° une réaction S due au support et faisant avec la normale à la surface commune un angle φ', égal à l'angle du frottement des corps H et K. Chacune de ces trois forces devant être égale et contraire à la résultante des deux autres, on a (n° 11)

$$\frac{Q}{\sin(R', S)} = \frac{R'}{\sin(S, Q)} = \frac{S}{\sin(Q, R')}.$$

Nous admettrons que Q a une direction perpendiculaire à P et qu'il en est de même du plan de séparation de H et K; alors les angles qui figurent dans les deux égalités ci-dessus sont faciles à évaluer, et l'on trouve

$$\begin{aligned}
(R', S) &= \varphi' + 180^\circ - (R', P) = 90^\circ + \alpha + \varphi + \varphi', \\
(S, Q) &= 90^\circ - \varphi', \\
(Q, R') &= 90^\circ + (R', P) = 180^\circ - (\alpha + \varphi).
\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement

$$\begin{aligned}
Q &= R\,\frac{\cos(\alpha + \varphi + \varphi')}{\cos\varphi'} = P\,\frac{\cos(\alpha + \varphi + \varphi')}{2\cos\varphi' \sin(\alpha + \varphi)}, \\
S &= R\,\frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos\varphi'} = \frac{P}{2\cos\varphi'}.
\end{aligned}$$

On connaît donc les valeurs de Q et de S qui répondent à une valeur donnée de P.

Il faut remarquer que si l'on avait

$$\alpha + \varphi + \varphi' > 90^\circ \quad \text{ou} \quad \alpha > 90^\circ - \varphi - \varphi',$$

Q deviendrait négatif; cela signifie que le glissement ne serait pas sur le point de se produire dans le sens supposé, à moins de changer le sens admis pour Q, de sorte qu'il faudrait tirer le bloc dans le sens du glissement à produire, au lieu de lui donner une résistance à vaincre. On voit qu'alors l'appareil n'atteindrait pas son but; il faut donc avoir soin de le construire en prenant α inférieur à $90^\circ - \varphi - \varphi'$; et même, comme l'on aurait $Q = 0$ dans le cas de l'égalité, il convient de rester notablement en dessous de cette limite de α.

La condition $\alpha < \varphi$ doit, d'ailleurs, être maintenue, afin que le coin, abandonné à lui-même après son enfoncement, ne puisse pas remonter par l'effet des forces qu'il supporte sur ses faces latérales (n° **172**).

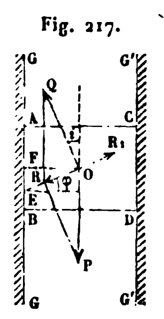
174. *Coquille mobile entre deux glissières.* — Un corps solide, dit *coquille,* servant à l'assemblage d'une bielle avec une tige guidée, est assujetti à prendre une translation rectiligne, en glissant sur deux pièces fixes nommées *glissières.* Ce corps est soumis à une force ou puissance P, dans la direction et le sens de la translation, et à une résistance Q de direction oblique; on pourrait également admettre l'hypothèse inverse, mais nous nous en tiendrons à la précédente, pour fixer les idées. La section de la coquille par un plan parallèle à P et Q est un rectangle, au centre duquel se rencontrent les deux forces et dont les côtés sont parallèles ou perpendiculaires à P. Le mouvement de la coquille étant, d'ailleurs, supposé uniforme, ou seulement sur le point de naître dans le sens de P, la résultante des forces P et Q doit être tenue en équilibre par les réactions des glissières, comme on l'a démontré au commencement du n° **171**; cela exige que ces réactions se réduisent à une force unique, contenue dans le plan de P et de Q, et de plus égale et directement opposée à leur résultante.

Maintenant, comme la coquille n'est pas serrée entre les glissières, mais que celles-ci présentent, au contraire, un certain jeu destiné à faciliter le mouvement, leur réaction peut

se produire de deux manières différentes que nous allons successivement examiner.

Premier cas : *La coquille touche une seule glissière.* — Prenons pour plan de la figure celui de P et Q; soient ABCD (*fig.* 217) la section de la coquille, GG, G'G' celles des glissières. On suppose que le contact a lieu seulement sur l'une des deux, soit GG, soit G'G'; mais les forces ayant les directions indiquées sur la figure, il est clair que la seconde alternative ne peut se présenter, car, si elle se produisait, la réaction de G'G' aurait une composante normale dirigée vers la gauche, comme celle de Q, et la somme algébrique des projections des forces sur cette direction ne pourrait s'annuler. Le contact s'établit donc suivant GG, et la réaction R_1 de la glissière de gauche doit être égale et contraire à la résultante R des forces P et Q; de plus, cette force R_1 fait avec la normale à la surface de contact l'angle φ du frottement, cet angle étant porté en dessus, puisque la composante tangentielle de R_1 agit en sens contraire du glissement, lequel a le sens descendant, comme la force P. Par suite, on aura

Fig. 217.



$$P = Q\frac{\sin(Q, R)}{\sin(P, R)}$$

ou, en nommant i l'angle supplémentaire de (P, Q),

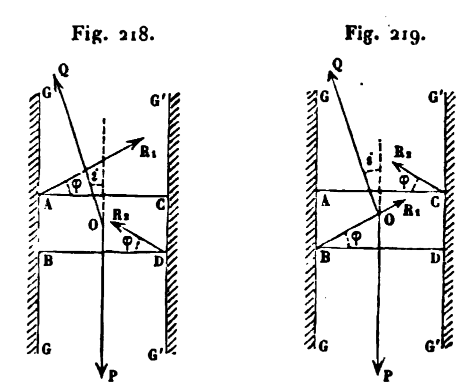
$$P = Q\frac{\sin(90^\circ - i + \varphi)}{\sin(90^\circ - \varphi)} = Q\frac{\cos(i - \varphi)}{\cos\varphi} = Q\cos i + Q\sin i \tang\varphi.$$

Il faut ajouter encore, en vertu d'un raisonnement donné au n° 171, que la résultante R doit couper AB entre A et B. Supposons le point O placé au centre du rectangle ABCD, dont nous désignerons les deux dimensions par $a = \overline{AC}$ et $b = \overline{AB}$; si la rencontre de R avec AB se fait en E, la distance de ce point au milieu F de $\overline{AB}$ doit être moindre que $\frac{b}{2}$, ce qu'on exprime par l'inégalité

$$\frac{a}{2}\tang\varphi < \frac{b}{2} \quad \text{ou} \quad b > fa,$$

condition nécessaire pour que le premier cas puisse être réalisé.

DEUXIÈME CAS : *La coquille touche les deux glissières.* — Puisque la dimension a reste légèrement inférieure à l'écartement des glissières, afin de conserver un certain jeu, le contact ne peut avoir lieu simultanément des deux côtés que si la coquille a un peu tourné autour de son centre, de manière à toucher les glissières par deux angles opposés, soit A et D, soit B et C. Mais on reconnaît encore que l'une des alternatives, la première, est impossible. Supposons, en effet, les réactions R_1, R_2 exercées en A et D (*fig.* 218) suivant des directions faisant des angles φ avec les normales AC, BD, et en dessus, puisqu'il y a glissement imminent ou effectif dans le sens descendant. Il doit y avoir équilibre entre les quatre forces P, Q, R_1, R_2. Cela exige d'abord que R_1 soit plus grand que R_2 pour que la différence de leurs projections sur AC annule la projection de Q. En second lieu, la somme algébrique



des moments des quatre forces relativement au point O devrait être nulle. Or les moments de P et de Q sont nuls; la somme des deux autres, calculée en remplaçant chacune des forces R_1, R_2 par ses composantes normale et tangentielle, a pour expression

$$\frac{1}{2}R_1(b\cos\varphi + a\sin\varphi) + \frac{1}{2}R_2(b\cos\varphi - a\sin\varphi),$$

quantité qui ne peut s'annuler, car on a reconnu que R_2

est moindre que R_1, et, d'autre part, la valeur absolue de $b\cos\varphi - a\sin\varphi$ ne peut qu'être inférieure à $b\cos\varphi + a\sin\varphi$. L'hypothèse du contact en A et D conduit donc à une impossibilité; par suite, elle ne se réalisera pas, et il ne reste que celle du contact aux deux autres sommets B et C du rectangle.

Les réactions R_1, R_2 sont alors dirigées comme l'indique la *fig.* 219. Si l'on écrit les trois équations d'équilibre des forces P, Q, R_1, R_2 contenues dans le même plan, en égalant à zéro les sommes de projections sur les directions OP, CA et la somme des moments relativement à O (n° 133), on aura

$$P - Q\cos i - R_1\sin\varphi - R_2\sin\varphi = 0,$$
$$Q\sin i - R_1\cos\varphi + R_2\cos\varphi = 0,$$
$$R_1(a\sin\varphi - b\cos\varphi) - R_2(a\sin\varphi + b\cos\varphi) = 0.$$

La dernière équation deviendrait impossible si l'on n'avait pas

$$a\sin\varphi - b\cos\varphi > 0 \quad \text{ou} \quad b < a\,\text{tang}\,\varphi \quad \text{ou encore} \quad b < fa,$$

car alors les deux termes en R_1 et R_2 seraient tous deux négatifs et ne pourraient donner une somme nulle. Cette condition nécessaire du second cas est justement la négation de celle qu'on a trouvée dans le premier, de sorte qu'on saura toujours celui des deux qui doit se réaliser. Si c'est le second, la deuxième des trois équations ci-dessus donnera

$$R_1 - R_2 = \frac{Q\sin i}{\cos\varphi};$$

la troisième peut s'écrire

$$(R_1 - R_2)a\sin\varphi - (R_1 + R_2)b\cos\varphi = 0,$$

et l'on en déduit

$$R_1 + R_2 = (R_1 - R_2)\frac{a\,\text{tang}\,\varphi}{b} = \frac{Qa\sin i\,\text{tang}\,\varphi}{b\cos\varphi},$$

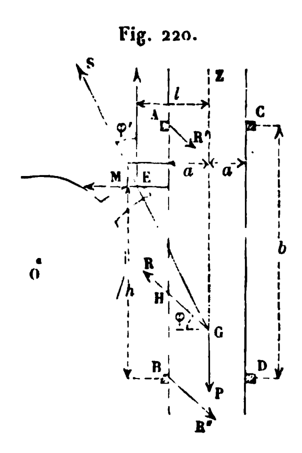
valeur qui, portée dans la première des trois équations d'équilibre, donne finalement

$$P = Q\cos i + \frac{Qa}{b}\sin i\,\text{tang}^2\varphi.$$

La comparaison de ce résultat avec celui du premier cas montre que la valeur de P est plus grande dans le second, à égalité de valeur de la résistance Q et des angles i et φ. En effet, la différence entre la seconde valeur de P et la première a pour expression $Q \sin i \tang \varphi \left(\frac{a}{b} \tang \varphi - 1\right)$, quantité positive en vertu de la condition d'existence du second cas. On a donc pratiquement intérêt à empêcher la réalisation du second cas, et il convient, par conséquent, de construire la coquille de manière qu'on ait $b > fa$.

175. *Tige du pilon mue par une came et guidée par des appuis fixes.* — Considérons une tige de pilon guidée, dans le mouvement vertical de translation qu'elle doit prendre, par quatre appuis A, B, C, D (*fig.* 220); elle porte un mentonnet M que soulève une came montée sur un arbre tournant autour de l'axe horizontal O. La figure représente une coupe par un plan perpendiculaire à l'axe de rotation et contenant la verticale GZ, axe de figure de la tige; les sections des appuis par ce plan sont supposées très petites et réduites à de simples points A, B, C, D, situés aux quatre sommets d'un rectangle à côtés horizontaux et verticaux. La tige est censée à l'état de mouvement uniforme ascendant ou sur le point de monter en partant du repos. Il s'agit d'établir la relation qui doit exister entre la force S exercée en E par la came sur le mentonnet et le poids P du pilon agissant suivant la verticale ZP. Ici encore deux cas peuvent se présenter si l'on admet que, pour faciliter le mouvement de la tige, il y a un peu de jeu entre elle et ses appuis.

Fig. 220.



Premier cas : *La tige touche deux appuis sur une même verticale.* — Ces deux appuis ne peuvent être que A et B, c'est-à-dire les deux qui se trouvent, par rapport à la tige, du même côté que O. En effet, la force S exercée sur le mentonnet ré-

sulte d'une action verticale ascendante et d'un frottement horizontal dirigé de droite à gauche, comme le glissement de la came sur le mentonnet. Si la tige touchait les appuis C et D, et non pas A et B, les réactions des appuis touchés auraient encore des composantes horizontales dans le sens de droite à gauche; l'équilibre entre ces réactions, le poids P et la force S, ne pourrait donc se réaliser, car la somme des projections horizontales de toutes ces forces ne serait pas nulle.

Soient φ et φ' les angles du frottement de la tige sur ses appuis et de la came sur le mentonnet. La force S fait avec la verticale, normale commune au point de contact E, un angle φ' à gauche; cette force, composée avec le poids P, donne une résultante R qui sera équilibrée par les réactions en A et B, et qui doit, par conséquent, faire comme elles l'angle φ avec l'horizontale. Cet angle φ se compte en dessus de l'horizontale, parce que la force R est en sens contraire des réactions qui s'opposent au mouvement d'ascension de la tige. Puisque R s'obtient par la composition de S avec P, on a

$$S = P\frac{\sin(P,R)}{\sin(S,R)} = P\frac{\sin(90^\circ+\varphi)}{\sin(90^\circ-\varphi'-\varphi)} = P\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')}.$$

Cette équation donne lieu à une première remarque. Si la somme des angles φ et φ' dépassait 90°, l'équation ne pourrait se vérifier que par une valeur négative de P; par conséquent, pour donner à la tige un mouvement ascendant uniforme ou pour la mettre sur le point de monter en sortant du repos, il serait nécessaire d'aider l'action de la force S par une force P agissant de bas en haut. Le même résultat deviendrait impossible à obtenir en laissant agir la force P de haut en bas, quelque petite que fût son intensité. D'ailleurs, on ne rencontre qu'exceptionnellement des angles de frottement plus grands que 45°; il arrivera donc presque toujours que la condition d'avoir

$$\varphi + \varphi' < 90^\circ$$

se trouvera satisfaite.

Mais cette condition n'est pas la seule à remplir. Les forces parallèles et de même sens R', R'', appliquées à la tige en A et B, donnent une résultante R_1 coupant la ligne $\overline{AB}$ entre ces

deux points; comme il faut que R_1 soit directement opposée à R, il en résulte que l'intersection H de R avec AB doit tomber dans l'intervalle entre A et B. Afin d'exprimer analytiquement ce fait, nommons

$2a$, b les deux dimensions horizontale et verticale du rectangle ABCD;
l la distance du point de contact E à la verticale PZ;
h sa distance à l'horizontale menée par B dans le plan de la figure.

La projection verticale x du contour EGH est

$$x = l\cot\varphi' - a\tang\varphi;$$

donc

$$\overline{BH} = h - x = h - l\cot\varphi' + a\tang\varphi.$$

Si l'on exprime que cette longueur $\overline{BH}$ est comprise entre zéro et b, on obtient deux inégalités

$$0 < \overline{BH} < b,$$

qui, multipliées par $\tang\varphi'$ et résolues par rapport à l, prennent la forme

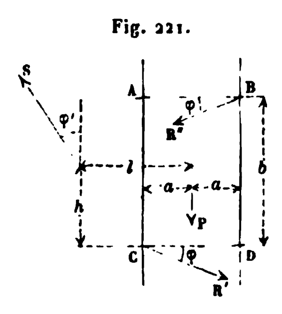
$$(h + a\tang\varphi)\tang\varphi' > l > (h + a\tang\varphi - b)\tang\varphi'.$$

Il faut, comme on le voit, que la distance l se trouve comprise entre certaines limites pour que l'hypothèse du premier cas se réalise.

Second cas : *La tige touche deux appuis diamétralement opposés.* — Il y a deux combinaisons de deux appuis diamétralement opposés, savoir A et D, B et C. Mais on voit aisément qu'on doit encore en rejeter une comme irréalisable, et que la seconde seule est admissible. En effet, si l'on supposait le contact en A et D, avec un mouvement sur le point de naître en montant ou un mouvement uniforme dans le même sens, l'équilibre existerait entre les forces P, S, la réaction R' de l'appui A et la réaction R'' de l'appui D; cette dernière serait une force dirigée de droite à gauche en descendant. Or cet équilibre est impossible, parce que toutes les forces ont des moments de même sens relativement à A, sauf la réaction R',

dont le moment est nul. On ne peut donc admettre *a priori* que l'hypothèse du contact en B et C, sauf à discuter les conditions pour qu'il se produise réellement. Pour cela, nous allons chercher les trois équations d'équilibre entre P, S et les réactions R′, R″ de B et C (*fig.* 221).

Fig. 221.



Les projections sur la verticale et l'horizontale, égalées à zéro, donnent les équations

$$S\cos\varphi' - P - (R' + R'')\sin\varphi = 0,$$
$$S\sin\varphi' - (R' - R'')\cos\varphi = 0;$$

puis on a l'équation des moments relativement à B :

$$S(l-a)\cos\varphi' - Sh\sin\varphi' + Pa + 2R''a\sin\varphi - R''b\cos\varphi = 0.$$

On tire des deux premières

$$R' + R'' = \frac{S\cos\varphi' - P}{\sin\varphi},$$
$$R' - R'' = \frac{S\sin\varphi'}{\cos\varphi}$$

et, par suite,

$$2R' = \frac{S\cos(\varphi - \varphi')}{\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{P}{\sin\varphi}, \qquad 2R'' = \frac{S\cos(\varphi + \varphi')}{\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{P}{\sin\varphi}.$$

La substitution de R″ dans l'équation des moments donne une relation entre P et S, d'où résulte l'expression de cette dernière force; on a

$$S(l-a)\cos\varphi' - Sh\sin\varphi' + Pa + \frac{Sa\cos(\varphi + \varphi')}{\cos\varphi}$$
$$- Pa - \frac{Sb\cos(\varphi + \varphi')}{2\sin\varphi} + \frac{Pb\cos\varphi}{2\sin\varphi} = 0,$$

d'où résulte

$$S = \frac{Pb\cos^2\varphi}{2h\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi' + b\cos\varphi\cos(\varphi+\varphi') - 2l\sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi' + 2a\sin^2\varphi\sin\varphi'}.$$

Après avoir calculé S au moyen de P, on pourrait obtenir les valeurs de R′ et R″.

Pour que le mouvement puisse avoir lieu comme on l'a supposé dans le second cas, il faut que les valeurs de S, R', R″ soient positives, car ces forces ne peuvent pas avoir un autre sens que celui qu'on leur a donné dans la *fig.* 221. La condition $S > 0$ sera remplie si son dénominateur est positif, et réciproquement; elle s'exprime donc par l'inégalité

$$l < (h + a\tang\varphi)\tang\varphi' + \frac{b\cos(\varphi+\varphi')}{2\sin\varphi\cos\varphi'}.$$

Comme $R' - R''$ est positif, il suffit que R'' le soit pour que R' le soit aussi; on doit donc poser encore la condition

$$\frac{S\cos(\varphi+\varphi')}{\sin\varphi\cos\varphi} - \frac{P}{\sin\varphi} > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{S\cos(\varphi+\varphi')}{P\cos\varphi} > 1;$$

en substituant la valeur de S dans cette dernière inégalité et remarquant qu'on peut multiplier par le dénominateur de S, puisqu'on le sait déjà positif, on trouve

$$2h\sin\varphi\cos\varphi\sin\varphi' - 2l\sin\varphi\cos\varphi\cos\varphi' + 2a\sin^2\varphi\sin\varphi' < 0$$

ou, plus simplement,

$$l > (h + a\tang\varphi)\tang\varphi'.$$

Ainsi la possibilité du second cas exige les deux conditions

$$(h + a\tang\varphi)\tang\varphi' + \frac{b\cos(\varphi+\varphi')}{2\sin\varphi\cos\varphi'} > l > (h + a\tang\varphi)\tang\varphi'.$$

En résumé, on a trouvé, pour les limites de l, dans l'ensemble des deux cas, trois quantités que nous transcrivons de nouveau, en les rangeant par ordre de grandeur,

$$(h + a\tang\varphi - b)\tang\varphi',$$
$$(h + a\tang\varphi)\tang\varphi',$$
$$(h + a\tang\varphi)\tang\varphi' + \frac{b\cos(\varphi+\varphi')}{2\sin\varphi\cos\varphi'}.$$

La différence entre la seconde et la première est $b\tang\varphi'$, quantité évidemment positive; la différence entre la troisième et la seconde le sera aussi, en admettant que $\varphi+\varphi'$ soit au-dessous de 90°, ce qui a pratiquement toujours lieu. Si l se

trouve compris entre les deux premières, le premier cas se réalisera; si l tombe entre les deux dernières, ce sera le second cas. Enfin les deux cas deviendraient tous deux irréalisables et, par conséquent, l'appareil ne pourrait fonctionner d'aucune manière, si l dépassait la troisième limite; une force S de grandeur quelconque ne le ferait pas sortir du repos. La même chose ne peut d'ailleurs arriver par la raison qu'on aurait pris la distance l trop petite, car la construction de la machine oblige à prendre $l > a$, c'est-à-dire au-dessus de la première limite, en supposant φ et φ' inférieur à 45° et $b - h$ positif, comme cela existe habituellement.

Lorsque le second cas se réalise, la force S à employer pour mouvoir le pilon devient plus grande que dans le premier. En effet, l'équation donnée plus haut, qui exprime dans le second cas $2R'$ en fonction de S et de P, peut se mettre sous la forme

$$S = \frac{P\cos\varphi}{\cos(\varphi + \varphi')} + \frac{2R'\sin\varphi\cos\varphi}{\cos(\varphi + \varphi')}.$$

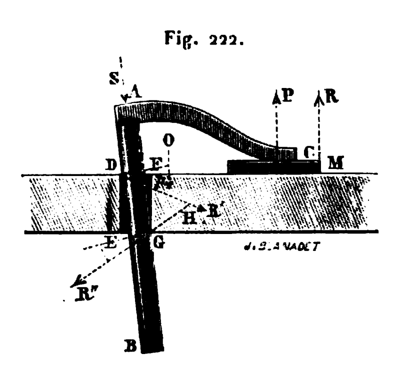
Or le premier terme du second membre est précisément la valeur de S relative au premier cas, et l'on a exprimé, comme condition du second cas, que R' est positif; il en est de même de son produit par $\frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\cos(\varphi + \varphi')}$, et par conséquent nous pouvons en conclure le fait énoncé.

176. *Valet de menuisier.* — Cet outil donne un exemple de l'emploi du frottement pour empêcher le glissement d'une pièce solide maintenue entre des guides. Il se compose d'une tige cylindrique en fer AB (*fig.* 222), faisant corps avec une patte recourbée AC, de même métal. La tige AB s'engage dans un trou DEFG de l'*établi* et l'extrémité C de la patte se pose sur un corps M que l'ouvrier veut assujettir, afin de le soumettre à une opération quelconque. On donne alors quelques coups de maillet sur la tête A du valet, afin de produire une pression suffisante sur le corps M; on peut ensuite abandonner le système à lui-même, sans que le valet cesse de serrer ce corps contre l'établi, quelle que soit l'intensité de la réaction P qu'il reçoit vers son extrémité C et qui tend à le

faire glisser sur les parois du trou, pourvu cependant que la patte soit suffisamment longue.

Supposons en effet que l'instrument, après avoir été enfoncé dans le trou, tende à remonter lorsqu'on l'abandonne à lui-même; on pourra toujours le maintenir dans la position qu'on lui avait primitivement donnée, en lui appliquant dans les environs de A une force descendante S, de grandeur convenablement choisie, moyennant quoi le mouvement ascendant ne se produirait plus, mais serait seulement sur le point de naître. L'équilibre existerait alors entre les forces P et S agissant en C et A, le poids p du valet appliqué en son centre de gravité O qu'on imagine lui être invariablement lié et les

Fig. 222.



réactions R', R'' des points d'appui D et G. Ces dernières forces font, avec les normales menées en D et G à la surface de la tige, des angles égaux à l'angle φ du frottement, et cet angle se compte en dessous de la normale, puisque le frottement s'oppose au mouvement ascendant du valet. Soit H le point de rencontre des lignes, connues *a priori*, suivant lesquelles agissent R' et R''. Supposons, d'un autre côté, qu'on ait eu soin, tout d'abord, pendant la mise en place du valet, de faire $P > p$, de manière que la résultante R de ces deux forces soit de même sens que P et placée plus loin vers la droite (n° 141). Cela posé, nous distinguerons deux cas :

1° Si le point H tombe dans l'intervalle compris entre S et R, il faudra, pour amener la résultante de ces deux forces à passer par H, donner à la force additionnelle S le sens ascen-

dant; cela sera une condition nécessaire de l'équilibre entre P, p, S, R′, R″, car la résultante des trois premières doit être directement opposée à celle des deux dernières, laquelle passe en H. On voit que dans ce cas le valet ne pourrait être mis sur le point de remonter que par l'introduction d'une nouvelle force agissant dans le sens de ce mouvement. Faute de cette force, il restera en équilibre stable.

2° Si le point H était plus éloigné du trou que la force R, il faudrait prendre une force additionnelle dans le sens indiqué par la figure pour amener la résultante de R et de S à passer en H. L'équilibre ne pourrait alors se maintenir qu'à la condition de continuer à exercer en A une pression suffisante dans le sens de la descente; l'instrument ne remplirait plus son but, et, par conséquent, il faut s'arranger, par un choix convenable des dimensions, de manière à rendre impossible la réalisation du second cas.

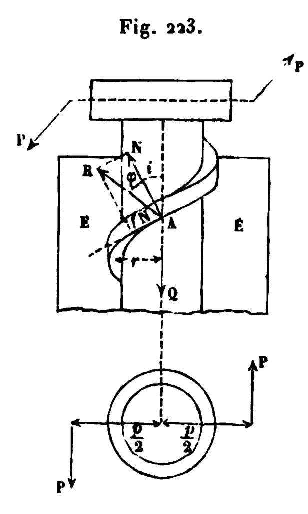
Lorsqu'on veut desserrer le valet, il faut lui appliquer une force ascendante, comme la force S du premier cas, mais dépassant un peu l'intensité nécessaire pour l'équilibre. Dans la pratique, on produit cette force en donnant un ou deux coups de maillet sur l'extrémité inférieure B du valet.

177. *Vis à filet carré.* — Nous considérons une vis à filet carré, mobile dans un écrou fixe et soumise, d'une part, à un couple agissant dans un plan perpendiculaire à l'axe, d'autre part, à une force agissant suivant l'axe lui-même. On peut faire diverses hypothèses tant sur le sens du mouvement de la vis que sur celui des forces; nous ne nous attacherons pas à les discuter toutes; ce qui suit suffira pour montrer la marche à adopter dans tous les cas.

Nous admettrons que la vis soit sur le point de se mouvoir dans le sens du couple et contrairement à l'action de la force; d'après la disposition de la *fig.* 223, ce mouvement, non encore produit, mais imminent, aurait le sens ascendant. L'équilibre existe entre le couple Pp, la force Q et une infinité de réactions élémentaires, exercées sur la vis en tous les points de la surface hélicoïdale gauche suivant laquelle elle touche son écrou EE. Le filet étant supposé avoir peu de saillie sur le noyau, on pourra regarder la réaction sur un élé-

ment de surface compris entre deux génératrices infiniment voisines comme s'exerçant au milieu de cet élément, c'est-à-dire sur l'hélice moyenne, dont nous nommerons le rayon r. Chacune de ces réactions élémentaires se composera d'une force normale N et d'une force tangentielle descendante fN, toutes deux situées dans le plan tangent au cylindre de rayon r, sur lequel est tracée l'hélice moyenne. Ces deux forces pourront se composer en une seule R, faisant avec la normale N un angle φ égal à celui du frottement, dont f désigne la tangente; tout le long de l'hélice moyenne on trouve réparties, suivant une loi quelconque, des forces analogues à N, fN, R. Si l'on nomme i l'angle de la tangente à l'hélice moyenne avec le plan d'une section droite, on voit que toutes les réactions R font avec l'axe un angle $i+\varphi$ et en sont séparées par la distance r. Alors, en égalant à zéro la somme des projections sur l'axe de toutes les forces appliquées à la vis et la somme de leurs moments par rapport à la même droite, on trouvera

Fig. 223.



$$Q = \cos(i+\varphi)\Sigma R, \quad Pp = r\sin(i+\varphi)\Sigma R,$$

d'où l'on tire, par l'élimination de ΣR,

$$(1) \qquad Pp = Qr\,\text{tang}(i+\varphi).$$

Si le frottement n'existait pas, φ serait nul, et la valeur de Pp répondant à une valeur donnée de Q serait Qr tang$i$; on voit que l'existence du frottement produit sur le moment du couple nécessaire pour faire sortir la vis du repos le même effet que l'addition de l'angle φ à l'inclinaison de la vis. Si les deux angles étaient assez grands pour que leur somme $i+\varphi$ atteignît 90°, Pp deviendrait infini; au delà, il y aurait impossibilité de produire le mouvement dans le sens supposé, car

Pp et Q désignent les grandeurs absolues d'un moment et d'une force de sens déterminés, et leur rapport ne pourrait être égal à la quantité négative $r\,\mathrm{tang}(i+\varphi)$. Pour pouvoir faire monter la vis, on serait obligé, dans ce cas, d'aider à l'action du couple Pp par une force Q ascendante, au lieu de lui donner à vaincre une résistance qui agirait dans le sens opposé.

Examinons maintenant le cas où, le couple et la force conservant les mêmes sens que précédemment, le mouvement de la vis serait sur le point de se produire en descendant. Alors le frottement fN change de sens et la force R fait l'angle φ au-dessus de N, au lieu de le faire en dessous. L'application des conditions d'équilibre conduit, en conséquence, aux équations ci-dessus, dans lesquelles on mettrait $-\varphi$ au lieu de φ; on trouve donc dans le cas actuel

$$\mathrm{P}p = \mathrm{Q}r\,\mathrm{tang}(i-\varphi),$$

soit

$$\mathrm{Q} = \frac{\mathrm{P}p}{r}\,\mathrm{tang}(90^\circ - i + \varphi).$$

Ici encore, on voit que l'angle φ s'ajoute à l'angle complémentaire de i quand il s'agit de calculer la force mouvante Q capable de surmonter la résistance produite par le couple Pp. Lorsque $i=\varphi$, Q devient infinie; on prouverait ensuite, par un raisonnement tout semblable à celui du premier cas, que pour $\varphi > i$ aucune force Q ne peut déterminer le mouvement de descente, à moins qu'on n'aide à son action par un couple tendant aussi à faire descendre la vis.

Si l'angle φ n'atteint pas 45°, ce qui a pratiquement toujours lieu pour des surfaces en bois ou en métal convenablement construites et entretenues, il est possible de prendre une inclinaison i comprise entre φ et $90^\circ-\varphi$, de manière à remplir simultanément les deux conditions

$$i > \varphi, \quad i < 90^\circ - \varphi;$$

alors le couple Pp pourra déterminer le mouvement ascendant de la vis sous l'action de la résistance, ou bien, si l'on veut, on pourra intervertir les rôles, en faisant de Q la puis-

sance produisant la descente de la vis sous l'action résistante du couple Pp. Si, au contraire, on prenait i tout à la fois inférieur à φ et à $90^\circ - \varphi$, le couple Pp serait bien susceptible de mouvoir la vis, malgré la résistance Q; mais, quand il aurait cessé d'agir, la force Q serait incapable de déterminer, à elle seule, un mouvement en sens contraire. Cette propriété est utilisée pour construire des vis de pression, qui ne se desserrent pas lorsqu'on les abandonne à elles-mêmes après avoir effectué le serrage.

Travail des forces appliquées à la vis, dans le cas du mouvement uniforme produit par le couple. — Nous supposons maintenant que la vis tourne et monte uniformément sous l'action du couple Pp, malgré la force résistante Q, et nous voulons trouver, comme nous l'avons fait au n° 171 pour le plan incliné, le rapport entre le travail moteur de Pp et le travail résistant utile Q, ces travaux devant répondre à un déplacement angulaire quelconque θ de la vis.

D'abord on peut établir que la relation (1), établie dans l'hypothèse d'un équilibre sur le point d'être rompu, subsiste encore dans celle du mouvement uniforme, à part cette différence que l'angle φ du frottement au départ sera remplacé par l'angle φ qui se rapporte au glissement effectif. En effet, si la vis tourne uniformément, un quelconque de ses points possède un mouvement uniforme et rectiligne en projection sur l'axe, et un mouvement circulaire également uniforme en projection sur le plan d'une section droite; il en résulte immédiatement (n° 104) que la force totale produisant son accélération est perpendiculaire à l'axe, et qu'elle le rencontre, puisqu'il faut (n° 105) que sa projection sur le plan de la section droite passe par le centre du cercle décrit par la projection du point. Dès lors, on peut toujours dire, aussi bien dans le cas du mouvement uniforme que dans celui du repos supposé en premier lieu, que toutes les forces agissant sur les divers points de la vis ont une somme de projections nulle sur l'axe et une somme de moments nulle par rapport à cet axe. Or, dans cette somme de projections ou de moments, les forces intérieures, deux à deux égales et opposées (n° 95), ne donnent que des termes qui se détruisent algébriquement; donc, on retrouve ainsi les mêmes équations entre les

forces extérieures, et notamment l'équation (1) ci-dessus mentionnée.

Si maintenant on fait tourner la vis d'un angle θ en lui appliquant le couple Pp, le travail T des deux forces P de ce couple sera $Pp\theta$ (nos 102 et 144); comme le point d'application de la force Q aura pris simultanément un déplacement égal à $r\theta \operatorname{tang} i$ suivant l'axe, le travail de Q sera égal, en valeur absolue, à $Qr\theta \operatorname{tang} i$. En désignant par T′ cette dernière quantité, on aura donc

$$T = Pp\theta = Qr\theta \operatorname{tang}(i + \varphi),$$
$$T' = Qr\theta \operatorname{tang} i$$

et, par suite,

$$\frac{T}{T'} = \frac{\operatorname{tang}(i+\varphi)}{\operatorname{tang} i}.$$

Les angles i et $i + \varphi$ étant nécessairement aigus, on voit par là que T surpasse T′. Il est aisé de reconnaître, en outre, que la différence $T - T'$ représente en valeur absolue la somme $-T''$ des travaux négatifs effectués par les forces de frottement. En effet, chaque point ayant un mouvement uniforme sur l'hélice qu'il décrit, le travail de la force résultante qui le sollicite est nul (n° 109); donc la somme des travaux de toutes les forces agissant sur les divers points de la vis est aussi nulle. Or dans un solide les forces intérieures produisent un travail total nul (n° 128), parce que les distances des points ne varient pas; d'un autre côté, les forces N ne font pas de travail, parce qu'elles agissent dans des directions perpendiculaires aux déplacements respectifs de leurs points d'application. Il faut donc égaler à zéro la somme algébrique des travaux dus aux autres forces extérieures, ce qui donne

$$T - T' - T'' = 0 \quad \text{ou} \quad T'' = T - T';$$

on pourrait, d'ailleurs, vérifier directement cette relation en y remplaçant T et T′ par leurs valeurs déjà connues, et T″ par

$$\sin\varphi \Sigma R \frac{r\theta}{\cos i} \quad \text{ou} \quad \frac{Qr\theta \sin\varphi}{\cos i \cos(i+\varphi)}.$$

Le rapport $\frac{T}{T'}$ deviendrait infini pour $i = 0$ et $i = 90° - \varphi$;

on peut se demander quelle est, dans l'intervalle de ces deux limites, la valeur de i qui le rendra minimum; avec cette valeur de i, la vis jouirait de la propriété de consommer le moins de travail moteur possible, pour un travail utile donné, en supposant, bien entendu, qu'on l'emploie dans les conditions où nous nous sommes placé, c'est-à-dire en la faisant tourner au moyen du couple Pp, perpendiculaire à son axe, sous l'action de la résistance longitudinale Q. Il s'agit donc de trouver le minimum de la fonction

$$y = \frac{\operatorname{tang}(i+\varphi)}{\operatorname{tang} i},$$

lorsque i varie de 0 à $90^\circ - \varphi$. Pour cela, posons

$$\operatorname{tang} i = x, \quad \operatorname{tang}\varphi = f;$$

on aura

$$y = \frac{x+f}{x(1-fx)}.$$

La condition de minimum s'obtient en égalant à zéro la dérivée $\frac{dy}{dx}$, ce qui donne

$$x(1-fx) - (x+f)(1-2fx) = 0,$$

ou, toute réduction et simplification faites,

$$x^2 + 2fx - 1 = 0.$$

De là résulte

$$x = -f + \sqrt{1+f^2}.$$

Désignons maintenant par φ' le complément $90^\circ - \varphi$ de l'angle du frottement; on aura

$$f = \operatorname{tang}\varphi = \frac{\cos\varphi'}{\sin\varphi'}, \quad \sqrt{1+f^2} = \sqrt{1+\frac{\cos^2\varphi'}{\sin^2\varphi'}} = \frac{1}{\sin\varphi'},$$

et, par suite,

$$x = \operatorname{tang} i = \frac{1-\cos\varphi'}{\sin\varphi'} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi'}{2\sin\frac{1}{2}\varphi'\cos\frac{1}{2}\varphi'} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi'.$$

Il en résulte que la valeur cherchée de i, donnant le minimum du rapport $\frac{T}{T'}$, est égale à $\frac{1}{2}\varphi'$, c'est-à-dire à la moitié de l'angle complémentaire de celui du frottement.

On a, d'ailleurs, en appelant y_1 ce rapport minimum,

$$y_1 = \frac{\operatorname{tang}\left[\frac{1}{2}(90^\circ - \varphi) + \varphi\right]}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(90^\circ - \varphi)}$$

$$= \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(90^\circ + \varphi)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(90^\circ - \varphi)} = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}(90^\circ + \varphi).$$

Le tableau suivant donne une idée de la manière dont y_1 varie avec φ.

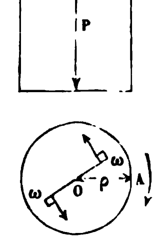
φ.	y_1.
0°	1,0000
10°	1,4203
20°	2,0396
30°	3,0000
40°	4,5989

On voit par là combien il importe, pour l'économie du travail moteur, de réduire autant que l'on peut, par la bonne exécution de la vis et un graissage convenable, la valeur de l'angle du frottement.

178. *Pivots et épaulements.* — Lorsqu'un arbre est assujetti à tourner autour d'un axe vertical, il se termine par un pivot s'appuyant sur une crapaudine; la surface d'appui est un cercle ayant son centre sur l'axe. Soient $\rho = \overline{OA}$ (*fig.* 224) le rayon de ce cercle, P la pression totale exercée sur lui, suivant la direction de l'axe de rotation. Il serait très difficile de déterminer la loi réelle suivant laquelle la pression P se partage entre tous les éléments ω de la surface d'appui $\pi\rho^2$; comme le frottement dont nous voulons nous rendre compte ici n'a pas, en général, beaucoup d'importance et qu'il suffit

de s'en faire une idée approximative, nous admettrons l'uniformité de la répartition. Cela signifie que chaque élément ω supporte une pression $\frac{P\omega}{\pi\rho^2}$ proportionnelle à son aire, ce qui conduit bien à une résultante totale ayant P pour intensité et passant en O. Quand le mouvement de rotation existera ou sera sur le point de naître dans le sens de la flèche, il se produira sur l'élément ω un frottement proportionnel à la pression $\frac{P\omega}{\pi\rho^2}$, soit $\frac{fP\omega}{\pi\rho^2}$, en désignant par f le coefficient de frottement. Cette force aura une direction perpendiculaire au rayon $O\omega$ et sera opposée au déplacement que ω prend ou tend à prendre en vertu de la rotation. Il s'agit maintenant de composer entre eux tous ces frottements élémentaires et de les remplacer par un système plus simple.

Fig. 224.



On remarquera d'abord que l'élément superficiel diamétralement opposé à ω supporte un frottement de même intensité que celui de ω, mais dirigé en sens contraire; ces deux frottements constituent donc un couple, et, comme le système total peut être décomposé de même, il en résulte qu'il est formé par la réunion de couples tous contenus dans le plan d'appui, et qu'il se réduit à un couple résultant contenu aussi dans le même plan. Le moment de ce couple, ou la somme des moments de ses deux forces par rapport à une perpendiculaire quelconque à son plan, est égal à la somme des moments des forces élémentaires relativement au même axe; on peut choisir pour cet axe l'axe de rotation O, qui rend le calcul plus commode. Considérons tous les éléments superficiels ω compris entre deux circonférences décrites du centre commun O avec les rayons r et $r + dr$; la somme des moments des frottements sur cette bande annulaire sera

$$\frac{fPr}{\pi\rho^2}\Sigma\omega \text{ ou } \frac{2fPr^2dr}{\rho^2},$$

attendu que $\Sigma\omega = 2\pi r dr$. Intégrant cette expression entre

les limites o et ρ, on obtiendra pour le moment total

$$\frac{2fP}{\rho^2}\int_0^\rho r^2 dr = \frac{2}{3} fP\rho.$$

Le couple résultant équivaut donc à un couple formé avec deux forces de sens contraires ayant fP pour intensité commune et agissant sur un bras de levier $\frac{2}{3}\rho$.

Un calcul tout semblable s'applique au cas où un arbre serait pressé contre un épaulement par une force totale P agissant suivant l'axe. La seule différence consiste en ce que la surface d'appui n'est plus un cercle, mais une bande annulaire comprise entre un cercle extérieur de rayon ρ et un cercle concentrique intérieur de rayon ρ', le centre commun étant toujours sur l'axe de rotation. Par suite, cette surface a pour expression $\pi(\rho^2 - \rho'^2)$, et dans le calcul de la somme des moments l'intégrale définie doit se prendre entre ρ' et ρ; on trouve ainsi pour le moment du couple résultant

$$\frac{2fP}{\rho^2 - \rho'^2}\int_{\rho'}^{\rho} r^2 dr = \frac{2fP(\rho^3 - \rho'^3)}{3(\rho^2 - \rho'^2)} = \frac{2fP(\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2)}{3(\rho + \rho')}.$$

Si l'on appelle ρ_1 le rayon moyen $\frac{1}{2}(\rho + \rho')$ de la bande et l sa largeur $\rho - \rho'$, on posera en conséquence

$$\rho = \rho_1 + \frac{1}{2} l, \quad \rho' = \rho_1 - \frac{1}{2} l,$$

et la valeur ci-dessus donnée du moment résultant deviendra

$$fP\left(\rho_1 + \frac{l^2}{12\rho_1}\right).$$

Le moment total des forces de frottement étant connu, on en déduit leur travail pendant une rotation d'étendue quelconque autour de l'axe O. Si θ désigne l'angle décrit, ce travail sera en valeur absolue

$\frac{2}{3} fP\rho\theta$ dans le cas d'un pivot,

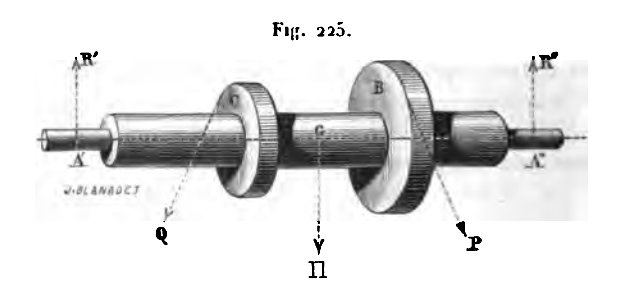
$fP\theta\left(\rho_1 + \frac{l^2}{12\rho_1}\right)$ dans le cas d'un épaulement.

Dans tous les cas, ce sera un travail négatif, puisqu'il est produit par des forces qui agissent en sens contraire du déplacement de leurs points d'application. Pour un tour entier on ferait $\theta = 2\pi$.

On doit, afin de diminuer le moment et le travail du frottement, prendre aussi petites que possible les dimensions ρ et ρ'; mais il ne faut pas pousser la diminution trop loin, car, si l'on soumettait la surface d'appui à une trop grande pression par unité superficielle, les matériaux pourraient se rompre, ou tout au moins il pourrait y avoir expulsion des enduits, altération du poli des surfaces, et par suite augmentation du moment résistant qu'on avait l'intention de diminuer.

179. *Treuil horizontal soumis à des forces perpendiculaires à son axe.* — Le treuil consiste en un arbre horizontal terminé par des tourillons qui reposent sur des coussinets fixes; cet arbre porte une poulie B (*fig.* 225), tangentiellement à

Fig. 225.



laquelle s'exerce la puissance P, dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation; de même, la résistance Q, également perpendiculaire à l'axe, est appliquée tangentiellement à une autre poulie C, qui est remplacée souvent par la surface cylindrique limitant le corps de l'arbre. En outre, le treuil supporte son poids propre Π, que nous considérons comme appliqué au centre de gravité G, en un point de l'axe. Enfin il éprouve, de la part des coussinets, des réactions que nous concevons remplacées par deux forces R', R''.

Si le mouvement de rotation autour de l'axe est seulement sur le point de naître, dans le sens où agit la puissance P, il

y a repos, et par conséquent toutes les forces extérieures qu'on vient d'énumérer doivent satisfaire aux conditions d'équilibre des solides (n° 133). La même chose est-elle encore vraie dans l'hypothèse d'une rotation uniforme? C'est une question que nous ne traiterons pas à fond quant à présent, parce qu'elle rentre dans le cadre du cours de seconde année; mais nous répondrons affirmativement, en supposant que le treuil soit un solide de révolution, non seulement au point de vue de sa forme géométrique, mais aussi pour ce qui concerne la distribution des masses. En effet, un point matériel quelconque du treuil, ayant une masse m et situé à la distance ρ de l'axe, possède une vitesse constante v sur la circonférence qu'il décrit; les forces qui le sollicitent doivent donc se réduire à une force centripète $\frac{mv^2}{\rho}$ (n° 105). Le point diamétralement opposé à celui-là est sollicité par la même force, agissant en sens contraire suivant la même ligne. Donc toutes les forces, tant intérieures qu'extérieures, qui agissent sur l'ensemble des points du treuil, peuvent se ramener ainsi à des groupes de deux forces égales et directement opposées; donc elles se font équilibre, d'où il résulte que les forces extérieures, considérées séparément, satisfont aux conditions de cet équilibre, puisque les forces intérieures ont toujours des sommes de projections et de moments identiquement nulles.

Dans l'état de mouvement parvenu à l'uniformité ou de mouvement non encore produit, mais imminent, nous pouvons donc égaler à zéro la somme des moments des forces extérieures par rapport à l'axe du treuil. Désignons par

p et q les rayons des poulies sur lesquelles agissent P et Q;
r', r'' les rayons des tourillons;
f le coefficient du frottement des tourillons sur les coussinets, ou la tangente de l'angle du frottement;
$f_1 = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$ le sinus du même angle.

Si le frottement n'existait pas, l'équation des moments se réduirait à

$$Pp = Qq,$$

car les réactions R′ et R″, normales aux surfaces des tourillons, rencontreraient l'axe. Mais en réalité chacune des forces R′, R″ se compose d'une force normale ayant un moment nul, et d'une force tangentielle égale à f_1R′ ou à f_1R″ (n° 167), dont le moment est opposé à la rotation et a une valeur différente de zéro. En en tenant compte, l'équation précédente devient

$$(1) \qquad \mathrm{P}p = \mathrm{Q}q + f_1 \mathrm{R}' r' + f_1 \mathrm{R}'' r'';$$

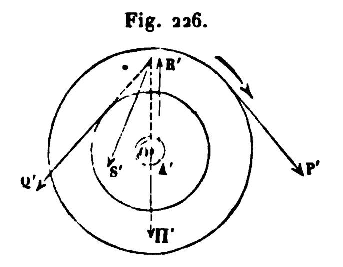
c'est la relation entre la puissance et la résistance, mais elle renferme aussi les inconnues auxiliaires R′, R″, dont il faut maintenant se débarrasser.

Pour cela nous supposerons d'abord que, vu la petite longueur des tourillons, les réactions R′, R″ puissent être considérées comme agissant en des points A′, A″ situés à égale distance des sections extrêmes qui limitent la partie appuyée de chaque tourillon. Par ces points A′, A″ nous mènerons deux plans perpendiculaires à l'axe, puis nous remplacerons chacune des trois forces P, Q, Π par deux composantes parallèles et de même sens, contenues dans ces plans, et satisfaisant aux conditions d'équivalence indiquées au n° 140; de cette manière la force P, par exemple, sera remplacée par deux composantes P′, P″ ayant avec P des rapports connus; la même chose aura lieu pour Q et Π, auxquelles on substituera des composantes Q′, Q″, Π′, Π″ égales à des fractions connues de Q ou de Π. Cela fait, toutes les forces extérieures appliquées au treuil se trouvent ramenées à deux groupes de forces contenus dans les deux plans perpendiculaires à l'axe, menés par A′ et A″. Nous allons prouver que l'équilibre entre toutes ces forces ne pourrait se produire, si dans chacun des deux plans la résultante de translation des forces qu'il contient n'était pas nulle. En effet, si la résultante de translation n'était pas nulle dans l'un des deux plans, les forces de ce plan ne se réduiraient pas à un couple et auraient par conséquent une résultante unique (n° 143); cette résultante ne pourrait faire équilibre aux forces de l'autre plan, ni dans le cas où elles auraient aussi une résultante, parce qu'elle ne serait pas directement opposée à la première, ni dans le cas où elles se réduiraient à un couple, parce qu'un couple ne peut

faire équilibre à une force. Au contraire, l'équilibre est possible entre deux couples situés dans ces deux plans parallèles.

Ce point étant établi, représentons les forces contenues dans l'un des deux plans, celui de A' par exemple. Le cercle O'A' (*fig.* 226) est la coupe du tourillon, qui se meut, avec un certain jeu, à l'intérieur d'un coussinet de rayon tant soit peu plus grand, et tourne dans le sens de la flèche. Les forces P' et Q' agissent tangentiellement à des cercles de rayons connus, ayant O' pour centre; Π' agit en O'. La résistance à vaincre Q étant supposée une donnée immédiate, on connaît Π' et Q', et l'on peut composer ces forces en une seule S', qui sera également connue. Puisque la résultante de translation de toutes les forces comprises dans ce plan doit être nulle, la réaction R' supportée par le tourillon en son point de contact A' avec le coussinet sera égale et contraire à la résultante de S' et de P'; donc

Fig. 226.



$$(2) \qquad R' = \sqrt{S'^2 + P'^2 + 2P'S'\cos(P', S')}.$$

On aurait de même, en considérant les forces dans le plan parallèle mené par A'', et désignant par S'' la résultante des forces connues Π'', Q'',

$$(3) \qquad R'' = \sqrt{S''^2 + P''^2 + 2P''S''\cos(P'', S'')}.$$

Les composantes P' et P'' sont avec leur résultante P dans des rapports connus, dépendant uniquement de la situation occupée par la poulie B entre les points A', A''; les autres quantités qui entrent dans les expressions de R', R'' sont toutes connues, et l'on voit par conséquent que R' et R'' sont des fonctions données de la variable P. En les substituant dans l'équation d'équilibre (1), on aura la relation entre P et Q, au moyen de laquelle on déterminera la valeur de P correspondant à chaque valeur de Q.

Quand cela sera fait, on pourra se rendre compte des travaux effectués par la puissance P et la résistance Q pendant un déplacement angulaire θ; ces travaux auraient pour valeurs $Pp\theta$ et $Qq\theta$ (n° 102), et leur différence $(Pp - Qq)\theta$ représenterait le travail $f_1\theta(R'r' + R''r'')$ des frottements exercés sur les tourillons, comme on le voit par l'équation (1) et comme on le prouverait directement, au besoin, par un raisonnement tout semblable à celui qu'on a donné à l'occasion de la vis (n° 177).

L'équation qui détermine P contient l'inconnue engagée sous deux radicaux du second degré; il faudrait deux élévations successives au carré pour les faire disparaître, et l'on obtiendrait alors une équation du quatrième degré. Pratiquement on évite cette complication par l'emploi du procédé des approximations successives. Les frottements ne devant avoir qu'une influence assez restreinte dans un treuil bien établi, à cause de la petitesse du coefficient f_1 et des rayons r', r'', on commence par le négliger; l'équation d'équilibre devient alors $Pp = Qq$ et donne, comme première approximation,

$$P = \frac{Qq}{p}.$$

Au moyen de cette valeur approchée on calcule R' et R'' en se servant des équations (2) et (3), et l'on prend comme valeur plus exacte

$$P = \frac{1}{p}(Qq + f_1R'r' + f_1R''r'');$$

cette nouvelle valeur de P conduirait à son tour à d'autres valeurs plus exactes de R' et R'', que l'on substituerait dans la formule précédente pour s'approcher encore plus de P, et ainsi de suite. On s'arrêterait quand il y aurait une différence suffisamment petite entre les résultats de deux essais consécutifs.

Dans le cas particulier où les forces P et Q sont verticales, les calculs se simplifient, car on a

$$R' = P' + Q' + \Pi', \quad R'' = P'' + Q'' + \Pi',$$

et l'équation à résoudre s'abaisse au premier degré. Si l'on

admettait en outre que les rayons r', r'' des tourillons sont égaux, cette équation deviendrait, en nommant r leur valeur commune,

$$Pp = Qq + f_1 r(R' + R'')$$

ou encore

$$Pp = Qq + f_1 r(P + Q + \Pi),$$

attendu qu'on a

$$P = P' + P'', \quad Q = Q' + Q'', \quad \Pi = \Pi' + \Pi''.$$

De là on déduirait enfin

$$P = \frac{Q(q + f_1 r) + \Pi f_1 r}{p - f_1 r}.$$

Poncelet a indiqué un procédé approximatif pour abaisser au premier degré, dans tous les cas, l'équation à résoudre. Il remarque d'abord que R' et R'' peuvent se mettre sous la forme $\sqrt{X^2 + Y^2}$, en désignant par X et Y des quantités positives; à cet effet, s'il s'agit de R' par exemple, on projette sur deux axes rectangulaires contenus dans le plan A' les forces qui doivent donner la résultante R' et l'on prend pour X et Y les valeurs absolues des deux projections; on fait la même chose pour R''. Poncelet montre ensuite que, si l'on choisit convenablement deux coefficients a et b, on pourra, sans erreur notable, admettre l'égalité

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = aX + bY.$$

Voici comment il détermine a et b.

L'erreur relative commise quand on remplace le radical par $aX + bY$ est égale à

$$1 - \frac{aX + bY}{\sqrt{X^2 + Y^2}};$$

elle ne dépend que du rapport $\frac{Y}{X}$, et, en désignant ce rapport par $\tang\gamma$, elle se met sous la forme

$$1 - a\cos\gamma - b\sin\gamma$$

ou encore

$$1 - x\cos(\gamma - \gamma_1)$$

si l'on pose $x = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tang}\gamma_1 = \frac{b}{a}$. Supposons maintenant que, sans connaître le rapport $\frac{Y}{X}$, on puisse affirmer qu'il satisfait à l'inégalité

$$\frac{Y}{X} < \operatorname{tang}\theta,$$

θ désignant un angle déterminé, compris dans l'intervalle de 0 à 90°; alors Poncelet adopte les valeurs

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}\theta, \quad x = \frac{2}{1 + \cos\frac{1}{2}\theta};$$

d'où l'on tire

$$a = x\cos\gamma_1 = \frac{2\cos\frac{1}{2}\theta}{1 + \cos\frac{1}{2}\theta} = 1 - \operatorname{tang}^2\frac{1}{4}\theta,$$

$$b = x\sin\gamma_1 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\theta}{1 + \cos\frac{1}{2}\theta} = 2\operatorname{tang}\frac{1}{4}\theta.$$

Avec ces valeurs de a et de b, l'erreur relative s'exprime par

$$1 - \frac{2}{1 + \cos\frac{1}{2}\theta}\cos\left(\gamma - \frac{1}{2}\theta\right);$$

lorsque γ varie de 0 à $\frac{1}{2}\theta$, elle est d'abord égale à $\operatorname{tang}^2\frac{1}{4}\theta$, puis décroît jusqu'à 0, devient ensuite égale à $-\operatorname{tang}^2\frac{1}{4}\theta$; elle repasse par les mêmes valeurs entre $\gamma = \frac{1}{2}\theta$ et $\gamma = \theta$. On voit donc que son maximum en valeur absolue est $\operatorname{tang}^2\frac{1}{4}\theta$.

On pourrait démontrer (mais nous nous abstiendrons de le faire) que les valeurs de a et b, adoptées par Poncelet, sont celles qui réduisent à son minimum la limite supérieure de l'erreur relative prise en valeur absolue. Nous nous bornons à indiquer quelques résultats numériques dans le Tableau ci-après :

ANGLE θ.	TANG θ.	COEFFICIENTS a.	COEFFICIENTS b.	LIMITE SUPÉRIEURE de l'erreur relative $= \tang^4 \frac{1}{4}\theta$.
0°......	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000
15.......	0,2679	0,9957	0,1311	0,0043
30.........	0,5774	0,9827	0,2633	0,0173
45........	1,0000	0,9604	0,3960	0,0396
60.........	1,7321	0,9282	0,5359	0,0718
75........	3,7321	0,8848	0,6789	0,1152
90........	∞	0,8284	0,8284	0,1716

Ce Tableau montre que l'approximation devient satisfaisante dès que l'angle θ ne dépasse pas 45°, ou en d'autres termes dès qu'on peut savoir quel est le plus grand des deux carrés dont la somme est sous le radical. En prenant alors 0,96 de la plus grande racine et ajoutant 0,40 de la plus petite, on commet sur le radical une erreur proportionnelle limitée à $\frac{1}{25}$, approximation bien suffisante dans les questions relatives au frottement, car on ne peut pas répondre que les valeurs du coefficient f soient connues avec le même degré d'exactitude.

180. *Treuil soumis à des forces quelconques.* — Les forces appliquées à un treuil peuvent toujours, quelles qu'elles soient, se remplacer chacune par deux composantes, l'une contenue dans un plan perpendiculaire à l'axe, l'autre normale à ce plan. La seconde composante ayant une direction constante, on pourra composer toutes ces forces parallèles en une seule T, puis remplacer cette résultante par une force égale et parallèle T agissant suivant l'axe et par un couple (T, —T); il suffit pour cela d'appliquer suivant l'axe deux forces T égales et contraires (n° 145). Le couple sera ensuite tourné dans son plan (n° 144) de manière à rendre ses forces perpendiculaires à l'axe; on aura ainsi remplacé les forces primitives par une force qui agit suivant l'axe et par une série

de forces perpendiculaires, qui sont dans les mêmes conditions que les forces P, Q, Π considérées au n° 179. Alors s'il y a mouvement sur le point de se produire ou mouvement effectif et uniforme, l'équilibre existe entre les réactions des appuis et les forces directement appliquées, transformées comme on vient de le dire. Il faudra d'abord qu'une crapaudine ou un épaulement, suivant les cas, donne une réaction égale et contraire à T, d'où naîtra un couple de frottement, dont on sait évaluer le moment M (n° 178). La force T suivant l'axe étant ainsi équilibrée par une réaction égale et contraire, on peut considérer le treuil comme n'étant plus soumis qu'aux forces perpendiculaires et au couple M; ce couple, contenu aussi dans un plan perpendiculaire à l'axe, ne change rien aux raisonnements faits plus haut (n° 179) et à la méthode suivie pour déterminer les réactions R', R'' des coussinets, mais il doit entrer dans l'équation d'équilibre exprimant que le moment total des forces est nul relativement à l'axe du treuil. Si l'on désigne par N celui des forces directement appliquées, évalué dans le sens de la rotation effective ou imminente, cette équation sera

$$N = M + f_1 R' r' + f_1 R'' r''.$$

181. *Articulations cylindriques.* — Quand deux surfaces solides restent toujours en contact, la somme algébrique des travaux de leurs actions mutuelles se réduit à celle des travaux effectués par les forces de frottement (n° 168), et dans le calcul de cette dernière on peut n'avoir égard qu'au mouvement relatif des deux corps, puisque le glissement dépend de lui seul et non du mouvement absolu de chaque corps en particulier. On peut donc imaginer que l'un des deux corps soit en repos, pendant que l'autre aura le mouvement relatif, sans rien changer à la valeur des arcs élémentaires de glissement qu'on a besoin d'évaluer.

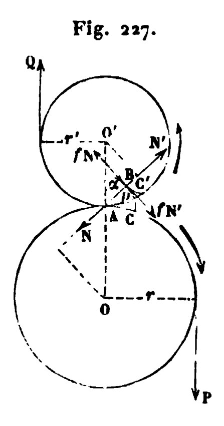
Supposons maintenant une articulation cylindrique de rayon r et une pression N entre les deux pièces qui la composent. Le frottement correspondant sera le produit fN de cette force par le coefficient de frottement; si l'une des pièces tourne relativement à l'autre d'un angle $d\alpha$, le glissement

élémentaire sera $r d\alpha$ et le travail du frottement sur l'ensemble des deux corps aura pour valeur $-f\mathrm{N}r d\alpha$ (n° **168**), ce qui donnerait, pour un tour entier, le travail $-fr\int_0^{2\pi}\mathrm{N}d\alpha$.

Ce calcul est applicable aux charnières ayant leur axe fixe, comme aux articulations entre bielle et manivelle ou entre un excentrique et sa barre. La présence du facteur r montre pourquoi l'excentrique est désavantageux, au point de vue de l'économie du travail des forces.

182. *Engrenages cylindriques.* — Considérons deux roues d'engrenage O et O′ (*fig.* 227) qui tournent dans les sens indiqués par les flèches, c'est-à-dire de manière que les dents se touchent au delà de la ligne des centres; la première est soumise à une puissance P, la seconde à une résistance Q. Si l'on suppose le mouvement sur le point de naître ou établi avec une vitesse constante, on prouvera, comme dans le cas du treuil (n° 179), que les forces appliquées à chaque roue se font équilibre. Ces forces sont, pour la roue O : la puissance P, les réactions de ses coussinets et la réaction exercée par la roue O′ en B, point de contact des dents; cette dernière force peut se décomposer en une force normale N et une force tangentielle ou frottement fN, agissant en sens contraire du glissement de la dent CB sur la dent C′B, lequel est dû à une rotation autour de A dans le même sens que celle de la roue O. Pour la roue O′ nous aurions de même la résistance Q, les réactions de ses coussinets et deux forces N′, fN′ égales et directement opposées à N et fN, en vertu du principe général énoncé au n° 95. Les composantes normales N, N′ doivent passer par le point de contact A des circonférences primitives (n° 45).

Fig. 227.



Nous allons maintenant égaler à zéro la somme des moments des forces agissant sur chaque roue, relativement à son

axe de rotation. Mais, avant d'entrer dans le calcul algébrique, il est bon de faire encore deux observations :

1° Comme la puissance ne doit figurer dans l'équation d'équilibre de la première roue que par son moment relativement à l'axe O, on peut la remplacer par une force P ayant un moment égal et appliquée tangentiellement à la circonférence primitive de cette roue; de même, par une raison toute semblable, on remplacera la résistance par une force Q agissant suivant une tangente à la circonférence primitive de O'.

2° Dans l'évaluation des moments nous ne tiendrons pas compte des frottements sur les coussinets et supposerons par conséquent nuls les moments des réactions de ces coussinets, parce que nous ne voulons étudier ici que l'accroissement de la puissance P et de son travail, pour une valeur donnée de la résistance Q, par l'effet spécial du frottement de l'engrenage. A la vérité, les frottements des coussinets exigeraient encore une autre augmentation de P, et celle-ci aurait aussi une certaine influence sur le frottement que nous nous proposons de calculer. Mais nous pourrons tout au moins considérer le résultat de notre calcul comme une première approximation, si, comme d'habitude, les frottements modifient peu la puissance capable d'équilibrer une résistance donnée.

Désignons maintenant par

r, r' les rayons des deux circonférences primitives;

p la longueur de la normale commune abaissée du point de contact A de ces circonférences sur les profils des dents;

α l'angle de cette normale avec la ligne des centres;

a le pas de l'engrenage (n° 49, f);

n, n' les nombres respectifs des dents sur chacune des roues O, O'.

Alors on aura l'équation des moments, relativement à O, des forces de la première roue :

$$Pr = Nr\sin\alpha + fN(r\cos\alpha + p),$$

car les réactions des coussinets, supposées réduites à leurs composantes normales, donnent un moment nul. De même, en

prenant par rapport à O′ le moment des forces de la seconde roue, on trouvera

$$Q r' = N' r' \sin\alpha + f N'(r' \cos\alpha - p).$$

On déduit de ces équations, par une division membre à membre, après avoir divisé la première par r et la seconde par r', eu égard d'ailleurs à l'égalité $N = N'$,

$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin\alpha + f\cos\alpha + \frac{fp}{r}}{\sin\alpha + f\cos\alpha - \frac{fp}{r'}} = 1 + \frac{fp\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)}{\sin\alpha + f\cos\alpha - \frac{fp}{r'}}.$$

Si le frottement des dents n'existait pas, la dernière équation prouve qu'on équilibrerait la résistance Q appliquée sur la circonférence O′, par une puissance égale $P = Q$ appliquée sur la circonférence O, puisqu'alors on aurait $\frac{P}{Q} = 1$; mais, f ayant une valeur différente de zéro, l'équation donne $\frac{P}{Q} > 1$, et par conséquent il faut, outre la force Q, appliquer à la circonférence O un certain excédent $P - Q$ destiné à compenser le frottement. Cet excédent a pour valeur, d'après la même équation,

$$P - Q = \frac{fQp\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)}{\sin\alpha + f\cos\alpha - \frac{fp}{r'}}.$$

Le rapport $\frac{P}{Q}$ et la différence $P - Q$ peuvent s'exprimer plus simplement, en se contentant d'une approximation très admissible dans les cas ordinaires de la pratique. L'angle α est habituellement assez voisin de 90° et $\frac{p}{r'}$ est, ainsi que f, une petite fraction; on ne commet donc qu'une petite erreur si l'on prend

$$\sin\alpha = 1, \quad f\cos\alpha - \frac{fp}{r'} = 0,$$

et par suite

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{P}{Q} = 1 + fp\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'}\right), \\ P - Q = fQp\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'}\right). \end{cases}$$

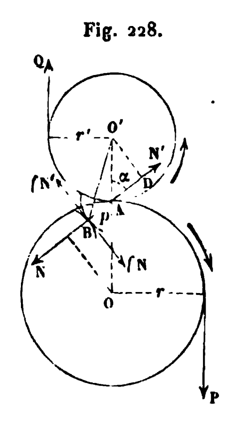
La *fig.* 228 représente le cas où le contact des dents précède la ligne des centres. Si l'on recommence dans ce cas un calcul semblable au précédent, on trouvera de la même manière

$$\frac{P}{Q} = 1 + \frac{fp\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'}\right)}{\sin\alpha - f\cos\alpha - \dfrac{fp}{r'}},$$

$$P - Q = \frac{fQp\left(\dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{r'}\right)}{\sin\alpha - f\cos\alpha - \dfrac{fp}{r'}}.$$

En admettant encore que l'angle α soit toujours voisin de 90° et qu'on puisse négliger sans trop d'erreur les termes $f\cos\alpha$, $\dfrac{fp}{r'}$, on retrouve pour $\dfrac{P}{Q}$ et $P - Q$ les mêmes valeurs simplifiées que dans le premier cas. Ainsi donc, lorsque les dents sont courtes, convenablement construites et graissées, et qu'enfin on évite les valeurs de α trop inférieures à l'angle droit, il n'y a pas d'avantage notable à ce que le contact se fasse plutôt après qu'avant la ligne des centres, quoique la première alternative soit cependant préférable en toute rigueur, comme on le voit sans peine par la comparaison des deux valeurs de P.

Fig. 228.



Abaissons de O′ la perpendiculaire O′D sur la normale commune BN′; dans le triangle O′BD, nous aurons

$$\overline{O'D} = r'\sin\alpha, \quad \overline{BD} = p + r'\cos\alpha, \quad \operatorname{tang} O'BD = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \dfrac{p}{r'}}.$$

Si l'on suppose l'angle φ du frottement égal à O'BD, c'est-à-dire

$$f = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + \frac{p}{r'}},$$

alors l'action totale R exercée par la dent de la roue O sur la dent de O' actuellement en prise, action qui fait avec BN' l'angle φ, passera par le centre O' et ne pourra mouvoir la seconde roue, qu'elle pressera seulement sur ses appuis. Il en serait de même si f dépassait la limite qu'on vient d'indiquer, car dans ce cas R passerait à gauche de O' et son moment agirait contrairement au mouvement supposé ; ce mouvement ne pourrait avoir lieu qu'en remplaçant la résistance Q par une force en sens contraire, et il resterait encore impossible en annulant toute résistance. On dit alors qu'il se produit un *arc-boutement.*

L'examen de la *fig.* 227 montre que le même fait ne peut guère se réaliser quand le contact est au delà de la ligne des centres; à moins d'admettre des valeurs tout à fait inusitées pour α, f et p, l'action totale de la roue O sur la roue O' aura bien un moment opposé à celui de la résistance Q.

L'arc-boutement peut se produire par suite d'un vice de construction, lorsque l'angle d'une dent s'engage dans quelque petite cavité que présenterait la surface de la dent conjuguée. On comprend d'ailleurs sans peine que ces défauts soient capables d'arrêter le mouvement dans un sens et ne l'arrêtent pas dans l'autre, et ici encore on peut voir que les chances d'arrêt sont plus grandes avant la ligne des centres qu'au delà. Dans le premier cas, en effet, les dents d'une roue pénètrent de plus en plus à l'intérieur des creux correspondants de l'autre; si alors une de leurs arêtes touche la dent conjuguée, elle produira un effet analogue à celui d'un outil taillé en biseau, qu'on voudrait faire mouvoir sur une surface, en y posant le biseau et le poussant en avant. On sait que le glissement est difficile de cette manière, parce que le biseau tranchant peut entamer la surface sur laquelle on l'appuie; mais il n'y aurait aucune difficulté à produire ce glissement en sens inverse, et c'est justement la condition dans laquelle

on se trouve après le passage de la ligne des centres, parce que les dents se retirent des creux, au lieu d'y pénétrer.

Calcul du travail des forces. — Lorsqu'on suppose un déplacement élémentaire ds sur chacune des circonférences primitives, la puissance P et la résistance Q font des travaux $P\,ds$, $-Q\,ds$, et il est aisé de constater que la somme algébrique $(P - Q)ds$ de ces travaux égale précisément le travail du frottement, pris en valeur absolue. En effet, les équations d'équilibre donnent, eu égard à l'égalité de N avec N',

$$P - Q = fNp\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$

et par suite

$$(P - Q)ds = fN.p\,ds\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

Or $p\,ds\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$ est l'expression du glissement élémentaire des dents l'une sur l'autre (nº 47); donc le second membre est bien le travail élémentaire des frottements, conformément à ce qu'on a vu au nº 168.

On aurait pu également établir cette propriété *a priori*, par un raisonnement semblable à celui qu'on a indiqué au nº 177, à l'occasion de la vis.

Le rapport $\frac{P\,ds}{Q\,ds}$ ou $\frac{P}{Q}$, entre le travail moteur élémentaire et le travail résistant utile qui lui correspond, varie sans cesse avec la position des deux dents en prise, parce que les quantités α et p qui entrent dans son expression ci-dessus donnée varient elles-mêmes. Nous allons en chercher une valeur moyenne, et pour cela nous déterminerons, à l'aide de certaines hypothèses simplificatives, le rapport des travaux finis $\int P\,ds$, $\int Q\,ds$ produits pendant toute la durée du contact des deux dents. On admettra : 1º que les expressions (1) sont d'une exactitude suffisante, quelle que soit la position des dents en prise, avant ou après la ligne des centres; 2º que le contact n'a lieu que dans l'étendue d'un pas à partir de cette ligne, soit avant, soit après; 3º que le pas est assez petit et l'angle α assez peu différent d'un droit, pour qu'on soit autorisé à con-

sidérer la longueur $p = \overline{AB}$ (*fig.* 227 et 228) comme sensiblement égale au déplacement s des dents, compté sur les circonférences primitives à partir du point A, ou jusqu'à ce point, s'il s'agit d'une position précédant la ligne des centres; 4° que la résistance Q est constante. On tire alors de la première équation (1)

$$\int P\,ds = \int Q\,ds + fQ\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\int s\,ds$$

et, si les intégrales sont prises dans l'étendue d'un pas commençant ou finissant à la ligne des centres,

$$\int P\,ds = Qa + fQ\,\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$$
$$= Qa\left[1 + \frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\right].$$

La quantité entre crochets représente le rapport du travail moteur au travail résistant, ces deux travaux étant ceux qui répondent au parcours d'un pas limité d'un côté à la ligne des centres.

A l'instant où cesse le contact des deux dents que nous venons de considérer, deux autres dents viennent en prise et elles se toucheront encore pendant le parcours d'un pas; puis le contact s'établira entre deux nouvelles dents, toujours pour un égal déplacement. Pendant chacune de ces périodes, les travaux moteur et résistant $\int P\,ds$ et Qa conservent la même valeur; le rapport qu'on vient de trouver reste donc exact pour un nombre entier quelconque de périodes, et par conséquent il s'applique aussi à la marche indéfinie de la machine.

Il arrive souvent que le contact des dents commence à un pas avant la ligne des centres et finit à un pas au delà de cette ligne; alors il y a simultanément deux paires de dents en prise, et, comme les calculs précédents en supposent une seule, il est nécessaire de les modifier un peu. Continuons d'employer les notations ci-dessus admises, pour la paire de

dents au delà de la ligne des centres; mais pour la paire en deçà nommons

N_1, fN_1 les composantes normale et tangentielle de leur action réciproque;

p_1, α_1 les valeurs de la normale commune et de son angle avec OO', c'est-à-dire les quantités analogues à la longueur $\overline{AB}$ et à l'angle O'AD de la *fig.* 228.

La puissance et la résistance étant toujours désignées par P et Q, on trouve les équations d'équilibre

$$\begin{aligned} Pr &= N(r\sin\alpha + fr\cos\alpha + fp) + N_1(r\sin\alpha_1 - fr\cos\alpha_1 + fp_1), \\ Qr' &= N(r'\sin\alpha + fr'\cos\alpha - fp) + N_1(r'\sin\alpha_1 - fr'\cos\alpha_1 - fp_1), \end{aligned}$$

qui, divisées respectivement par r et r', donnent par soustraction membre à membre

$$P - Q = f\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)(Np + N_1 p_1).$$

Nous pouvons toujours admettre, en vertu des mêmes raisons, que p et p_1 sont égaux aux arcs s, s_1 qui mesurent le parcours des dents depuis ou jusqu'à la ligne des centres; l'intégrale de l'équation précédente multipliée par ds, pour l'intervalle d'un pas (c'est-à-dire en faisant varier p de o à a et p_1 de a à o), donne alors

$$\int P\,ds = Qa + \frac{fa^2}{2}(N + N_1)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right).$$

D'autre part, en supposant les angles α et α_1 très voisins de 90° et considérant comme négligeables les termes $f\cos\alpha - \frac{p}{r}$, $f\cos\alpha_1 - \frac{p_1}{r'}$, ainsi qu'on l'a déjà fait pour obtenir les équations (1), la valeur de Q se réduit à

$$Q = N + N_1,$$

et l'on retrouve par suite, pour exprimer le rapport de $\int P\,ds$ à Qa, la même formule que dans le cas où il n'y avait qu'une seule paire de dents en prise.

Cette formule peut se transformer en y introduisant les nombres n, n' de dents. On a en effet

$$na = 2\pi r, \quad n'a = 2\pi r',$$

$$\frac{a}{2r} = \frac{\pi}{n}, \quad \frac{a}{2r'} = \frac{\pi}{n'};$$

ces valeurs introduites dans l'expression $1 + \frac{fa}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$ la transforment dans la suivante :

$$1 + \pi f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right).$$

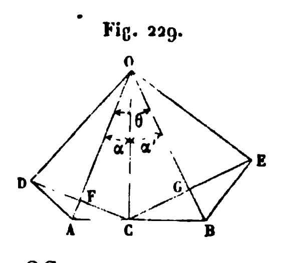
Exemple : $f = 0{,}10$, $n = 20$, $n' = 40$. On trouve

$$\pi f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) = 0{,}0236;$$

le travail moteur excède le travail résistant utile environ de $\frac{1}{42}$ de la valeur de ce dernier.

183. *Engrenages coniques.* — Soient OA et OB (*fig.* 229) les axes de rotation et OC l'arête de contact des cônes primitifs ODC, OCE. Les dents étant supposées courtes, on sait (n° 50) que l'engrenage fonctionne comme un engrenage plan, dont les cercles primitifs auraient les rayons $\overline{CA}$, $\overline{CB}$ déterminés par une perpendiculaire ACB menée en C à la droite OC.

Fig. 229.



Si nous nommons

r, r' les rayons $\overline{CF}$, $\overline{CG}$ des bases des cônes primitifs;
α, α' les angles de OC avec les deux axes;
θ l'angle de ces axes;
a le pas de l'engrenage,

on aura

$$\overline{CA} = \frac{r}{\cos\alpha}, \quad \overline{CB} = \frac{r'}{\cos\alpha'}.$$

Le rapport du travail moteur T au travail résistant utile T′, pendant le parcours d'un pas commençant ou finissant en C, sera donc (n° 182)

$$\frac{T}{T'} = 1 + \frac{fa}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos\alpha'}{r'}\right).$$

On donne habituellement une autre forme au facteur $\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos\alpha'}{r'}$. En nommant ω et ω' les vitesses angulaires autour de OA et OB, et Ω leur résultante, on a d'abord

$$\Omega = \sqrt{\omega^2 + \omega'^2 + 2\omega\omega'\cos\theta};$$

d'un autre côté, la projection des composantes ω, ω' sur la direction de la résultante donne

$$\Omega = \omega\cos\alpha + \omega'\cos\alpha'.$$

Si l'on égale ces deux valeurs, on trouve, en observant que ω et ω' sont en raison inverse des rayons r et r',

$$\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos\alpha'}{r'} = \sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{2\cos\theta}{rr'}}.$$

Par suite, l'expression du rapport $\frac{T}{T'}$ devient

$$\frac{T}{T'} = 1 + \frac{fa}{2}\sqrt{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r'^2} + \frac{2\cos\theta}{rr'}}.$$

Enfin, si n et n' sont les nombres de dents des deux roues, on aura encore

$$\frac{a}{2r} = \frac{\pi}{n}, \quad \frac{a}{2r'} = \frac{\pi}{n'},$$

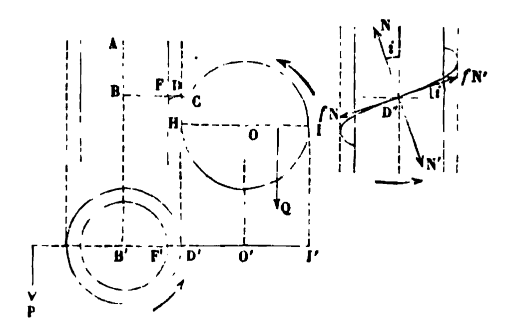
et il en résultera la formule

$$\frac{T}{T'} = 1 + f\pi\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n'^2} + \frac{2\cos\theta}{nn'}}.$$

184. *Engrenage de la vis sans fin.* — Faisons d'abord la coupe de l'appareil par un plan contenant l'axe de la vis et perpendiculaire à celui de la roue; la ligne AB (*fig.* 230) est

l'axe de la vis, HCI la circonférence primitive de la roue, ayant O pour centre; BD est la génératrice de la surface hélicoïdale de la vis, qui se trouve actuellement en prise avec une dent CD de la roue. On sait (n° 52) que le profil CD est une développante de cercle et que le point de contact D reste toujours sur une parallèle DH à l'axe AB, menée tangentiellement à la circonférence HCI. Sur un plan perpendiculaire à AB, le plein de la vis se projette suivant un cercle B'F'

Fig. 230.



et sa surface hélicoïdale suivant l'anneau circulaire compris entre les cercles B'F', B'D'; la roue supposée réduite à un plan a pour projection la droite D'I'. Enfin nous faisons une projection sur un plan tangent en D à un cylindre circulaire ayant AB pour axe et $\overline{BD}$ pour rayon; l'hélice lieu des points de la vis qui arrivent successivement au contact y est représentée partiellement. On suppose que la vis conduise la roue, et que le mouvement ait lieu dans le sens des flèches, sous l'action d'une puissance P appliquée à la vis et d'une résistance Q supportée par la roue, contenues dans des plans respectivement perpendiculaires aux axes AB et O. Le mouvement est supposé uniforme ou seulement sur le point de naître; on pourrait alors prouver, comme on l'a fait à propos de la vis (n° 177) et dans d'autres circonstances, que la somme algébrique des travaux des forces extérieures, agissant sur chacun des deux corps (vis et roue), est égale à zéro. Comme, d'un autre côté, la somme des travaux est, pour chaque solide, égale à la somme des moments des forces relative-

ment à son axe de rotation, multipliée par le déplacement angulaire commun à tous ses points (n° 102), les sommes de moments sont également nulles. Nous allons écrire les deux équations qui expriment la nullité de ces moments, mais en admettant, pour plus de simplicité, qu'on néglige les moments résistants produits par les frottements sur les coussinets; on fait ici une chose analogue à ce qui a déjà été fait à l'occasion des engrenages cylindriques (n° 182, deuxième observation préliminaire).

Désignons par

r le rayon $\overline{BD}$ de l'hélice lieu des points de contact sur la vis;
i son inclinaison sur le plan d'une section droite de son cylindre;
r' le rayon $\overline{OH}$ de la circonférence primitive de la roue;
ω, ω' les vitesses angulaires constantes des deux corps, dans l'hypothèse du mouvement uniforme;
p, q les bras de levier des forces P, Q;
φ l'angle de frottement mutuel des dents et de la vis;
$f = \tang\varphi'$ le coefficient de frottement.

La réaction de la roue sur la vis sera la résultante de deux forces, l'une N normale, contenue dans le plan tangent en D au cylindre ABD, l'autre fN opposée au glissement; si les dents sont courtes, on peut admettre approximativement que cette dernière est suivant la tangente à l'hélice en D (n° 52). Ces forces sont toutes deux représentées en vraie direction dans la troisième projection ci-dessus indiquée. Leur moment par rapport à l'axe de la vis, égal à celui de leurs composantes perpendiculaires à AB, aura pour valeur

$$(\mathrm{N}\sin i + f\mathrm{N}\cos i)r;$$

donc l'équation des moments sera, pour la vis,

$$\mathrm{P}p = \mathrm{N}r(\sin i + f\cos i).$$

L'action de la vis sur la roue ayant les composantes N', fN' respectivement égales et contraires à N et fN, on trouve de même pour équation des moments relativement à l'axe O

$$\mathrm{Q}q = \mathrm{N}r'(\cos i - f\sin i).$$

L'élimination de N entre ces deux équations donne la relation entre P et Q, laquelle est

$$\frac{Pp}{Qq} = \frac{r}{r'}\,\frac{\sin i + f\cos i}{\cos i - f\sin i} = \frac{r}{r'}\,\text{tang}(i+\varphi).$$

Si la somme $i+\varphi$ devenait égale à 90°, P deviendrait infini; dans le cas où l'on aurait $i+\varphi > 90°$, il n'existerait plus de puissance capable de rendre le mouvement imminent ou de l'entretenir à l'état uniforme, à moins de supposer Q négatif comme $\text{tang}(i+\varphi)$, c'est-à-dire de changer la résistance en une puissance qui agirait aussi dans le sens du mouvement.

Lorsque la roue conduit la vis au lieu d'être conduite par elle, on peut concevoir que Q devienne la puissance et P la résistance, et que les rotations des deux corps se produisent dans des sens contraires à ceux qu'on a indiqués sur la figure. Rien n'est alors changé aux calculs précédents, sauf que les forces de frottement s'exercent en sens contraire, ce qui conduit à remplacer f par $-f$ ou φ par $-\varphi$. Le rapport du moment moteur au moment résistant devient ainsi

$$\frac{Qq}{Pp} = \frac{r}{r'}\cot(i-\varphi);$$

on voit qu'il est infini lorsque $i-\varphi$ s'annule, et que la transmission est impossible lorsque cette différence prend une valeur négative.

En supposant l'angle φ inférieur à 45° (ce qui se réalise habituellement), on pourrait prendre i de manière à vérifier simultanément les deux conditions

$$i+\varphi < 90° \quad \text{et} \quad i > \varphi;$$

alors l'engrenage pourrait fonctionner dans les deux sens.

Calcul du travail moteur et du travail résistant utile. — Considérons d'abord le cas où P est la puissance, Q la résistance; les déplacements angulaires des deux corps pendant l'unité de temps étant ω et ω', les travaux correspondants de P et de Q ont pour valeur $Pp\omega$, $Qq\omega'$. On a donc pour le rapport du travail moteur T au travail résistant utile T′

$$\frac{T}{T'} = \frac{Pp\omega}{Qq\omega'} = \frac{\omega r}{\omega' r'}\,\text{tang}(i+\varphi),$$

ou bien, eu égard à la relation $\frac{\omega r}{\omega' r'} = \frac{1}{\tang i}$ (nº 52) [1],

$$\frac{T}{T'} = \frac{\tang(i+\varphi)}{\tang i}.$$

On a vu (nº 177) que le minimum de ce rapport, quand on fait varier i, répond à

$$i = \frac{1}{2}(90^\circ - \varphi)$$

et a pour valeur

$$\frac{\tang\frac{1}{2}(90^\circ+\varphi)}{\tang\frac{1}{2}(90^\circ-\varphi)} \quad \text{ou} \quad \tang^2\frac{1}{2}(90^\circ+\varphi).$$

Lorsqu'on intervertit les rôles des forces P et Q, en faisant de la première la résistance et de la seconde la puissance, le rapport du travail moteur au travail résistant utile s'exprime par

$$\frac{Qq\omega'}{Pp\omega} \quad \text{ou} \quad \frac{\tang i}{\tang(i-\varphi)}.$$

Son minimum répond à $i = \frac{1}{2}(90^\circ + \varphi)$, et la valeur de ce minimum est la même que dans le cas précédent. C'est ce qu'on pourrait établir par un calcul tout pareil, en considérant $i - \varphi$ comme l'inconnue à déterminer.

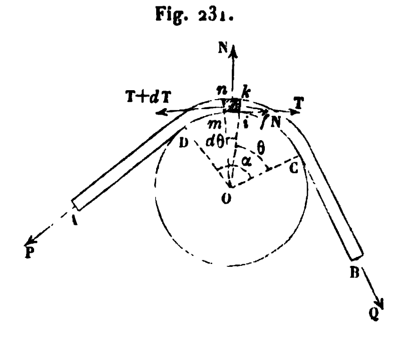
185. *Frottement d'une corde ou lanière sur un cylindre fixe.* — Une corde ou lanière, supposée de poids négligeable, s'enroule autour d'un cylindre fixe à section droite circulaire,

---

[1] Cette relation se retrouve par un moyen qui peut servir dans d'autres occasions et qu'il est bon de faire connaître. Imaginons que le frottement s'anéantisse; alors la vis sans fin devient un système à liaisons (nº 130), et sa condition d'équilibre, d'après le théorème général du nº 131, consistera en ce que T soit égal à T'. Donc l'expression $\frac{\omega r}{\omega' r'}\tang(i+\varphi)$ devient égale à 1 pour $\varphi = 0$, ce qui donne bien $\frac{\omega r}{\omega' r'} = \frac{1}{\tang i}$.

ayant son axe projeté en O (*fig.* 231); à ses deux extrémités A et B agissent une puissance P et une résistance Q. Le mouvement étant supposé sur le point de naître dans le sens de la première, on demande la relation qui existe entre ces deux forces.

Fig. 231.



Menons les rayons OC et OD qui aboutissent aux points où la corde se détache du cylindre, et nommons :

α l'angle COD de ces rayons;
θ l'angle d'un rayon intermédiaire quelconque Ok avec OC;
r le rayon du cylindre, augmenté de celui de la corde ou de la demi-épaisseur de la lanière;
f le coefficient du frottement des deux corps l'un sur l'autre;
μ la masse de la corde par unité de longueur.

Si nous considérons l'élément de corde $iknm$ compris entre les rayons Oi, Om, qui répondent aux angles θ et $\theta + d\theta$, cet élément reste en équilibre sous l'action de quatre forces, savoir : la tension T de la corde dans la section ik; la tension $T + dT$ dans la section mn; la réaction normale N du cylindre, et enfin le frottement ou la réaction tangentielle fN. Il faut pour cela que la résultante des deux premières forces soit égale et contraire à celle des deux dernières, et par conséquent on aura, en égalant les composantes normales et tangentielles,

$$N = (2T + dT)\sin\frac{1}{2}d\theta,$$

$$fN = dT\cos\frac{1}{2}d\theta,$$

ou, plus simplement, en négligeant les infiniment petits du

second ordre,

$$N = T d\theta, \quad fN = dT.$$

De là résulte, par l'élimination de N,

$$\frac{dT}{T} = f d\theta,$$

équation dont l'intégrale est, en désignant par lK une constante,

$$l\frac{T}{K} = f\theta \quad \text{ou} \quad T = Ke^{f\theta}.$$

Pour déterminer la constante, on remarquera que, si le poids de la corde est supposé négligeable, la tension au point C, pour lequel on a $\theta = 0$, sera égale à Q; la substitution de ces valeurs dans la dernière équation donne $Q = K$, et l'on a, par suite,

$$T = Qe^{f\theta}.$$

En particulier, on peut appliquer cette expression générale au point D, pour lequel $\theta = \alpha$ et $T = P$; on trouve ainsi la relation demandée

$$(1) \qquad P = Qe^{f\alpha}.$$

Cette expression de la puissance P répondant à une résistance donnée Q montre que P croît très rapidement lorsque α augmente; ainsi, pour $\alpha = \pi$ et $f = 0,20$, on a

$$\frac{P}{Q} = e^{0,62832} = 1,8744;$$

pour $\alpha = 2\pi$ avec la même valeur de f, on aurait

$$\frac{P}{Q} = e^{1,25664} = 3,5136.$$

Lorsque la corde fait plusieurs tours, on admet encore que chaque spire diffère très peu d'une section droite du cylindre; on continue en conséquence à appliquer la même formule en attribuant à α des valeurs plus grandes que 2π. En conservant

la même valeur numérique de f, on trouverait alors

Pour deux tours........ $\alpha = 4\pi$, $\frac{P}{Q} = 12,3453$,

Pour trois tours........ $\alpha = 6\pi$, $\frac{P}{Q} = 43,3763$.

Cela fait voir la possibilité d'équilibrer une grande force P avec une petite résistance Q, dès que la corde fait seulement quelques tours.

Si l'on conçoit l'équation $dT = fN$ écrite pour chacun des éléments de la corde entre les points C et D, et qu'on fasse la somme de toutes ces équations, le premier membre de l'équation obtenue par ce moyen sera l'accroissement fini de la tension entre les points extrêmes de la portion de corde CD, soit $P - Q$; le second sera la somme des frottements élémentaires subis par cette même portion CD. En nommant F cette somme, on aura donc

$$F = P - Q$$

ou, d'après l'équation (1),

$$(2) \qquad F = Q(e^{f\alpha} - 1).$$

Les calculs qui ont conduit aux équations (1) et (2) ne subsisteraient plus rigoureusement dans le cas où la corde aurait un mouvement uniforme, au lieu d'être seulement sur le point de sortir du repos. L'élément *iknm* aurait une accélération tangentielle nulle; mais, comme il décrit un cercle de rayon r avec une vitesse constante v, il a une accélération centripète $\frac{v^2}{r}\cdot$ Les forces qui le sollicitent doivent donc donner une résultante opposée à N et égale au produit de sa masse $\mu r\,d\theta$ par $\frac{v^2}{r}$, soit à $\mu v^2\,d\theta$ (n° 104); en projetant ces forces sur les directions N et fN, on trouvera, par conséquent,

$$N - T\,d\theta + \mu v^2\,d\theta = 0,$$
$$fN - dT = 0,$$

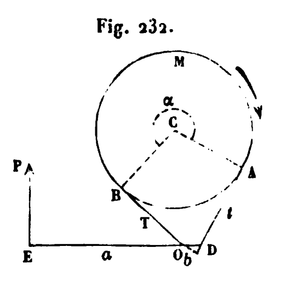
équations qui diffèrent de celles que nous avons employées,

en ce que la première contient le terme $\mu v^2 d\theta$. Leur intégration n'offrirait aucune difficulté; mais, comme nous avons commencé par négliger le poids de la corde, lequel est $\mu g r d\theta$ pour l'élément considéré, nous resterons dans le même ordre d'approximation en négligeant aussi $\mu v^2 d\theta$, ce qui ne pourra donner matière aux objections que dans le cas où la vitesse aurait une grande valeur et où, par conséquent, il en serait de même pour le rapport $\frac{v^2}{gr}$. Si la vitesse reste modérée, on continuera donc à se servir des équations (1) et (2), même dans l'hypothèse du mouvement uniforme de la corde.

La formule (2) donne alors le moyen de calculer le travail produit par les forces de frottement pour un déplacement élémentaire ds. En effet, la force fN produit un travail négatif, ayant $f\mathrm{N}\,ds$ pour valeur absolue; comme le facteur ds est le même en tous les points de la corde, à cause de l'inextensibilité qu'on lui attribue, la somme de ces valeurs absolues sera $ds\Sigma f\mathrm{N}$ ou F ds, ou encore $\mathrm{Q}\,ds(e^{f\alpha}-1)$.

186. *Frein à lame flexible.* — Un arbre tourne autour de l'axe projeté en C (*fig.* 232), dans le sens de la flèche, et l'on veut avoir un moyen pour modérer son mouvement en cas de besoin. A cet effet, l'arbre porte une poulie sur laquelle s'enroule une lame métallique flexible, embrassant un arc égal à environ $\frac{2}{3}$ ou $\frac{3}{4}$ de la circonférence. La lame se détache de la poulie en ligne droite de deux côtés, aux points A et B, et ses extrémités vont s'attacher, l'une sur l'articulation fixe O d'un levier DE, l'autre à l'extrémité D de ce levier. En exerçant un effort P à l'autre point extrême E, on serre la lame contre la poulie et l'on fait naître un frottement assez considérable qui tend à ralentir le corps tournant.

Fig. 232.



Nommons

T, t les tensions des brins OB, DA;
α le rapport de l'arc BMA au rayon CA:

f le coefficient de frottement de la lame sur la poulie;
a et b les distances du point fixe O à la force P et à la ligne DA;
r le rayon $\overline{CA}$.

Par rapport à la poulie, la lame glisse de A vers B, en sens contraire de la flèche; T est donc la puissance, t la résistance, et l'on a (nº 185)

$$T = te^{f\alpha};$$

cette équation resterait encore vraie dans le mouvement varié du treuil, car la lame est immobile, et l'équation ci-dessus résulte de ses conditions d'équilibre. D'un autre côté, l'équilibre du levier, corps assujetti à tourner autour d'un axe fixe O, exige la condition (nº 135)

$$Pa = tb.$$

On tire de ces deux équations les valeurs de T et t, savoir

$$t = \frac{Pa}{b}, \quad T = \frac{Pa}{b}e^{f\alpha};$$

et l'on en conclut que le treuil est soumis à une force résistante T et à une force mouvante t, qui produisent un moment résistant égal à $(T - t)r$, soit à

$$\frac{Par}{b}(e^{f\alpha} - 1).$$

L'arbre étant en outre soumis à des forces données, on apprendra dans le cours de seconde année comment on pourrait déterminer son mouvement, et notamment comment on trouverait l'angle total décrit par lui avant de s'arrêter.

Le frein pourrait encore fonctionner à la rigueur, mais dans des conditions beaucoup moins bonnes, si le sens du mouvement de rotation de l'arbre était supposé contraire à celui de la flèche. Le glissement du frein sur la poulie se produisant alors de B vers A, la relation entre t et T deviendrait

$$t = Te^{f\alpha};$$

on aurait d'ailleurs toujours

$$Pa = tb,$$

et ces deux équations donneraient

$$t = \frac{\mathrm{P}a}{b}, \quad \mathrm{T} = \frac{\mathrm{P}a}{b} e^{-f\alpha}.$$

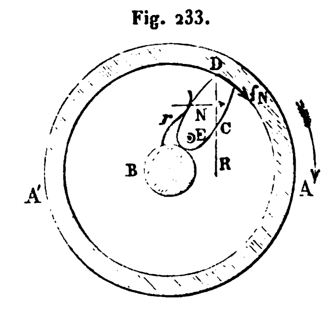
Par suite, le moment total de la force résistante exercée sur la poulie serait réduit à

$$\frac{\mathrm{P}ar}{b}(1 - e^{-f\alpha}),$$

c'est-à-dire à la valeur précédente réduite dans le rapport de $e^{f\alpha}$ à 1. On voit par là que, si le sens du mouvement de l'arbre est donné, il faut disposer le levier DE de manière à faire passer par le point O celle des deux forces T et t qui agit en sens contraire de ce mouvement.

187. *Encliquetage Dobo.* — On a vu au n° 78 la description de cet appareil, et il s'agit maintenant d'expliquer théoriquement la manière dont il fonctionne. On se rappelle qu'il est composé d'un anneau creux AA (*fig.* 233) en communica-

Fig. 233.



tion avec un arbre intérieur B par l'intermédiaire de quatre cames analogues à C; ces cames sont articulées avec l'arbre B en des points tels que E, et pressées légèrement contre l'anneau par des ressorts r encastrés dans l'arbre. Supposons maintenant que l'arbre soit rendu immobile, et qu'on essaye de faire tourner l'anneau dans le sens de la flèche en lui appliquant une puissance de grandeur convenable; pour savoir si ce mouvement est possible, admettons qu'on ait réussi à le produire et que l'anneau glisse sur les cames.

La came C supporte alors en D une réaction R, composée d'une pression normale N et d'un frottement fN, et il est facile de donner à la came une figure telle que le centre d'articulation E soit dans l'angle formé par les forces N et R. Si l'anneau pouvait glisser, il ferait alors nécessairement tourner la came autour de E, dans le sens où il tourne lui-même, car la résultante R et la pression du ressort tendent toutes deux à entraîner la came dans le sens dont il s'agit; mais cette rotation sera impossible (et, par suite, il en sera de même du glissement supposé), car il en résulterait que le point D de la came devrait pénétrer dans l'anneau. Donc, moyennant la condition qui vient d'être indiquée, l'anneau ne pourra glisser dans le sens de la flèche, si l'arbre est rendu absolument fixe; mais s'il n'est soumis qu'à une résistance limitée, en augmentant de plus en plus la puissance appliquée à l'anneau, on finira par mettre l'ensemble en mouvement, comme s'il s'agissait d'un solide unique pouvant tourner autour de l'axe O.

Supposons, au contraire, que, continuant à rendre fixe l'arbre B, on essaye de faire tourner l'anneau dans le sens opposé à celui de la flèche, au moyen d'un moment moteur Pp; nous allons démontrer que, dans ce cas, il est impossible de faire grandir indéfiniment Pp sans déterminer le glissement de l'anneau sur la came. Remarquons d'abord, en effet, que celle-ci doit toujours rester en équilibre; car, si d'une part elle ne peut pénétrer dans l'anneau, d'autre part elle ne peut pas davantage cesser de le toucher, parce que le plus petit commencement de séparation supprimerait l'action mutuelle répulsive R et qu'alors le ressort, agissant tout seul, rétablirait le contact. Maintenant si, malgré l'augmentation de Pp, le glissement ne se produisait pas, le moment contraire, produit sur l'anneau par la composante tangentielle de l'action réciproque R, resterait toujours égal à Pp et devrait aussi aller en croissant; cette composante fN, qui tend maintenant, ainsi que N, à faire tourner la came contrairement à la pression du ressort, finirait par l'emporter sur celle-ci, même sans tenir compte du moment de N par rapport à E. L'équilibre de la came serait donc rompu, ce qui ne peut avoir lieu; donc l'hypothèse de l'absence du glissement est inadmissible, et le glissement se produira lorsque Pp atteindra

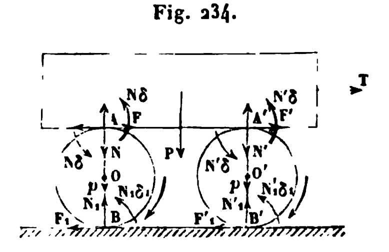
une certaine limite $P'p'$, d'autant moindre que les ressorts r auront moins de raideur. Si l'on supprime la fixité de l'arbre B et qu'on le suppose seulement soumis à une résistance limitée, on pourra s'arranger pour que le moment de cette résistance relativement à l'axe O soit supérieur à $P'p'$; alors le mouvement imprimé à l'anneau en sens contraire de la flèche n'entraînera pas celui de l'arbre B, de sorte que la transmission du premier corps au second fonctionnera dans un sens et non pas dans le sens opposé.

La théorie de l'appareil serait la même si la puissance était appliquée à l'arbre B au lieu de s'exercer sur l'anneau A; seulement on ne pourrait transmettre le mouvement du premier au second que dans le sens contraire à celui de la flèche.

188. *Transport sur rouleaux.* — Un fardeau dont nous désignons le poids par P est soutenu par deux rouleaux en forme de cylindres circulaires droits; ces rouleaux ont un même rayon r et sont posés sur un plan horizontal. On demande la force T qu'on doit appliquer au fardeau, dans une direction perpendiculaire aux axes des rouleaux et horizontale, pour que le fardeau soit sur le point de se déplacer dans le sens de cette force.

Soient O et O' les axes des rouleaux (*fig.* 234), en projec-

Fig. 234.



tion sur le plan vertical de T; AB, A'B' les diamètres verticaux de leurs sections droites. Les actions supportées par le premier rouleau de la part du fardeau et du plan horizontal, aux environs des points A et B, ne passent pas rigoureusement par ces points, à cause de la résistance au roulement (nº 169); mais on peut néanmoins les y transporter parallèlement à

elles-mêmes, à la condition de joindre à chacune d'elles un couple de sens opposé à la rotation du rouleau, couple qui représente la résistance dont il s'agit. Nous décomposerons l'action au point A en une pression normale N et une force tangentielle F; de même l'action en B se remplacera par ses composantes normale et tangentielle N_1, F_1; alors les deux couples introduits par le transport des réactions en A et B auront pour moments $N\delta$ et $N_1\delta_1$, δ et δ_1 désignant les distances caractéristiques de la résistance au roulement du rouleau sur le corps supérieur et sur le plan horizontal d'appui. Pour le second rouleau, on pourrait imaginer une décomposition analogue des réactions qu'il supporte en A′ et B′; nous les représenterons par les mêmes lettres avec un accent.

D'un autre côté, le fardeau supporte de la part des rouleaux, en A et A′, des réactions égales et contraires à celles que nous venons d'indiquer (n° 95).

Cela posé, l'équilibre du premier rouleau exige qu'on ait, en nommant p son poids propre agissant au centre de gravité O,

$$F_1 = F, \qquad N_1 = N + p,$$
$$2Fr = N\delta + N_1\delta_1 = N(\delta + \delta_1) + p\delta_1;$$

les deux premières équations expriment que les sommes algébriques des forces projetées sur l'horizontale et la verticale sont nulles; la troisième est l'équation des moments relativement à B. On aurait de même, pour le second rouleau,

$$F'_1 = F', \quad N'_1 = N' + p,$$
$$2F'r = N'(\delta + \delta_1) + p\delta_1;$$

puis, en ajoutant la dernière équation avec celle qui lui correspond dans le premier groupe,

$$2r(F + F') = (N + N')(\delta + \delta_1) + 2p\delta_1.$$

D'un autre côté, on doit avoir comme conditions nécessaires de l'équilibre du fardeau

$$F + F' = T, \quad N + N' = P;$$

donc

$$2Tr = P(\delta + \delta_1) + 2p\delta_1,$$

ce qui détermine la force de traction T. Cette force aura généralement une intensité beaucoup moindre que celle qui pourrait produire le glissement du fardeau sur le plan horizontal, pourvu que les corps soient suffisamment durs et polis, circonstances qui rendront les distances δ et δ_1 très petites en comparaison du diamètre $2r$.

Le calcul de la force T capable, non plus de faire sortir le système du repos, mais d'entretenir à l'état d'uniformité le mouvement une fois acquis, serait tout à fait pareil au précédent. Puisque le mouvement du fardeau est supposé rectiligne et uniforme, l'accélération de chacun de ses points est nulle; d'un autre côté, l'accélération d'un point quelconque appartenant à l'un des rouleaux est la même, dans ce cas, que s'il tournait autour de son axe de figure rendu fixe (n° 30, *troisième application*). Or on a vu, à l'occasion du plan incliné et du treuil (nos 171 et 179), que cela suffit pour qu'on soit en droit d'appliquer à chacun des trois corps les conditions d'équilibre entre les forces extérieures, absolument comme si le système était en repos.

Quant au travail à dépenser pour un déplacement x du fardeau, il serait

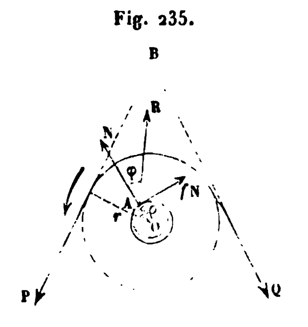
$$\mathrm{T}x \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2r}[\mathrm{P}(\delta+\delta_1)+2p\delta_1];$$

il représente exactement, comme il est aisé de le vérifier, le travail des couples produits par la résistance au roulement.

189. *Poulie.* — La poulie peut présenter diverses dispositions : tantôt la chape est fixe, tantôt elle est mobile; quelquefois la poulie est munie de tourillons faisant corps avec elle, qui s'engagent dans des œillets pratiqués dans la chape, ou inversement la poulie est percée d'un œil concentrique à son axe, et cet œil est traversé par une espèce d'essieu qui fait corps avec la chape. Toutes ces variantes n'introduisent pas de modifications bien notables dans la théorie que nous avons à faire ici; nous supposerons, pour fixer les idées, la chape fixe et munie d'un essieu rond qui traverse un œil pratiqué dans la poulie, comme l'indique la *fig.* 235. La poulie est soumise à une puissance P et à une résistance Q, et l'on

suppose le mouvement sur le point de naître dans le sens de la première. L'équilibre existe alors entre P, Q et la réaction R fournie par le point d'appui A; puisque le glissement est sur le point de se produire, cette force R fait avec la normale ON un angle φ égal à celui du frottement, et se décompose par conséquent en une force normale N et une force tangentielle $fN = N \tang\varphi = R \sin\varphi = f_1 R$. D'ailleurs la puissance P agit tangentiellement à la circonférence de la poulie; mais, en raison de la raideur des cordes (n° 170), la ligne d'action de la résistance Q est un peu extérieure à la circonférence, et si on la transporte parallèlement à elle-même, pour la rendre tangente, il faut lui adjoindre en même temps un couple opposé à la rotation de la poulie, ayant un moment exprimé par $\frac{1}{2}(A + BQ)$, A et B étant des constantes connues pour chaque espèce de corde.

Fig. 235.



Il est facile maintenant d'établir la relation entre P et Q. D'abord ces deux forces font équilibre à R, qui, par conséquent, est égale et contraire à leur résultante; on a donc

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(P, Q)};$$

ensuite, si l'on prend les moments, relativement à l'axe de la poulie, des forces N, $f_1 R$, P, Q qui lui sont appliquées, en désignant par r et ρ les rayons de la poulie et de l'œil, on devra poser la condition d'équilibre

$$(1) \quad Pr = Qr + \frac{1}{2}(A + BQ) + f_1 \rho \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos(P, Q)},$$

qui permettra de trouver P lorsque Q sera donnée. L'équation du second degré à laquelle on arrivera, en élevant au carré la précédente après avoir isolé le radical dans un membre, donnera deux valeurs de P, dont une seule répondrait à la question. L'autre répond au signe — attribué au

radical. On les distingue l'une de l'autre par ce fait que la première doit donner

$$P > Q + \frac{1}{2r}(A + BQ),$$

tandis que l'inégalité changerait de sens avec la seconde.

L'équation (1) se simplifie beaucoup dans le cas où les forces P et Q sont parallèles. Le radical devient alors égal à P + Q et l'équation peut se mettre sous la forme

$$P\left(1 - \frac{f_1\rho}{r}\right) = \frac{A}{2r} + Q\left(1 + \frac{2f_1\rho + B}{2r}\right),$$

soit plus simplement

$$P = a + bQ, \tag{2}$$

en désignant par a et b deux coefficients constants pour une poulie et une corde données, coefficients dont le second b excède toujours l'unité, comme le montre immédiatement sa définition déduite des deux équations précédentes.

Dans le cas général, on arriverait encore à une équation de même forme, en remplaçant approximativement le radical par une fonction linéaire de P et de Q, conformément à la méthode de Poncelet (nº 179).

Si le frottement et la raideur des cordes n'existaient pas, on devrait faire les coefficients A, B, f_1 tous égaux à zéro; on trouverait alors simplement $P = Q$, comme il eût été facile de l'établir directement.

Pour étudier l'équilibre de la poulie à chape mobile, la force Q étant remplacée par un point fixe où serait attaché le brin de corde suivant lequel elle agit, on pourrait encore employer les équations

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos(P, Q),$$

$$Pr = Qr + \frac{1}{2}(A + BQ) + f_1\rho R;$$

seulement ici R serait donnée et Q deviendrait une inconnue auxiliaire.

Dans le cas où la poulie serait en mouvement uniforme, la masse des cordes étant de plus supposée négligeable, on

pourrait reconnaître, par des considérations analogues à celles que nous avons exposées à propos du treuil (n° 179), que les forces P, Q, R doivent encore satisfaire aux conditions d'équilibre, et que par conséquent elles vérifient les mêmes équations, sauf que la valeur attribuée au coefficient f_1 devrait être un peu diminuée (n° 167).

Travail moteur et travail résistant utile. — Supposons d'abord la poulie fixe; si le point d'application de la puissance P parcourt une longueur x, celui de la résistance Q éprouvera le même déplacement, en raison de l'inextensibilité que nous attribuons à la corde, et les valeurs absolues des deux travaux seront Px et Qx. Leurs valeurs ainsi que celle de leur rapport, quand on donne Q et x, sont faciles à calculer au moyen de la relation ci-dessus établie entre P et Q.

S'il s'agit d'une poulie à chape mobile, nous nous bornerons à considérer le cas où les forces P et Q sont parallèles, ce qui entraîne comme conséquence que la résistance principale R doit avoir aussi la même direction. Alors on a les équations d'équilibre

$$R = P + Q,$$
$$P = a + bQ,$$

d'où résulte, par l'élimination de Q,

$$P(1 + b) = a + bR.$$

D'un autre côté, si le point d'application de la puissance P se déplace de x, comme la diminution x dans la longueur de corde se partage également entre les deux brins, le point d'application de R ou le centre de la poulie ne se déplace que de $\frac{x}{2}$; le travail moteur et le travail résistant utile sont donc respectivement égaux à Px et $\frac{1}{2}Rx$, soit à

$$\frac{x(a + bR)}{1 + b} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}Rx;$$

on peut donc les calculer quand R et x sont donnés. Leur rapport s'exprime par

$$\frac{2}{1 + b}\left(\frac{a}{R} + b\right);$$

il devient égal à 1 quand on supprime le frottement et la raideur des cordes, parce que, alors, a devient nul et b égal à 1. Dans le cas contraire, il est facile de voir qu'il dépasse l'unité; en effet, l'inégalité $b > 1$ entraîne $2b > 1 + b$, et le rapport en question comprend le quotient $\frac{2b}{1+b}$, auquel il faut encore ajouter quelque chose.

190. *Moufles ou palans.* — Nous renvoyons au n° **60** pour la description de cet appareil, qui consiste en une combinaison de poulies. Nous allons considérer le type représenté par la *fig.* 91, p. 171, en y supposant toutes les poulies égales entre elles, construites dans les mêmes conditions, et au nombre de n; une puissance P tire l'extrémité libre de la corde et une résistance Q agit sur la chape mobile, dans la direction parallèle à P, qui est sensiblement celle de tous les brins de corde allant d'une poulie à une autre, ainsi que du brin extrême attaché au point fixe. Il s'agit d'établir la relation entre P et Q, quand la première force atteint l'intensité nécessaire pour que le mouvement soit sur le point de se produire ou se produise avec une vitesse constante.

Imaginons qu'on parcoure la corde en allant du point d'attache à celui où s'applique la puissance; nommons

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ \ldots,\ T_{n-1},\ T_n,\ P$$

les tensions des divers brins, dans l'ordre où ils sont successivement parcourus. Puisque toutes les poulies sont égales et de même construction, les deux forces appliquées à chacune d'elles doivent vérifier une équation analogue à l'équation (2) du n° **189**, dans laquelle a et b conserveront des valeurs constantes, en passant d'une poulie à une autre; cela permet d'écrire le groupe d'équations suivant :

$$\begin{aligned}
T_2 &= a + bT_1,\\
T_3 &= a + bT_2,\\
T_4 &= a + bT_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
T_n &= a + bT_{n-1},\\
P &= a + bT_n,
\end{aligned}$$

auxquelles il faut joindre, pour l'équilibre de la chape mobile,

$$Q = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_{n-1} + T_n.$$

On a ainsi obtenu un système de $n+1$ équations qui, s'il était résolu, ferait connaître en fonction de Q les n tensions et la puissance P. Pour arriver assez simplement à cette résolution, remarquons que les $n-1$ premières sont toutes de la forme

$$T_{k+1} = a + bT_k,$$

et qu'on peut y satisfaire en prenant d'une manière générale l'expression

$$T_k = M + N b^{k-1},$$

dans laquelle M et N désigneraient deux constantes; on déduit, en effet, de là

$$T_{k+1} = M + N b^k,$$

et, en substituant ces valeurs de T_k et T_{k+1} dans la relation qu'elles doivent vérifier,

$$M + N b^k = a + bM + N b^k.$$

La vérification se fera identiquement si l'on adopte la valeur

$$M = -\frac{a}{b-1}$$

et si l'on pose en conséquence

$$(1) \qquad T_k = -\frac{a}{b-1} + N b^{k-1},$$

le coefficient N conservant une valeur arbitraire.

Moyennant l'adoption, pour les tensions $T_1, T_2, \ldots, T_n$, des résultats donnés par la formule précédente quand on y fait successivement $k = 1, 2, \ldots, n$, les $n-1$ premières équations du groupe à résoudre sont satisfaites, et il ne reste plus à considérer que les deux dernières. La substitution dans celles-ci

des valeurs des tensions, toujours déduites de la même formule (1), les transforme en

$$(2) \qquad P = -\frac{a}{b-1} + N b^n,$$

$$(3) \qquad \begin{cases} Q = -\dfrac{na}{b-1} + N(1 + b + b^2 + \ldots + b^{n-1}) \\ \quad = -\dfrac{na}{b-1} + \dfrac{N(b^n - 1)}{b-1}. \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) déterminent N et P en fonction de Q; par la substitution de N dans l'équation (1), on aurait l'expression d'une tension de rang quelconque. Si l'on veut se borner à trouver P en fonction de Q, on éliminera N entre (2) et (3), ce qui donne

$$(4) \qquad P = a\left(\frac{nb^n}{b^n - 1} - \frac{1}{b-1}\right) + \frac{b^n(b-1)}{b^n - 1} Q,$$

c'est-à-dire encore une relation de la forme $P = a + bQ$, mais avec d'autres valeurs de a et de b.

Si le frottement et la raideur des cordes n'existaient pas, on devrait faire $a = 0$ et $b = 1$; le système d'équations à résoudre deviendrait alors

$$T_1 = T_2 = T_3 = \ldots = T_n = P,$$
$$Q = nP,$$

et la solution serait ainsi toute trouvée. L'équation (4) donne également $Q = nP$, quand on y fait $a = 0$, $b = 1$, en ayant soin de remplacer aussi par leurs vraies valeurs les expressions qui se présentent sous une forme indéterminée.

Voici un exemple numérique tiré du *Cours de Mécanique appliquée* de Poncelet. On a un palan composé de deux systèmes de quatre poulies chacun, avec les données numériques suivantes :

Rayon des poulies, augmenté du rayon de la corde...	$0^m,0593$
Rayon de l'œil..................................	$0^m,0105$
Coefficient du frottement d'une poulie sur son essieu..	$0,155$
Diamètre de la corde...........................	$0^m,018$

Poncelet, prenant pour point de départ les résultats des expériences de Coulomb rapportés au n° **170**, évalue les coefficients A et B à 0,19 et 0,0083, puis il en conclut, par l'application des formules données au n° **189** dans le cas des forces parallèles,

$$a = 1,646, \quad b = 1,1267.$$

Ces valeurs substituées, avec $n = 8$, dans la formule (4) ci-dessus, donnent

$$P = 8,43 + 0,206\,Q,$$

au lieu de $P = 0,125\,Q$, qui serait la puissance nécessaire si le frottement et la raideur disparaissaient.

191. *Travail moteur et travail résistant utile.* — Quand le point d'application de la puissance parcourt une longueur x, celle-ci fait un travail moteur Px, que la formule (4) permet d'exprimer en fonction de x et Q; simultanément le point d'application de la résistance Q parcourt une longueur $\frac{x}{n}$ (n° **90**), en sorte que le travail résistant utile est $\frac{Qx}{n}$. Le rapport de ces deux travaux est donc $\frac{nP}{Q}$ ou $\frac{P}{P_0}$, en représentant par P_0 ce que devient P dans l'hypothèse où le frottement et la raideur des cordes s'annulent. Par exemple, avec les données numériques ci-dessus, ce rapport serait $\frac{8P}{Q}$, c'est-à-dire

$$1,65 + \frac{67,44}{Q};$$

on voit qu'il diminue à mesure que Q augmente, mais sans descendre au-dessous de la limite 1,65 ou environ $\frac{5}{3}$.

192. *Transmission de mouvement par courroies sans fin.* — Supposons deux poulies ou tambours fixés sur les axes O, O′ (*fig.* 236) de deux treuils et servant de supports à une courroie sans fin CDMEFN, qui transmet le mouvement du premier treuil au second. La puissance P est appliquée au treuil O

tangentiellement à une circonférence de rayon $\overline{OA} = p$; la résistance Q agit sur le treuil O′ tangentiellement à une autre circonférence de rayon $\overline{O'B} = q$. Pour plus de simplicité, on suppose les forces P et Q perpendiculaires à la ligne OO′, et l'on néglige la petite inclinaison des brins CD, EF de la courroie sur cette même ligne. On demande quelle est la relation entre P et Q dans le cas du mouvement uniforme des treuils,

Fig. 236.

ou lorsque l'équilibre existe et qu'il est sur le point d'être rompu.

Nommons

T, t les tensions des brins CD, EF;

α, α' les angles au centre correspondant aux arcs CNF, DME embrassés par la courroie sur chaque poulie;

$r = \overline{ON}$, $r' = \overline{O'N}$ les rayons de ces poulies;

f, f' les coefficients de frottement de la courroie sur les mêmes poulies;

f_1 le sinus de l'angle de frottement des tourillons des deux treuils sur leurs coussinets;

ρ, ρ' les rayons de ces tourillons.

Si nous considérons séparément l'équilibre de chaque treuil, en tenant compte des forces T, t qu'il reçoit de l'autre, et aussi des réactions produites par les supports, nous aurons les deux équations de moments

$$(1)\qquad Pp = (T - t)r + f_1\rho\sqrt{P^2 + (T + t)^2},$$

$$(2)\qquad (T - t)r' = Qq + f_1\rho'\sqrt{Q^2 + (T + t)^2},$$

ce qui fait, quand la résistance Q est donnée, deux équations

seulement entre l'inconnue principale P et les deux inconnues auxiliaires T, t.

Afin d'en établir encore une, nous supposerons connue la tension initiale T_0, qu'on a dû préalablement donner à la courroie dans toute sa longueur, lorsqu'on l'a mise en place et avant de s'en servir pour communiquer le mouvement au treuil O'. Lorsque, ensuite, le mouvement est arrivé à son état régulier et permanent, la tension T du brin conducteur devient nécessairement plus grande que la tension t du brin conduit, car le treuil O', soumis à une résistance Q et à des frottements sur ses tourillons, ne peut se mouvoir dans le sens de la flèche que si l'on a $(T-t)r > 0$ ou $T > t$. Mais on peut prouver que la somme $T+t$ s'écarte peu de sa valeur primitive $2T_0$. Considérons, en effet, un élément de la courroie, ayant une longueur primitive ds_0 sous la tension T_0 et une longueur finale ds_1 sous la tension T_1 ; nous admettrons, comme démontrée par l'expérience, la relation

$$\frac{(T_1 - T_0)\,ds_0}{ds_1 - ds_0} = \text{const.} = C,$$

qui exprime l'invariabilité du rapport entre l'allongement proportionnel $\dfrac{ds_1 - ds_0}{ds_0}$ et la variation $T_1 - T_0$ de la tension. Comme, d'ailleurs, le rapport $\dfrac{ds_1}{ds_0}$ s'écarte toujours très peu de 1 dans la réalité physique, on peut poser aussi, sans erreur sensible,

$$(T_1 - T_0)\,ds_1 = C(ds_1 - ds_0).$$

Or la longueur totale de la courroie n'a pas changé : c'est toujours NCDMEFN ; donc $\int (ds_1 - ds_0) = 0$, et, par suite, l'équation précédente donne

$$\int (T_1 - T_0)\,ds_1 = 0,$$

l'intégrale étant prise dans l'étendue complète du circuit. Ce circuit comprend :

1° Une longueur $\overline{CD} = L$, où la tension T_1 a la valeur con-

stante T, et une seconde longueur $\overline{EF} = L$, où T_1 conserve aussi une valeur constante t;

2° Deux longueurs comparativement petites $\overline{CNF} = l$, $\overline{DME} = l'$, où la tension varie entre les limites T et t et où l'on peut, par approximation, lui attribuer la valeur moyenne $\frac{1}{2}(T+t)$.

D'après cela, nous aurons

$$\begin{aligned} o &= \int (T_1 - T_0)\,ds_1 \\ &= L(T-T_0) + L(t-T_0) + (l+l')\left(\frac{T+t}{2} - T_0\right) \\ &= (T+t-2T_0)\left(L + \frac{l+l'}{2}\right), \end{aligned}$$

équation d'où résulte immédiatement

$$(3) \qquad T + t - 2T_0 = o.$$

Il est maintenant facile d'éliminer T et t entre les équations (1), (2) et (3), ce qui conduit à

$$(4) \qquad Ppr' = Qqr + f_1\left(r'\rho\sqrt{P^2 + 4T_0^2} + r\rho'\sqrt{Q^2 + 4T_0^2}\right).$$

Ce serait la relation entre la puissance P et la résistance Q, d'où l'on pourrait, au besoin, tirer la première en fonction de la seconde, simplement par la résolution d'une équation du second degré. Mais il est encore plus simple de concevoir la valeur de P développée suivant les puissances de f_1, et d'admettre que, vu la petitesse des produits $f_1\rho$, $f_1\rho'$, on puisse négliger dans le développement les termes du deuxième ordre et des ordres supérieurs, ce qui serait d'une exactitude suffisante dans les circonstances ordinaires de la pratique. On peut alors mettre dans l'expression $\sqrt{P^2 + 4T_0^2}$, qui se trouve déjà multipliée par f_1, la valeur approximative $P = \frac{Qqr}{pr'}$ qui répond à $f_1 = o$, et l'on trouve

$$(5) \quad Ppr' = Qqr + f_1\left(r'\rho\sqrt{\frac{Q^2q^2r^2}{p^2r'^2} + 4T_0^2} + r\rho'\sqrt{Q^2 + 4T_0^2}\right).$$

Les équations (2) et (3) donnent aussi les valeurs des tensions

$$T = T_0 + \frac{1}{2r'}(Qq + \sqrt{Q^2 + 4T_0^2}),$$

$$t = T_0 - \frac{1}{2r'}(Qq + \sqrt{Q^2 + 4T_0^2}),$$

ou bien, si l'on pose $T_0 = Qx$,

$$(6) \quad \begin{cases} T = Q\left[x + \dfrac{1}{2r'}(q + f_1\rho'\sqrt{1 + 4x^2})\right], \\ t = Q\left[x - \dfrac{1}{2r'}(q + f_1\rho'\sqrt{1 + 4x^2})\right]. \end{cases}$$

Or, pour qu'il n'y ait pas glissement de la courroie sur les poulies, il faut que T et t vérifient les inégalités

$$T < te^{f\alpha}, \quad T < te^{f\alpha'},$$

ou bien, en désignant par m la plus petite des deux exponentielles $e^{f\alpha}$, $e^{f\alpha'}$ et par k un coefficient moindre que 1, mais cependant tel que km excède l'unité, il faut qu'on ait

$$T = kmt.$$

La substitution des valeurs (6) dans cette équation donne, par suite,

$$(km - 1)x - \frac{km + 1}{2r'}(q + f_1\rho'\sqrt{1 + 4x^2}) = 0,$$

équation qui déterminera x et par suite la valeur convenable de T_0, quand on aura choisi celle de k. La valeur de x peut d'ailleurs se trouver par la résolution d'une équation du second degré ou par un système d'approximation tout pareil à celui dont nous avons fait usage pour arriver à l'équation (5). On prend d'abord l'expression approchée

$$x = \frac{(km + 1)q}{2(km - 1)r'}$$

qui répond à $f_1\rho' = 0$, puis on la substitue sous le radical $\sqrt{1+4x^2}$, et l'on a finalement l'expression corrigée

$$(7)\quad x = \frac{(km+1)q}{2(km-1)r'}\left[1 + \frac{f_1\rho'}{q}\sqrt{1+\left(\frac{km+1}{km-1}\right)^2\frac{q^2}{r'^2}}\right].$$

D'après Belanger, on pourrait prendre en général $k = 0,9$, quand l'appareil n'est pas exposé à des secousses; dans le cas contraire, il faudrait une valeur moindre, mais il est difficile de donner à cet égard une indication précise. On doit se garder, d'ailleurs, de diminuer ce coefficient au delà de ce qui est nécessaire, car alors $km - 1$ pourrait se rapprocher beaucoup de 0, x et T_0 prendraient de grandes valeurs, et, par suite, les termes qui représentent l'effet du frottement dans les équations (1), (2) et (5) prendraient une plus grande importance.

Dans la pratique, on se réserve la possibilité de fixer la valeur de T_0 par un tâtonnement expérimental; en employant un tendeur ou faisant varier la distance des axes, comme on l'a dit au n° 82.

Cherchons enfin les travaux des forces P et Q, c'est-à-dire le travail moteur et le travail utile, pendant que le treuil O tourne d'un angle θ, auquel répond un angle $\theta' = \frac{r\theta}{r'}$ décrit simultanément par O'. Le travail de la puissance P s'exprime par $Pp\theta$; si l'on y substitue la valeur de Pp donnée par l'équation (5), il vient

$$Qq\frac{r\theta}{r'} + f_1\theta\left(\rho\sqrt{\frac{Q^2q^2r^2}{p^2r'^2} + 4T_0^2} + \frac{r}{r'}\rho'\sqrt{Q^2+4T_0^2}\right).$$

ou bien, eu égard à $T_0 = Qx$ et à l'équation (7), en continuant toujours à négliger le carré de f_1,

$$Qq\frac{r\theta}{r'} + f_1 Qq\frac{r\theta}{r'}\left[\frac{\rho}{p}\sqrt{1+\left(\frac{km+1}{km-1}\right)^2\frac{p^2}{r^2}} + \frac{\rho'}{q}\sqrt{1+\left(\frac{km+1}{km-1}\right)^2\frac{q^2}{r'^2}}\right],$$

D'un autre côté, le travail utile est $Qq\frac{r\theta}{r'}$; le rapport du pre-

mier au second sera donc

$$1 + f_1\left[\frac{\rho}{p}\sqrt{1 + \left(\frac{km+1}{km-1}\right)^2 \frac{p^2}{r^2}} + \frac{\rho'}{q}\sqrt{1 + \left(\frac{km+1}{km-1}\right)^2 \frac{q^2}{r'^2}}\right],$$

formule qui met encore bien en évidence l'utilité de ne pas trop diminuer le rapport km de la plus grande tension à la plus petite.

FIN DU PREMIER VOLUME ET DU COURS DE PREMIÈRE ANNÉE.

8796 Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.





